The Elementary Proofs of The Prime Number Theorem, 2e

HIT

数论经典著作系列

素数定理的初等证明（第2版）

潘承彪　潘承洞　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数论经典著作系列

素数定理的初等证明

The Elementary Proofs of The Prime Number Theorem, 2e

（第2版）

潘承彪　潘承洞　著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书主要介绍素数定理的七个初等证明以及与之有关的 Chebyshev 不等式、Mertens 定理、素数定理的等价命题、Riemann Zeta 函数、几个 Tauber 型定理、$\mathbb{L}$ 空间中的 Fourier 变换、Wiener 定理、素数定理的推广等. 通过学习本书,对于了解数学各分支之间的相互联系,提高观察问题、分析问题和解决问题的能力,以至对素数定理做进一步的研究,是很有裨益的.

本书可供大学数学专业的师生、数学工作者及数学爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

素数定理的初等证明:第 2 版/潘承彪,潘承洞著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017. 1

ISBN 978-7-5603-6152-9

Ⅰ. ①素… Ⅱ. ①潘…②潘… Ⅲ. ①素数-定理证明 Ⅳ. ①O156. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 182863 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress. hit. edu. cn
印 刷 哈尔滨工大节能印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 17. 25 字数 310 千字
版 次 2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6152-9
定 价 48. 00 元

1998 年 6 月 3 日，时年 81 岁的 A. Selberg 教授神采奕奕健步登上长城.

叶扬波　摄

对素数定理的初等证明做出最重要贡献的是挪威数学家 Atle Selberg 教授(1917.6.14—2007.8.6)，因此他获得了 1950 年的菲尔兹奖。1998 年 5 月 30 日至 6 月 15 日，A. Selberg 教授应北京大学等单位邀请访华，6 月 2 日在北京大学做了题为"素数定理过去一百年来的综述"的重要报告；6 日 8 日在山东大学做了题为"关于 L 函数的线性组合在其临界线上的零点"的报告，6 月 9 日 200 余人聆听了他做的题为"素数定理的初等证明的概述"的演讲，亲自深情地介绍了他的这一划时代的伟大成果；6 月 12 日在西北大学做了题为"我的数学生涯"的精彩报告. 6 月 14 日大家在北京为他的 81 岁生日祝寿.

◎第二版序

很高兴哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室要再版本书，为大学数学系学生，特别是高年级学生，提供一本要应用到多门大学数学基础课程知识，了解素数的课外读物，这对他们深入理解这些课程的内容、应用及与数论之间的联系是有益的，并可能激发对数论的兴趣. 本书的第一版是在1983年交稿，并于1988年出版的，介绍了到1981年为止的有代表性的七个(不用高深函数论知识的)初等证明.

1984年Hédi Daboussi([1])①和1986年Adolf Hildebrand([1])分别发表了新证明，它们都不用Selberg不等式，当然也不用Riemann ζ函数的性质. 这两个证明与Selberg，Erdös的证明一样，也是真正意义上的初等证明，他们都是讨论Möbius函数$\mu(n)$的均值代替Selberg和Erdös所讨论的Mangoldt函数$\Lambda(n)$的. 但是，应该说所有这些真正意义上的初等证明具有相同的证明思想. 在本版中将给出Hildebrand的证明，我们觉得这个证明更有数论味道，它是利用Mertens素数定理(见第三章)和筛法，并结合某种一般的数列的均值估计，给出了素数定理的等价命题(见第四章§1)

$$M(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=o(x)$$

的证明(Daboussi也是用类似的想法证明了这个等价命题). 这一证明将作为第八个证明安排在第十五章，原来的第十五章改为第十六章.

---

① 这一证明可见姚家燕翻译的《素数论》(G. Tenenbaum与M. M. France合著，清华大学出版社，2007).

还应该指出的是，卢文超(Lu Wenchao)([1])不用复变函数知识，在 Selberg，Bombieri([1]，[2])，Diamond 和 Steining([1])及 Balog([1])等人工作的基础上给出素数定理的一个新的初等证明，他证明了

$$\pi(x)=\ln x+O(x\,\mathrm{e}^{-(\log x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}})$$

ε 是任意给定的正数，这是目前用初等方法得到的最好的余项估计.

