工程数学解析

数学在力学中的应用

關谷 壮 著

陈 和 王斌耀 蒋福民 译

徐建平 王尔琪 陆林生 校

同济大学出版社

工程数学解析

——数学在力学中的应用

関谷　壮　著

陈　和　王斌耀　蒋福民　译

徐建平　王尔琪　陆林生　校

同济大学出版社

内 容 提 要

本书共分十一章，内容有：矩阵、矢量、张量、偏导数、定积分、线积分、面积分、场的关系式、复数与复变函数、傅立叶分析、微分方程、变分法、数值分析法等。本书在工程应用方面涉及理论力学、材料力学、流体力学、弹性力学、板壳力学、电工学等领域。

全书内容丰富，语言精练，选材独特，它是一本工程技术人员应该必备的参考书，也是一本对已经掌握了一定的数学基本知识但不知如何去应用于工程问题的大学生们所期望的教科书或教学参考书。

作为了解日本高校工科教学情况的窗口，对从事大学数学、力学教学和研究的教师，本书对于他们来说也不无启发和借鉴。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学解析：数学在力学中的应用/(日)関谷 壮著；陈和等译. —上海：同济大学出版社，2002.10
ISBN 7-5608-2499-4

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①关… ②陈… Ⅲ. 数学－应用－工程力学 Ⅳ. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064559 号

工程数学解析——数学在力学中的应用
関谷 壮著 陈 和 王斌耀 蒋福民 译
徐建平 王尔琪 陆林生 校

工業数学解析
著者 関谷 壮 © 1988
発行 共立出版株式会社
ISBN 4-320-07120-4

责任编辑 解明芳 责任校对 郁 峰 封面设计 精 英

出版发行 同济大学出版社
(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 同济大学印刷厂印刷
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 14.75
字 数 295000
印 数 1—3000
版 次 2002 年 10 月第一版 2002 年 10 月第一次印刷
书 号 ISBN 7-5608-2499-4/O·220
定 价 23.00 元

目　录

第1章　矩　阵

第2章　矢　量

第 3 章 张 量

第 4 章 偏导数

第 5 章 定积分

第 6 章　线积分、面积分、场的关系式

第 7 章　复数与复变函数

第 8 章　傅立叶分析

第 9 章　微分方程

第 10 章　变分法

第 11 章　数值分析法

第 1 章　矩　阵

1.1　矩阵及其表示方法

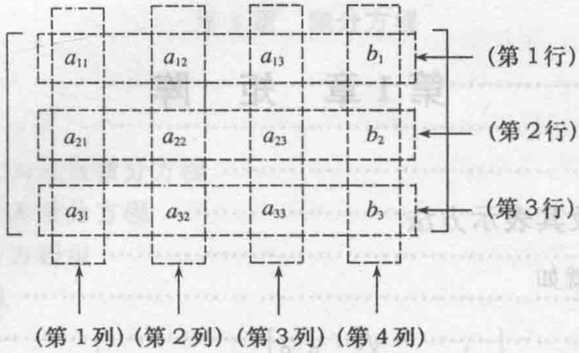
矩阵(matrix)就如

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 8.8 \\ -\dfrac{7}{3} & \sqrt{\pi} & 13 \end{pmatrix} \quad [u,\ v,\ w] \\
&\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \\
&\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{Vmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

这些例子那样,是将数字或文字符号排成长方形,并在其左右两侧用括弧(　),{　},[　]或双重线‖　‖围住后组成的。它们当中的一个一个数字或文字符号(上例中的 $1,-\sqrt{3}/2,8.8,\cdots,a_{32},a_{33},b_3$ 等)称为矩阵的元素(element)。矩阵的元素可以像上面的例子那样是一个数或一个文字符号,也可以如下面的矩阵(1.2)的例子所示,用一个矩阵作为矩阵的元素。

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} \\ [a_3 \quad b_3] & [c_3 \quad d_3] & [e_3] \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

在矩阵中,横排称为行(row),纵排称为列(column)。若给矩阵中的元素添加编号,对于行,以从上往下的顺序分别称为第 1 行,第 2 行……对于列,则从左至右分别称为第 1 列,第 2 列……请看下面的例子:



(1.3)

