普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套参考书

高等学校理工类课程学习辅导丛书

大学物理（第二版）习题分析与解答

罗圆圆　吴评　主编

高等教育出版社

04-44
45

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

高等学校理工类课程学习辅导丛书

大学物理（第二版）习题分析与解答

DAXUE WULI (DI ER BAN) XITI FENXI YU JIEDA

罗圆圆　吴评　主编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是配套罗圆圆、吴评主编的《大学物理》（第二版）的教学参考书，书中给出了主教材中全部十六章习题的详解。本书解题思路清晰、方法简明，可帮助学生进一步掌握大学物理中的基本规律和分析问题的基本方法。

本书可供以《大学物理》（第二版）或同类教材作为主要授课教材的高校师生使用，也可供其他读者参考。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理（第二版）习题分析与解答 / 罗圆圆，吴评主编. --北京 ：高等教育出版社，2016.7

（高等学校理工类课程学习辅导丛书）

ISBN 978-7-04-045505-2

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①罗… ②吴… Ⅲ. ①物理学-高等学校-题解 Ⅳ. ①O4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 107824 号

策划编辑	程福平	责任编辑	程福平	封面设计	李树龙	版式设计	杜微言
插图绘制	杜晓丹	责任校对	胡美萍	责任印制	毛斯璐		

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	18.25		
字　　数	330 千字	版　　次	2016 年 7 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2016 年 7 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	32.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　45505-00

前　　言

“大学物理”课程是低年级学生的一门重要基础课.为了学好大学物理，课外做一定数量的练习题是必要的.一方面有助于加深对基本概念、基本规律和原理的理解；另一方面可以提高学生分析问题和解决问题的能力。

本书是为配合罗圆圆、吴评主编的《大学物理》（第二版）而编写的，它给出了《大学物理》（第二版）中所有习题的解答，并力求解题思路清晰，方法简明，突出基本概念、基本规律，通过对题目的分析，结合解题方法的介绍和运用，使读者加强理论联系实际，拓宽思路，举一反三，触类旁通。编者希望本书对读者学好大学物理有所帮助。

参与本书编写的有罗圆圆、吴评、骆成洪、胡爱荣、辛勇、何菊生、龚勇清、肖文波、易江林、古金霞、田维、易静、卢敏、陈秀洪、刘维清、胡跃辉、曾庆明、余晓光。

由于编写水平和教学经验有限，书中不当之处和错误在所难免，敬请读者批评指正，不胜感激！

罗圆圆

2015 年 7 月

目　　录

第一章　质点运动学

1.1　选择题

(1) 一质点做直线运动,某时刻的瞬时速度 $v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,瞬时加速度 $a=-2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,则 1 s 后质点的速度等于　[　　]

(A) 0;　(B) $2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$;

(C) $-2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$;　(D) 不能确定.

解　因为 $v_{t_0+1}=v_{t_0}+\int_{t_0}^{t_0+1}a(t)\mathrm{d}t$, $a(t)$ 未知,所以 v 不能确定,

选[D].

(2) 一质点做一般平面曲线运动,其瞬时速度为 $\boldsymbol{v}$,速率为 v,平均速度为 $\overline{\boldsymbol{v}}$,则这些量之间的关系必定是　[　　]

(A) $|\boldsymbol{v}|=v,\ |\overline{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$;　(B) $|\boldsymbol{v}|\neq v,\ |\overline{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$;

(C) $|\boldsymbol{v}|\neq v,\ |\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$;　(D) $|\boldsymbol{v}|=v,\ |\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$.

解　选[D]

(3) 一质点做平面曲线运动,某一瞬时的位矢为 $\boldsymbol{r}(x,y)$,则它该时刻的速度大小为　[　　]

(A) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$;　(B) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$;

(C) $\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$;　(D) $\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2}$.

解　$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

1.2　填空题

(1) 一架飞机以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 在空中做水平飞行. 某时刻在飞机上以水平速度 $\boldsymbol{u}$ 向前发射一发子弹. 如果忽略空气阻力,并设发射过程不影响飞机的飞行速度,则

(a) 以地面为参考系,子弹的轨迹方程是____________;

(b) 以飞机为参考系,子弹的轨迹方程是____________.