值得纪念的是，为素数定理的初等证明做出了最重要贡献的 A. Selberg 教授，于 1998 年应邀访华，我全程陪同他访问了北京大学、山东大学和西北大学，他十分高兴地分别做了精彩的学术报告和参观游览，留下了难忘的愉快回忆.

再版前，我改正了书中的一些疏漏、笔误和印刷错误，并添加了一些参考文献和附注. 本书中需要用到大学数学系的数学分析、高等代数、复变函数及实变函数等课程的相关知识，我们假定读者都已学过，一般不加证明，它们很容易在常用的教材中找到，在此也就不介绍相关的书籍了. 阅读本书并不需要学过初等数论，所用到的数论知识都给出了证明，对此有进一步兴趣的读者可参看 Hardy 和 Littlewood 的[1]、华罗庚的[2]及潘承洞和潘承彪的[1].

最后，对刘培杰数学工作室及责任编辑张永芹和杜莹雪为本书再版所提出的有益建议与细致工作表示衷心感谢！

潘承彪

2014 年 9 月 15 日

第一版序

素数是数学中最重要、最基本的概念之一. 素数定理

$$\pi(x)^{①} \sim x(\ln x)^{-1}, x\to+\infty$$

是数论以至整个数学中最著名的定理之一,这一定理是 Legendre 于 1800 年左右提出的. 经过了一百多年的时间,在 1896 年由 Hadamard 和 de la Vallée Poussin 彼此独立地用高深的整函数理论所证明. 但是,对定理的研究并没有因此而完结,其中的一个方面是数学家们企图找到尽可能简单的证明. 在数学中很少有一个定理像素数定理那样对其证明做了如此深入、透彻、全面的研究. 在数学中,对于一种理论体系的逻辑结构——即其中各个概念、命题之间的逻辑联系——的研究是十分重要的. 长期以来,根据所找到的许多证明,人们认为素数定理和 Riemann ζ 函数②有不可分割的联系,因而许多数学家认为要给出一个素数定理的初等证明(至多用一些初等微积分)是不可能的. 然而,在证明素数定理之后约 50 年,Selberg 和 Erdös 于 1949 年给出了这样的证明! 他们的证明竟是这样的初等,除了 e^x, $\ln x$ 之外用不到任何"超越性"的东西,也不需要微分和积分. 当然证明是很复杂的,他们的工作被认为是对素数分布理论的逻辑结构具有头等重要意义的发现. 对素数定理的研究大大促进了数论、分析、函数论的研究. 对这一定理的研究至今不衰,仍吸引着不少数学工作者的注意.

---

① $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数.

② 见第八章.

这样，学习素数定理已有的各种证明，对于了解数学各分支之间的相互联系，提高我们观察问题、分析问题和解决问题的能力，以至于对素数定理做进一步研究，是有裨益的.

因此，当出版社的同志要我们为数学系高年级学生写一本课外读物时，我们就想到了这个题目，把有关的知识向他们做一个较为系统而全面的介绍. 当然，作为这样的读物，把要用到高深的函数论知识的证明包括在内是不适宜的. 本书把至多用到复变函数论的 Cauchy 积分定理的证明都看作是初等的. 我们选了到 1981 年为止有代表性的七种证明.

阅读本书不需要具备任何初等数论的知识，但是，不同的证明需要用到大学数学系的一元微积分、复变函数论和实变函数论方面的有关知识. 第一章主要是介绍素数定理的历史，并综合介绍了本书各章的内容；具有中学程度的读者就可阅读第二章；学过微积分后就可阅读第三至六及九章；第八、十一、十二及十五章需要复变函数论的知识；当学过实变函数论后，就可阅读其他各章了. 有些内容我们按其困难的程度打上了“*”号和“**”号（见目录），初次阅读时可略去，这并不影响对素数定理的初等证明有一个相当的了解. 我们希望本书对从事数论工作的同志亦有一定的参考价值.

书中的定理、引理、推论等分别按每节编号，公式亦按每节编号. 在引用时，“式(5)”表示同一节中的式(5)；“§2 式(5)”表示同一章第 2 节中的式(5)；“第一章 §2(5)”表示第一章第 2 节中的式(5)；其他类推.

