普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（下册）

第二版

主　编　何满喜　丁春梅

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

高 等 数 学

（下册）

（第二版）

主　编　何满喜　丁春梅

副主编　丁　胜　杨　艳　张书陶

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是根据普通高等理工科院校高等数学课程的基本要求，结合研究生入学考试的需求，汲取国内外优秀教材的优点编写而成. 全书分上、下两册. 下册内容包括空间解析几何与向量代数，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数. 本书力求结构严谨、逻辑清晰、叙述简练，并从较典型的实际问题着手，引入概念和突出应用. 内容与中学数学相衔接，由浅入深，循序渐进，便于教学与自学. 书中各章节的主要内容都配有适量的例题和习题，着重训练读者对定义与概念的理解和对定理与方法的应用能力，培养读者解决问题的逻辑思维方法和创新能力. 而每章都配有适量的总习题，便于读者掌握重要的基本概念与数学思想，有利于巩固重点内容.

本书可用作普通高等学校非数学专业的本科生高等数学课程的教材，若不讲部分带星号的内容，也可作为少学时高等数学课程的教材. 还可供从事高等数学课程教学的教师和科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/何满喜，丁春梅主编. —2 版. —北京：科学出版社，2016.7
普通高等教育"十三五"规划教材
ISBN 978-7-03-049308-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①何…②丁… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 150027 号

责任编辑：张中兴 陈日德 / 责任校对：张凤琴
责任印制：徐晓晨 / 封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 7 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016 年 7 月第 二 版 印张：13
2016 年 9 月第六次印刷 字数：260 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　录

第6章

空间解析几何与向量代数

平面解析几何的知识对学习一元函数的微积分是必不可少的,而空间解析几何的知识对多元函数微积分的学习也是非常必要的.在平面解析几何中,用坐标法能把平面上的点与一对有次序的数对应起来,把平面上的图形与方程对应起来,从而能够用代数方法来研究几何问题.为研究多元函数的性质及其曲面的特征,本章介绍向量的概念及其运算,并依据向量的线性运算,建立空间坐标系,用坐标来研究和解决一些几何问题,为以下各章利用向量代数方法研究多元函数在微积分中的相关性质及空间曲面图形的特征打下基础.

6.1 向量及其线性运算

6.1.1 向量概念

我们把只有大小的量称为**数量**.现实生活中经常遇到这样的量,如时间、温度、长度等.把既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).客观世界中有许多量都可以表示成向量,例如位移、速度、加速度、力等.

向量概念中包含两个要素——大小和方向.而几何中的有向线段正好具备这两个要素,所以很自然的我们用有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 A 为起点,B 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$,如图 6-1 所示.为方便起见,除了用向量的始、终点字母标记向量外,有时也用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}$ 或者 $\vec{a},\vec{r},\vec{v},\vec{F}$ 等表示向量,用希腊字母 λ,μ,ν 等表示数量.

由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,因此一般都研究与起点无关的向量.把与起点无关的向量称为**自由向量**(以后都简称为向量).

例如向量$\overrightarrow{AB}$的起点终点是明确的,因此不是自由向量,而向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}$ 是与起点无关,所以都是自由向量.

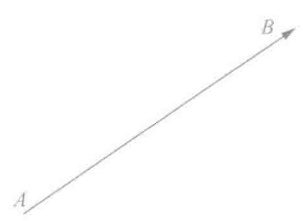

图 6-1 有向线段$\overrightarrow{AB}$

向量$\overrightarrow{AB}$的大小,即有向线段的长度,称为**向量的模**,记作$|\overrightarrow{AB}|$.模等于 1 的向量称为**单位向量**.

模等于零的向量称为**零向量**.零向量的方向可以看作是任意的.

两个向量方向相同是指将它们平行移动到同一起点,它们在一条直线上,这时两个终点分布在起点的同一侧;反之,若两个终点分布在起点的两侧,则称**两个向量方向相反**.

若两个向量的大小相等，方向相同，则就称为**相等的向量**. 因此向量的起点可以任意选取，或者说，向量可以自由的平行移动.

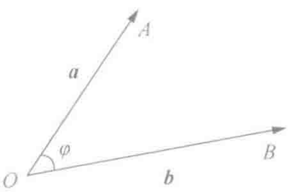

图 6-2

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，任取空间一点 O，作 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 6-2)，设 $\varphi=\angle AOB(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，并记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，即 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

如果 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，如果 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

零向量可以认为是与任何一个向量都是平行，也可以认为是与任何一个向量都是垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上，因此，两向量平行又称两向量共线.

6.1.2 向量的线性运算

6.1.2.1 向量的加减法

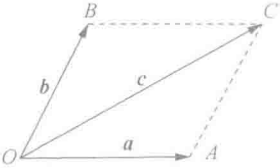

图 6-3

定义 1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 为边作一平行四边形 $OACB$，取对角线向量 $\overrightarrow{OC}$(图 6-3)，记 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，则称 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **的和**，并记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种用平行四边形的对角线向量来规定两个向量之和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

如果向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{O'B}$ 在同一直线上，那么，规定它们的和是这样一个向量：若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{O'B}$ 的指向相同时，其和向量的方向与原来两向量方向相同，其模等于两向量的模之和(图 6-4).