这个矩阵是由三个行，四个列组成的矩阵，可以将它称为 3 行 4 列矩阵，或者简称($\overline{3}$, 4)矩阵。在 3 上添加横线表示 3 是行数。

这里叙述如上所示的，其元素是长方形排列的矩阵，对这些矩阵的各种加法、乘法等的计算方法作定义，可以形成对解决实际问题有用的计算方法的体系。

整个矩阵有时也可用一个文字表示。例如，可以用一个文字 A, X 等将前面式(1.1)的矩阵表示为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 8.8 \\ -\dfrac{7}{3} & \sqrt{\pi} & 13 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

$$X=(x,\ y,\ z)$$

［问 1.1］　在式(1.1)所示的各矩阵中，用($\overline{m}$, n)的形式表示其行数 m、列数 n，并列举各行、各列的元素。

［提示］　例如，矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$是($\overline{2}$,2)矩阵

第 1 行的元素——1,2　第 1 列的元素——1,3

第 2 行的元素——3,4　第 2 列的元素——2,4

1.2　各种矩阵的名称

A. 长方矩阵

长方矩阵是如式(1.1)的左上方的矩阵那样的，元素成长方形状排列的矩阵，它是最一般的矩阵形式。最普通的长方形矩阵具有下面的形式：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

这个矩阵的元素有两个下标。第 1 个下标是该元素所属行的编号，第 2 个下标是该元素所属列的编号。仅用 1 个元素代表式(1.5)右边的矩阵时可以记为$[a_{ij}]$。

［问 1.2］　在式(1.5)的矩阵中，下面的元素为第几行第几列元素？

(a) a_{m1}　(b) a_{13}　(c) a_{mn}

B. 行矢量与列矢量[①]

仅由 1 行组成的矩阵称为行矢量(row vector)或者称为 1 行矩阵(row matrix)

［例 1.1］　行矢量的例子

(x,y)——平面上的点的直角坐标；

$[u, v, w]$——表示流体的流量中的一个流体粒子的速度沿 x,y,z 方向的分量。

另外，仅由 1 列组成的矩阵称为列矢量(column vector)或者称为 1 列矩阵(column matrix)。

［例 1.2］　列矢量的例子

$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$——表示力沿直角坐标 x,y,z 方向的分量。

对于列矢量的情况，常常用中括弧$\begin{Bmatrix} \quad \end{Bmatrix}$。

往往将行矢量$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$记为$[a_i]$，列矢量$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$记为$\{a_i\}$。

C. 转置矩阵

有一矩阵 A，交换其行与列后得到的矩阵 A^{T}(有时也用 A'表示)称为原来的矩阵 A 的转置矩阵(transposed matrix)

［例 1.3］　转置矩阵的例子

① 矢量将在第 2 章中详细叙述。

(a) $A=(x,y,z)$时，$A^{\mathrm{T}}=\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$时，$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

［问 1.3］　求下面矩阵 A 的转置矩阵 A^{T}

$$\text{(a) } A=\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix},\qquad \text{(b) } A=\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

D. 方阵

在长方矩阵式(1.5)中的行数 m 与列数 n 相等的情况下，即 $m=n$ 时的情况称为方阵(square matrix)。即

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

是方阵。

［例 1.4］　问 1.1 提示的矩阵，问 1.3(b)的矩阵都是方阵。

E. 对角矩阵

在式(1.6)的矩阵$[a_{ij}]$中 $i\neq j$ 的元素 a_{ij} 全部为零时，换言之，沿 a_{11} 与 a_{nn} 连接的直线(这称为矩阵的**主对角线**(**principal diagonal**)上的元素以外的元素全部为零时，这样的矩阵称为对角矩阵(diagonal matrix)。

［例 1.5］　对角矩阵的例子

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}\text{——材料力学中的主应力}$$

另外，主对角线上的元素全部为 1 时的对角矩阵称为单位矩阵。

［例 1.6］　单位矩阵的例子。

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\qquad I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里 I 的下标 2,3 是单位矩阵的行数(＝列数)。

F. 对称矩阵与反对称矩阵

在式(1.6)的方阵中，当 $a_{ij}=a_{ji}$ 时称为对称矩阵(symmetrical matrix)，当 $a_{ij}=-a_{ji}$ 时称为反对称矩阵(skew matrix)，反对称矩阵的主对角线上的元素 $a_{ii}=-a_{ii}$，因此 $a_{ii}=0$，即主对角线上的元素为零。