关于素数定理的研究已做了各种推广，例如算术级数中的素数定理亦是十分著名的问题，但本书不涉及这些内容.

本书的内容是我们在多年的教学工作的基础上整理、补充而成的，有些内容还来不及仔细推敲，缺点与错误一定不少，切望指正.

我们衷心感谢陈景润同志在病中仔细地审阅了本书，并提出了十分宝贵的意见.

潘承洞　潘承彪

1983 年 10 月于济南

◎补记

对 1981 年后的有关进展说明两点.（1）H. Daboussi（Surle théorème des nombres premiers，C. R. Acad. Sci. Paris，Sér. I，298（1984），161–164）和 A. Hildebrand（The prime number theorem via the large sieve，Mathematika，33（1986），23–30），给出了两个新的初等的实分析证明，不需要利用 Selberg 不等式（见第一章 §2 式（39）），是不属于本书第 13 页中所说的四类证明的又一类新证明.（2）A. Ф. Лаврик 的文章：Методы Изучения Закона Распределения Простых Чисел，Труды Матем. Инст. Стеклов，163（1984），118–142，对素数定理的初等与非初等证明做了很好很全面的介绍.

衷心感谢本书的责任编辑赵序明同志，由于他的建议与帮助并改正了一些笔误，使本书更便于阅读.

作　者

1987 年 6 月 1 日于北京

符号说明

x,y 等表示实数

a,b,d,k,l,m,n 等表示整数或正整数

p,q 等表示素数

$a \mid b$	a 整除 b
$a \nmid b$	a 不能整除 b
$p^k \parallel a$	$p^k \mid a, p^{k+1} \nmid a$，$k$ 是非负整数
(a,b)	a 和 b 的最大公约数
$[a,b]$	a 和 b 的最小公倍数
$\sum\limits_{n \leqslant x}$	对不超过 x 的正整数 n 求和
$\sum\limits_{y < n \leqslant x}$	对满足条件 $y < n \leqslant x$ 的整数 n 求和
$\sum\limits_{d \mid n}$	对 n 的所有的整除数 d 求和
$\sum\limits_{p \leqslant x}$	对不超过 x 的素数 p 求和
$\sum\limits_{y < p \leqslant x}$	对满足条件 $y < p \leqslant x$ 的素数求和
$\sum\limits_{p \mid n}$	对 n 的所有不同的素因数求和
$\sum\limits_{p}$	对全体素数求和
$\prod\limits_{p \leqslant x}$	对不超过 x 的素数求积
$\prod\limits_{y < p \leqslant x}$	对满足条件 $y < p \leqslant x$ 的素数求积
$\prod\limits_{p \mid n}$	对 n 的所有不同的素因数求积
$\prod\limits_{p}$	对全体素数求积
$\log_a x$	$a > 1$，以 a 为底的对数
e	极限值 $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
$\ln x$	以 e 为底的自然对数

$[x]$	实数 x 的整数部分，见第一章 §3 定义 1
O, $\ll$	见第一章 §1 定义 1
o, $\sim$	见第一章 §1 末
$d(n)$	除数函数，见第二章 §2 推论 3 之后
$\mu(n)$	Möbius 函数，见第二章 §3 式(4)
$\Lambda(n)$	Mangoldt 函数，见第二章 §5 式(3)
$\pi(x)$	不超过 x 的素数个数
$\theta(x)$, $\psi(x)$	Chebyshev 函数，见第二章 §5 式(1) 及(2)
$C, C_1, C_2, \cdots$	表示正常数
$s = \sigma + it$	$\sigma = \mathrm{Re}\, s$ 表示复数 s 的实部，$t = \mathrm{Im}\, s$ 表示虚部
γ	Euler 常数，见第三章 §1 式(13)

◎目录

第一章 素数定理的历史

本章主要介绍素数定理证明的发展史,并同时介绍本书的内容安排(见 §2). 在 §1 及 §3 中分别介绍了本书中常用的符号 O 和 $\ll$,以及数论函数 $[x]$.

§1 符号 O 及 $\ll$

本书中经常要使用符号 O(大写斜体拉丁字母,读作"大欧")及 $\ll$(读作"小于小于"),前者是 E. Landau 引进的,后者是 И. М. Виноградов 引进的. 它们的意义是相同的,但在使用中各有优点.