解　以地面为参考系，子弹参与水平(x 轴)方向速度为 v_0+u 的匀速直线运动，竖直(y 轴)方向自由落体运动. 取坐标系如解图 1.2(1)(a)所示，有

$$x=(v_0+u)t$$

$$y=\frac{1}{2}gt^2$$

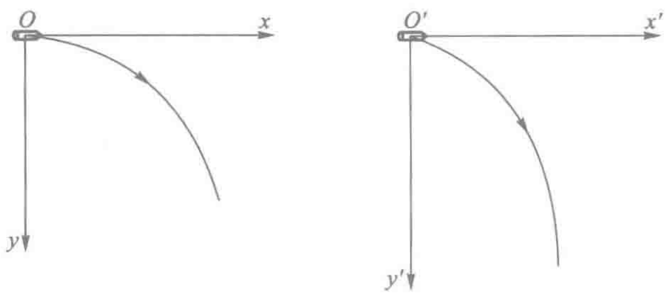
消去时间 t 得子弹的轨迹方程

$$y=\frac{gx^2}{2(v_0+u)^2}$$

以飞机为参考系，子弹参与水平(x'轴)方向速度为 u 的匀速直线运动，竖直方向(y'轴)自由落体运动. 取坐标系如解图 1.2(1)(b)所示，有

$$x'=ut'$$

$$y'=\frac{1}{2}gt'^2$$

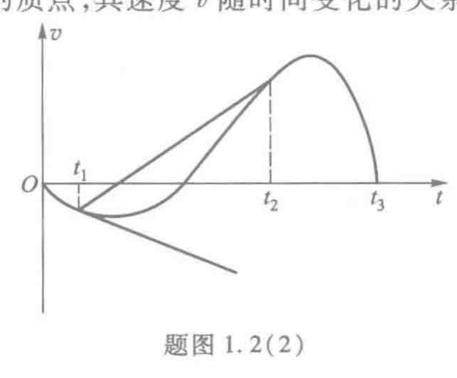


解图 1.2(1)

消去时间 t'得子弹的轨迹方程

$$y'=\frac{gx'^2}{2u^2}$$

(2) 做直线运动的质点，其速度 v 随时间变化的关系如题图 1.2(2)中 $v-t$



题图 1.2(2)

曲线所示,则

(a) t_1时刻曲线的切线斜率表示________;

(b) t_1与t_2之间曲线的割线的斜率表示________;

(c) 从$t=0$到t_3时间内,质点的位移可由________表示;

(d) 从$t=0$到t_3时间内,质点的路程又可由________表示.

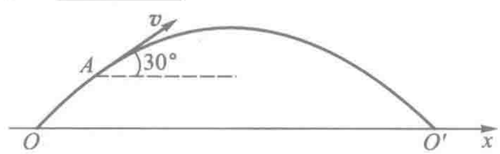
解　(a) t_1时刻曲线的切线斜率$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}$表示该时刻质点的加速度;

(b) t_1与t_2之间曲线的割线斜率$\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$,表示该时间间隔($t_1\sim t_2$)质点的平均加速度;

(c) 从$t=0$到t_3时间内,质点的位移$\Delta x=\int_0^{t_3}v\mathrm{d}t$可由曲线与$x$轴围成的面积的代数和表示;

(d) 从$t=0$到t_3时间内,质点的路程$\Delta S=\left|\int_0^{t'}v\mathrm{d}t\right|+\int_{t_1}^{t_3}v\mathrm{d}t$,可由曲线与$x$轴围成的面积的绝对值之和表示.

(3) 一质点做如题图1.2(3)所示的斜抛运动,测得它在轨道A点处的速度大小为v,方向与水平方向成30°角,则该质点在A点的切向加速度$a_t=$______;轨道该点的曲率半径$\rho=$________.



题图1.2(3)

解　质点做斜抛运动,是加速度$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}$(重力加速度)恒定的曲线运动.$A$处的切向加速度$a_t$(即重力加速度$\boldsymbol{g}$在切线方向的投影)

$$a_t=g\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{g}{2},$$

负号表示切向加速度与速度$\boldsymbol{v}$的方向相反.