［例 1.7］　对称矩阵之例

$$\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}\text{——材料力学中的应力}$$

［例 1.8］　反对称矩阵之例

$$\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}\text{——连续体力学中的转动}$$

由上可知，在与主对角线对称的位置上的元素互等，对于反对称矩阵，其绝对值相等、符号相反。

G. 零矩阵

全部元素都为零的矩阵称为零矩阵(zero matrix)。

［例 1.9］　零矩阵之例子

(a) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

［问 1.4］　针对下面各矩阵，从题末选择相应的名称将圆圈中的记号 1、2、3……填入○中。

(a) $(1,0,2,-3)$ ○

(b) $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$○　　(c) $\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$○

(d) $\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix}$○　　(e) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$○　　(f) $\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}$○

(g) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$ ○　　(h) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ ○

① $(\overline{3},4)$矩阵，② 行矢量，③ 列矢量，④ 对称矩阵，⑤ 反对称矩阵，⑥ 对角矩阵，⑦ 单位矩阵 I_4，⑧ 零矩阵。

1.3　矩阵的计算方法

因为矩阵不是单一的数，所以必须定义矩阵的计算方法。这种计算法在实际中将成为对各个领域都有用的方法。我们用下面的例子来说明。即使对于一般的情况，根据这些例子也可以类推。

［例 1.10］ 矩阵与矩阵相等

若要矩阵 A 与矩阵 B 相等，只要 A 与 B 具有同样的行数和列数，其对应的元素彼此相等，就定义为 A 与 B 相等，例如：

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}$$

而且 $a=g$，$b=h$，$c=i$，$d=j$，$e=k$，$f=l$ 是对应相等的，因此，联立二元一次方程式：

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

可以表示为

$$\begin{Bmatrix} a_1x+b_1y \\ a_2x+b_2y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

［例 1.11］ 矩阵 A 与矩阵 B 相加（或者矩阵 A 减矩阵 B）

当矩阵 A 与矩阵 B 具有相同的行数和列数，上述计算才能被定义。其做法如下：

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 9+(-3) \\ 6+5 & 2+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-0 & 9-(-3) \\ 6-5 & 2-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

［例 1.12］　数与矩阵相乘

当 $A=\begin{bmatrix}4 & 9\\6 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{Bmatrix}4\\-3\end{Bmatrix}$时

$$3A=3\begin{bmatrix}4 & 9\\6 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times4 & 3\times9\\3\times6 & 3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 27\\18 & 7\end{bmatrix}$$

$$(-1)B=(-1)\times\begin{Bmatrix}4\\-3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(-1)\times4\\(-1)\times(-3)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-4\\3\end{Bmatrix}$$

故$(-1)A$ 可写为$-A$。

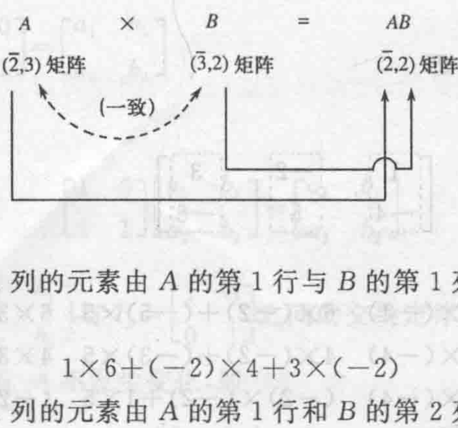
［例 1.13］　矩阵与矩阵相乘(矩阵与矩阵之积)。

举例说明确定矩阵 A 与矩阵 B 相乘的乘积 AB 的方法。这种计算只有当 A 的列数与 B 的行数相同时才能进行。

设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\-4 & 5 & -6\end{bmatrix}$……$(\overline{2},3)$矩阵

$B=\begin{bmatrix}6 & -5\\4 & -3\\-2 & 1\end{bmatrix}$……$(\overline{3},2)$矩阵

因为 A 的列数 3 与 B 的行数 3 相等，所以可以求得它们的乘积 AB。这时 AB 也是另外的一个矩阵，其行数与列数分别根据 A，B 的行数，列数可以求得如下：