定义 1 设 $\mathscr{M}$ 是给定的一个实数集合,$f(x)$ 是定义在 $\mathscr{M}$ 上的复值函数,$\phi(x)$ 是定义在 $\mathscr{M}$ 上的正值函数. 如果存在一个与变数 x 无关的常数 A,使得

$$|f(x)| \leqslant A\phi(x), x \in \mathscr{M} \tag{1}$$

那么就记作

$$f(x) = O(\phi(x)) \text{ 或 } f = O(\phi), x \in \mathscr{M} \tag{2}$$

或

$$f(x) \ll \phi(x) \text{ 或 } f \ll \phi, x \in \mathscr{M} \tag{3}$$

常数 A 称为符号 O(或 $\ll$) 所包含的常数,简称 O(或 $\ll$) 常数.

显然,这两个符号是不等式的缩写. 当 $\phi(x) \equiv 1$ 时,这两个符号表明 $|f(x)|$ 在集合 $\mathscr{M}$ 上有界. 一般说来,这表明了 $|f(x)|$ 在集合 $\mathscr{M}$ 上的数量阶不超过 $\phi(x)$ 的数量阶. 例如(请读者找出包含的常数)

$$\sin(ax + b) = O(1), \sin(ax + b) \ll 1, -\infty < x < +\infty \tag{4}$$

$$\sin x = O(|x|), \sin x \ll |x|, |x| \leqslant \frac{1}{2} \tag{5}$$

$$1 - \cos x = O(x^2), 1 - \cos x \ll x^2, |x| \leqslant \frac{1}{2} \tag{6}$$

设 $b \geqslant a > 0$,则有

$$x^a = O(x^b), x^a \ll x^b, x \geqslant 1 \tag{7}$$

$$x^b = O(x^a), x^b \ll x^a, 0 \leqslant x < 1 \tag{8}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2} = O(|x|), \frac{x}{(x-1)^2} \ll |x|, |x| \leqslant \frac{1}{2} \tag{9}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2} = O\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right), \frac{x}{(x-1)^2} \ll \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$|x-1| \leqslant \frac{1}{2}, x \neq 1 \tag{10}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2} = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \frac{x}{(x-1)^2} \ll \frac{1}{|x|}, |x-1| \geqslant \frac{1}{2} \tag{11}$$

最后三个例子表明,同一个函数在不同的集合上(实际上是在不同的点附近:$x=0, x=1, x=+\infty$),它的数量阶是不同的. 所以,可以说这两个符号是用来刻画函数在一个点的邻近变化的数量阶的(包括有界、无界、无穷小、无穷大).

对任意固定的正数 δ,有

$$x = O(x^2), |x| \geqslant \delta \tag{12}$$

因为可取 $A = \frac{1}{\delta}$,但是

$$x = O(x^2), |x| \leqslant 1 \tag{13}$$

不成立,这是因为在 $x=0$ 处,x^2 是二阶无穷小,而 x 只是一阶无穷小. 这个例子也表明常数 A 和所考虑的定义域 $\mathscr{M}$ 是有关的.

有时候函数 $f(x)$ 可依赖于某一参数 λ(或几个参数),这时常数 A 可能依赖于参数 λ,也可能不依赖于参数 λ. 有时这一点必须明确指出. 例如:式(4) 中的例子,函数依赖于两个参数 a 和 b,但常数 A 可取作 1 而与参数无关,但若考虑 $\sin ax, -\infty < a < +\infty$,我们有

$$\sin ax = O(|x|), |x| \leqslant \frac{1}{2} \tag{14}$$

这时可取 $A = |a|$,但不能取 A 为某一常数. 这时,我们就说式(14) 中的 O 常数与参数 a 有关,但若取 $\phi(x) = |ax|$,则

$$\sin ax = O(|ax|)$$

中的 O 常数就与参数 a 无关.

符号 O 和 $\ll$ 有两个简单有用的运算法则,设

$$f_1(x) = O(\phi_1(x)), f_1(x) \ll \phi_1(x), x \in \mathscr{M} \tag{15}$$