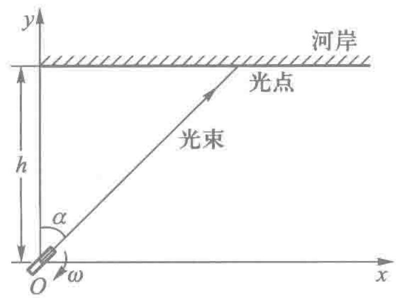
$$a_n=g\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}g$$

$$=\frac{v^2}{\rho}$$

$$\rho=\frac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$$

1.3　一只军舰停在距河岸(河岸为直线)500 m 处,舰上的探照灯以转速 $n=1\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}$转动. 当光束与河岸成60°角时,光束打在河岸上的光点移动的速度是多少?

解　取坐标系如解图 1.3 所示.



解图 1.3

$$\omega=2\pi\frac{1}{60}=\frac{\pi}{30}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

光点沿河岸的运动方程为

$$x = h\tan\alpha = h\tan\omega t$$

$$y = h$$

光点沿河岸移动的速度 v 为

$$v = v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{h\omega}{\cos^2\omega t}$$

当 $\omega t=\frac{\pi}{6}$时

$$v = \frac{h\omega}{\cos^2\omega t} = \frac{500\times\frac{\pi}{30}}{\cos^2\frac{\pi}{6}}\mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 69.8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

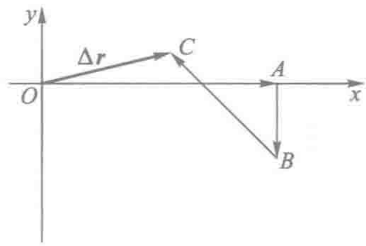
1.4　一只小船自原点出发,在 25 s 内向东航行了30 m,又在 10 s 内向南行驶了 10 m,再在 15 s 内向正西北航行了 18 m,求这 50 s 内

(1) 小船的平均速度;

(2) 小船的平均速率.

解　小船运动轨迹如解图 1.4 所示,在这 50 s 内的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$

$$\Delta\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



解图 1.4

其中

$$\overrightarrow{OA} = 30\boldsymbol{i}\ \text{m}$$

$$\overrightarrow{AB} = -10\boldsymbol{j}\ \text{m}$$

$$\overrightarrow{BC} = BC\left(\cos\frac{3\pi}{4}\boldsymbol{i} + \sin\frac{3\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)$$

$$= 18\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\boldsymbol{i}\ \text{m} + 18\times\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}\ \text{m}$$

$$\Delta\boldsymbol{r} = 30\boldsymbol{i}\ \text{m} - 10\boldsymbol{j}\ \text{m} - 9\sqrt{2}\boldsymbol{i}\ \text{m} + 9\sqrt{2}\boldsymbol{j}\ \text{m}$$

$$= (30 - 9\sqrt{2})\boldsymbol{i}\ \text{m} + (9\sqrt{2} - 10)\boldsymbol{j}\ \text{m}$$

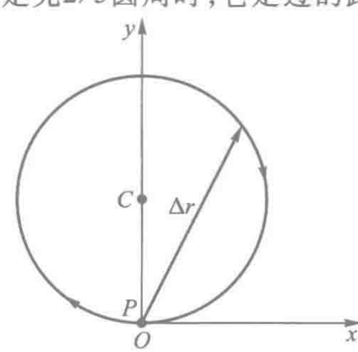
平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{(30 - 9\sqrt{2})\boldsymbol{i} + (9\sqrt{2} - 10)\boldsymbol{j}}{25 + 10 + 15}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = (0.35\boldsymbol{i} + 0.05\boldsymbol{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

平均速率为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{30 + 10 + 18}{25 + 10 + 15}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 1.16\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

1.5　一质点 P 从 O 点出发以匀速率 $0.1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 作半径为 1 m 的圆周运动，如题图 1.5 所示. 当它走完2/3圆周时，它走过的路程是多少？这段时间内的



题图 1.5

平均速度如何?

解 路程为

$$s = \frac{\pi}{3} \times 2\pi R = \frac{2}{3} \times 2\pi \times 1\ \text{m} = 4.19\ \text{m}$$

位移大小为

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = 2R\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\ \text{m}$$

时间间隔为

$$\Delta t = \frac{s}{v} = \frac{4.19}{0.1}\ \text{s} = 41.9\ \text{s}$$

平均速度的大小为

$$|\bar{\boldsymbol{v}}| = \left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right| = \frac{\sqrt{3}}{41.9}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 4.13\times 10^{-2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

平均速度的方向:与 x 轴夹角为$\frac{\pi}{3}$.