AB 的第 1 行，第 1 列的元素由 A 的第 1 行与 B 的第 1 列的对应序号的元素彼此相乘后相加而得：

$$1\times6+(-2)\times4+3\times(-2)$$

AB 的第 2 行，第 1 列的元素由 A 的第 1 行和 B 的第 2 列的对应序号的元素彼此相乘后相加得到：

$$1\times(-5)+(-2)\times(-3)+3\times1$$

AB 的第 2 行，第 1 列的元素由 A 的第 2 行与 B 的第 1 行的对应序号的元素相

乘后相加得到：

$$(-4)\times6+5\times4+(-6)\times(-2)$$

AB 的第 2 行，第 2 列的元素由 A 的第 2 行与 B 的第 2 列的对应序号的元素彼此相乘后相加得到：

$$(-4)\times(-5)+5\times(-3)+(-6)\times1$$

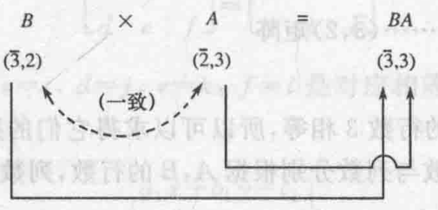
即 AB 为：

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -5\\ 4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times6+(-2)\times4+3\times(-2) & 1\times(-5)+(-2)\times(-3)+3\times1\\ (-4)\times6+5\times4+(-6)\times(-2) & (-4)\times(-5)+5\times(-3)+(-6)\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-8-6 & -5+6+3\\ -24+20+12 & 20-15-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 4\\ 8 & -1\end{bmatrix}$$

用同样的方法也可确定 BA。这时



BA 为$(\bar{3},3)$矩阵。即

$$BA=\begin{bmatrix}6 & -5\\ 4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6\times1+(-5)\times(-4) & 6\times(-2)+(-5)\times5 & 6\times3+(-5)\times(-6)\\ 4\times1+(-3)\times(-4) & 4\times(-2)+(-3)\times5 & 4\times3+(-3)\times(-6)\\ (-2)\times1+1\times(-4) & (-2)\times(-2)+1\times5 & (-2)\times3+1\times(-6)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6+20 & -12-25 & 18+30\\ 4+12 & -8-15 & 12+18\\ -2-4 & 4+5 & -6-6\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} 26 & -37 & 48 \\ 16 & -23 & 30 \\ -6 & 9 & -12 \end{bmatrix}
$$

由此可见,AB 与 BA 是不相同的,即在一般情况下矩阵与矩阵的积

$$
AB \neq BA \tag{1.9}
$$

交换定律(commutative law)一般不成立。

［例 1.14］　矩阵与矩阵相乘的其他例子

(a) $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1x+b_1y \\ a_2x+b_2y \end{Bmatrix}$

因此,例 1.10 叙述过的联立二元一次方程式(1.7)或式(1.8)可以写为:

$$
\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \tag{1.10}
$$

(b) $(x, y) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_1x+b_1y,\ a_2x+b_2y)$

故联立方程式(1.7)也可以写为

$$
(x, y) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (c_1, c_2) \tag{1.11}
$$

(c) $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

又

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}
$$

这种情况,矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ 与 $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 之间的交换定律成立,在 A 的左边乘以 I_2 或在 A 的右边乘以 I_1,A 不发生变化,即

$$
AI_2 = I_2A = A \tag{1.12}
$$

即 I_2 是与在数的相乘中的 1 起同样作用的矩阵,所以被称为单位矩阵。对于 I_3, I_4, …也一样。

[问 1.5] 进行下面的矩阵计算：

(a) $3\begin{bmatrix}4 & 9\\ 6 & 2\end{bmatrix}\pm 4\begin{bmatrix}0 & -3\\ 5 & 7\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}-3 & 5 & 6 & -8\\ 0 & -1 & 2 & -4\\ 7 & 9 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -7\\ 5 & 3\\ -4 & 0\end{bmatrix}$

[问 1.6] 将联立三元一次方程式

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

写成与式(1.8)及式(1.10)同样的用矩阵表达的方程式。

[问 1.7] 对联立 n 元一次方程式

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{m}x_n=b_n \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

也与[问 1.6]一样进行处理。

1.4 逆阵

联立二元一次方程式(1.7)可以用式(1.10)的矩阵形式写出，该方程式的解在 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时为

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{b_2}{a_1b_2-a_2b_1}c_1-\frac{b_1}{a_1b_2-a_2b_1}c_2\\ y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{a_2}{a_1b_2-a_2b_1}c_1+\frac{a_1}{a_1b_2-a_2b_1}c_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

[问 1.8] 推导联立二元一次方程式(1.7)的真实解为式(1.15)。

式(1.5)用矩阵可写为：

$$\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix} \tag{1.16}$$