1.6 已知一质点做平面曲线运动,运动学方程为

$$\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (2 - t^2)\boldsymbol{j} \quad (\text{SI 单位})$$

试求:

(1) 质点在第 2 s 内的位移;

(2) 质点在 $t=2$ s 时的速度和加速度;

(3) 质点的轨迹方程;

(4) 在 Oxy 平面内画出质点的运动轨迹,并在图上标出 $t=2$ s 时质点的位矢 $\boldsymbol{r}$,速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$.

解 (1) $t=1$ s 时,$\boldsymbol{r}_1 = [2\times 1\boldsymbol{i} + (2-1^2)\boldsymbol{j}]\ \text{m} = (2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\ \text{m}$

$t=2$ s 时,$\boldsymbol{r}_2 = [2\times 2\boldsymbol{i} + (2-2^2)\boldsymbol{j}]\ \text{m} = (4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})\ \text{m}$

质点在第 2 s 内的位移

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = [(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}) - (2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})]\ \text{m} = (2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})\ \text{m}$$

(2) $$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (2\boldsymbol{i} - 2t\boldsymbol{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},\quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -2\boldsymbol{j}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

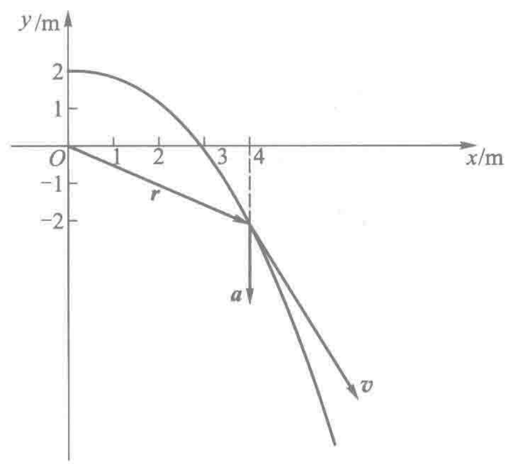
当 $t=2$ s 时,$\boldsymbol{v} = (2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,$\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{j}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

(3) $$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t^2 \end{cases}$$

消去 t 得轨迹方程

$$y=2-\frac{x^2}{4}\text{（抛物线）}$$

（4）在 Oxy 平面内质点运动轨迹如解图 1.6 所示.



解图 1.6

1.7　一运动质点的位置与时间的关系为 $x=10t^2-5t$（SI 单位），试求：

（1）质点的速度和加速度与时间的关系，以及初速度的大小和方向；

（2）质点在原点左边最远处的位置；

（3）何时 $x=0$，此时质点的速度是多少？

解　（1）

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=(20t-5)$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

当 $t=0$

$$v(0)=-5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\quad\text{（方向沿 } x \text{ 轴负向）}$$

（2）当 $v=0$ 时，质点离原点左边最远，即

$$20t-5=0,\quad t=\frac{5}{20}\ \text{s}=0.25\ \text{s}$$

$$x=10\times0.25^2\ \text{m}-5\times0.25\ \text{m}=-0.625\ \text{m}\quad\text{（左边最远处）}$$

（3）当 $x=10t^2-5t=0$，得 $t_1=0$，或 $t_2=0.5$ s.

当 $t_1=0$ 时　　$v(0)=-5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

当 $t_2=0.5$ s 时

$$v(0.5)=(20\times0.5-5)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

1.8 一质点在 Oxy 平面内运动,运动学方程为

$$x=2t,\quad y=19-2t^2\quad (\text{SI 单位})$$

(1) 计算并图示质点的运动轨迹;

(2) 写出 $t=1$ s 和 $t=2$ s 时刻质点的位矢,并计算这一秒内质点的平均速度;

(3) 计算 $t=1$ s 和 $t=2$ s 时刻的速度和加速度;

(4) 在什么时刻质点的位矢与其速度恰好垂直?

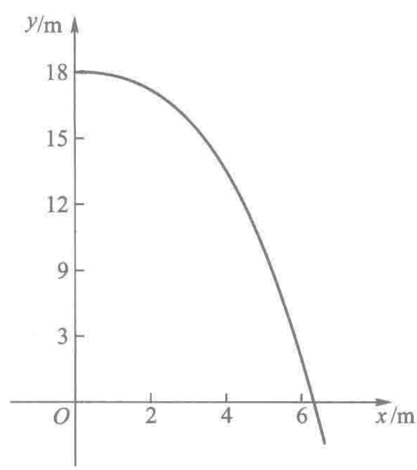
(5) 在什么时刻,质点离原点最近? 距离是多少?

解 (1)
$$\begin{cases}x=2t\\ y=19-2t^2\end{cases}$$

消去时间 t 得轨迹方程

$$y=19-\frac{x^2}{2},\quad x\geqslant 0$$

轨迹如解图 1.8 所示.



解图 1.8

(2)
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}$$

$$t_1=1\ \mathrm{s},\quad \boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+17\boldsymbol{j}$$

$$t_2=2\ \mathrm{s},\quad \boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}$$

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}$$

(3)
$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})$$
$$\boldsymbol{v}(1)=(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
$$\boldsymbol{v}(2)=(2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
$$\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(4) 当 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$, $|\boldsymbol{r}|\cos\theta|\boldsymbol{v}|=0$,则 $\cos\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$,因此,该时刻质点的位矢与其速度恰好垂直.

$$[2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}]\cdot(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})=0$$
$$2t\times2+(19-2t^2)(-4t)=0$$

解之得 $t_1=0$ 或 $t_2=3$ s.

(5) 质点离原点 O 的距离 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2t)^2+(19-2t^2)^2}$ 取极值,有 $\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=0$,得

$$t^3-9t=0,\quad t_1=0\text{ 或 }t_2=3\ \mathrm{s}$$
$$|\boldsymbol{r}(0)|>|\boldsymbol{r}(3)|=6.08\ \mathrm{m}.$$

则当 $t_2=3$ s 时,质点离原点 O 最近,距离为 6.08 m.

1.9　一质点以初速度 v_0 沿与水平地面成 θ 角的方向上抛,并落回到同一水平地面上,求该质点在 t 时刻的切向加速度和法向加速度,以及该抛体运动轨道的最大和最小曲率半径.

解　抛体运动是恒定加速度 $\boldsymbol{g}$(重力加速度)的曲线运动.

设 t 时刻质点在轨道上的速度 $\boldsymbol{v}$ 与水平面的夹角为 α,则 $a=g$,方向与水平面垂直指向地心.

$$a_t=g\sin\alpha,\quad a_n=g\cos\alpha$$
$$v_{水平}=v\cos\alpha=v_0\cos\theta$$

所以
$$v=\frac{v_0\cos\theta}{\cos\alpha}$$
$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v_0^2\cos^2\theta}{g\cos^3\alpha}$$

其中

$$\sin\alpha=\frac{v_0-gt}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0-gt)^2}},\quad\cos\alpha=\frac{v_0\cos\theta}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0-gt)^2}}$$

由于
$$0\leqslant\alpha\leqslant\theta$$

当 $\alpha=\theta$ 时 $\rho_{\max}=\dfrac{v_0^2}{g\cos\theta}$(即抛出处或落地处)

当 $\alpha=0,\cos\alpha=1$ 时 $\rho_{\min}=\dfrac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$(即在最高点)

1.10 一质点沿半径 0.1 m 的圆周运动,其角位置

$$\theta=2+4t^3\quad(\text{SI 单位})$$

求:

(1) $t=2$ s 时的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n;

(2) 当 $a_t=a/2$ 时,θ 等于多少?

(3) 何时质点的加速度与半径的夹角为 45°.

解 (1) $$\omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2,\quad \alpha=\frac{d\omega}{dt}=24t$$

当 $t=2$ s 时

$$a_n=R\omega^2=0.1\times(12\times2^2)^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}=230.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$
$$a_t=R\alpha=0.1\times24\times2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}=4.8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2) 依题意 $\dfrac{a_t}{a}=\dfrac{1}{2}$ 设 $\boldsymbol{a}_t$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 φ,则

$$a_t=a\cos\varphi,\quad 即\ \cos\varphi=\frac{1}{2},\quad \varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{a_n}{a_t}=\tan\frac{\pi}{3},\quad \frac{R\omega^2}{R\alpha}=\tan\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{(12t^2)^2}{24t}=\sqrt{3},\quad t^3=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

即 $$\theta=2+4t^3=2+4\times\frac{\sqrt{3}}{6}\approx3.15\ (\text{rad})$$

(3) 当 $a_t=a_n$ 时,质点的加速度与半径成 $\dfrac{\pi}{4}$ 夹角

$$R\omega^2=R\alpha,\quad (12t^2)^2=24t,$$

$$t^3=\frac{1}{6}\ \text{s},\quad t\approx0.55\ \text{s}$$

1.11 一质点沿 x 轴运动,其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a=2+6x^2$ (SI 单位). 如果质点在 $x=0$ 处的速度 $v=0$,试求其在任意位置的速度.

解　由于

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

则

$$vdv = adx = (2+6x^2)dx$$

$$\int_0^v vdv = \int_0^x (2+6x^2)dx$$

$$v^2 = 4(x+x^3),\quad x \geqslant 0$$

又由于 $a>0$,则　　$v=2\sqrt{x+x^3}$

1.12　一飞轮从静止开始以恒角加速度 2 rad · s^{-2}转动,经过某一段时间后开始计时,在 5 s 内飞轮转过 75 rad. 问开始计时以前,飞轮转动了多长时间?

解　依题意,$t=0,\omega=0,\alpha=2$ rad · s^{-2}

则

$$\omega = \alpha t,\quad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\times 2t^2 = t^2$$

$$\Delta\theta = \theta(t+5)-\theta(t) = (t+5)^2 - t^2 = 75\ (\text{SI 单位})$$

即 $t^2+10t+25-t^2=75$,得 $t=5$ s.

1.13　一质点沿 x 轴运动,其加速度 $a=4t$(SI 单位),已知 $t=0$ 时,质点位于 $x=10$ m 处,初速度 $v_0=0$,求质点的运动学方程.

解　$a=\dfrac{dv}{dt}$,$dv=adt$

当 $t=0$ 时,$v_0=0$,且 $a=4t$,有

$$\int_0^v dv = \int_0^t adt,\quad \int_0^v dv = \int_0^t 4tdt,\quad v = 2t^2$$

$$v = \frac{dx}{dt},\quad dx = vdt$$

当 $t=0$ 时,$x_0=10$ m,有

$$\int_0^x dx = \int_0^t 2t^2 dt,\quad x = 10+\frac{2}{3}t^3$$

此为质点运动学方程

1.14　一质点在竖直方向上做一维振动,其加速度与坐标的关系为 $a=-ky$(SI 单位),式中 k 为常量,y 为以平衡位置为原点测得的坐标. 已知质点在 $y=y_0$处的速度为 v_0,求质点的速度与坐标 y 的函数关系.

解

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}$$

由于 $vdv=ady$,其中 $a=-ky$,且 $y=y_0$ 时,$v=v_0$. 两边积分得

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{y_0}^{y} -ky\mathrm{d}y,\quad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{-1}{2}k(y^2 - y_0^2)$$

$$v^2 = v_0^2 + k(y_0^2 - y^2)$$

讨论：因为 $$v^2 \geqslant 0$$

所以 $$v_0^2 + k(y_0^2 - y^2) \geqslant 0$$

$$-\frac{1}{k}(v_0^2 + ky_0^2) \leqslant y \leqslant \frac{1}{k}(v_0^2 + ky_0^2)$$

即质点振动振幅为

$$A = \frac{1}{k}(v_0^2 + ky_0^2)$$

当 $v=0$ 时，$y = \pm A$.

1.15 一辆直线行驶的摩托车，关闭发动机后其加速度方向与速度方向相反，大小与速率平方成正比，即 $a = -kv^2$(SI 单位)，式中 k 为正的常量. 试证明：摩托车在关机后又行驶 x 距离时的速度为

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-kx}$$

其中 v_0是发动机关闭时的速度.

解 $$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}x,\quad v\mathrm{d}v = -kv^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -k\mathrm{d}x$$

当 $t=0$ 时，$v = v_0$，$x=0$，两边积分，得

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_0^x -k\mathrm{d}x$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kx$$

$$v = v_0\mathrm{e}^{-kx}$$

1.16 一条南北走向的大河，河宽为 l，河水自北向南流，河中心水流速度为 u_0，靠两岸流速为零. 在垂直河宽方向上任一点的水流速度与 u_0之差和该点到河中心的距离的平方成正比. 今有一汽船由西岸出发，以相对于水流的速度 v_0向东偏北 45°方向航行，试求：汽船航线的轨迹方程及它到达东岸的地点.