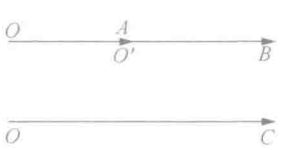

图 6-4

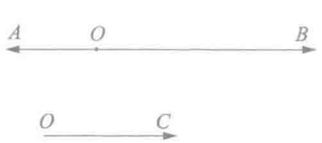

图 6-5

若向量 $\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OB}$ 的方向相反时，其和向量的模等于两向量模之差的绝对值，方向与模值大的向量方向一致(图 6-5).

作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，再以 A 为新的起点，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，连接 OB，那么向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ **的和**，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，见图 6-6. 该方法称为向量加法的**三角形法则**.

向量加法的三角形法则的实质是：将两向量的首尾相连，则一向量的首与另一向量的尾的连线就是两向量的和向量. 根据向量的加法定义，可以证明向量加法具有下列运算规律：

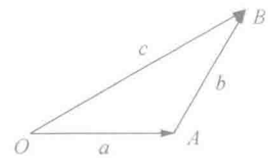

图 6-6

定理 1　向量的加法满足下面的运算律：

(1)交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2)结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

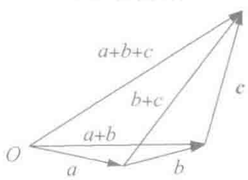

图 6-7

证　交换律的证明从向量的加法定义即可得证，结合律的证明从图 6-7 可得证.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$. 有了负向量，就可以定义向量的减法.

定义 2　把两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差，即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上得到的向量

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

称为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ **的减法**. 特别地

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

由三角形法则可看出：向量 $\boldsymbol{a}$ 减去向量 $\boldsymbol{b}$，只要把与 $\boldsymbol{b}$ 长度相同而方向相反的向量 $-\boldsymbol{b}$ 加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上去即可. 由平行四边形法则，易作出向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 6-8 所示.

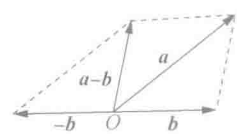

图 6-8

例 1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是互不共线的三向量，证明顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是它们的和是零向量.

证　必要性　设三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可以构成$\triangle ABC$，见图 6-9，即有

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c},$$

那么 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

充分性　设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，那么$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即$\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可以构成$\triangle ABC$.

例 2　用向量法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于 O 点且互相平分(图 6-10). 因此从图可看出：

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC},$$

所以$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$，且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

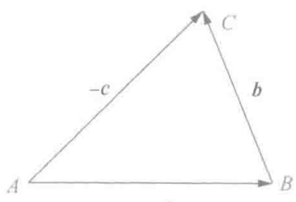

图 6-9

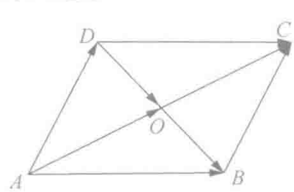

图 6-10

6.1.2.2 数量与向量的乘法

定义 3 设 λ 是一个数量，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积是一向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；且方向规定如下：当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda=0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

特别地，取 $\lambda=-1$，则向量 $(-1)\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，而方向相反，由负向量的定义知：$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

据向量与数量乘积的定义，可知数乘向量运算符合下列运算规律：

定理 2 数量与向量的乘法满足下面的运算律：

(1)结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2)分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

前面已经讲过，模等于 1 的向量称为**单位向量**. 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

由于 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 同方向，从而 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 亦同方向，而且 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 的模是

$$||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}|,$$

即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模也相同，所以

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

我们规定：当 $\lambda\neq0$ 时，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$. 于是上面的式子可以写成

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

这表示一个非零向量除以它的模，就可以得到一个与原向量同方向的单位向量.

定理 3 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

简言之，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\exists$ 唯一数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

图 6-11

定理 3 是建立数轴的理论依据. 我们知道，给定一个点、一个方向及单位长度，就可确定一个数轴. 而单位向量既确定了方向、又确定了单位长度，因此，给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox，如图 6-11 所示，对于数轴 Ox 上的任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，因 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，根据定理 3，必有唯一实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，且 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 所以有

$$\text{点 } P\leftrightarrow\text{向量 }\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow\text{实数 } x.$$

例 3 设 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，求证 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

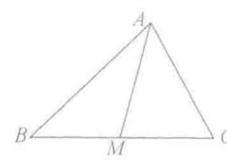

图 6-12

证 如图 6-12 所示，因为 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$，所以

$$2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}),$$

而 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，所以

$$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\mathbf{0},$$

因而 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，即

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

6.1.3　空间直角坐标系

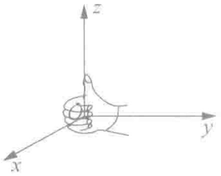

图 6-13

过空间任意一个点 O，作三条以 O 为原点、以相同长度作为度量单位、两两垂直的数轴，这三条数轴分别称为 **x 轴**（**横轴**）、**y 轴**（**纵轴**）、**z 轴**（**竖轴**）. 并且这三条数轴的方向成右手系，即右手并拢的四指指向 x 轴正向，沿逆时针方向弯曲 $90°$，四指指向 y 轴正向，此时大拇指所指的方向即为 z 轴的正向. 这样我们就建立了一个**空间直角坐标系**，称为 **$Oxyz$ 坐标系**，O 称为**坐标原点**，如图 6-13 所示.

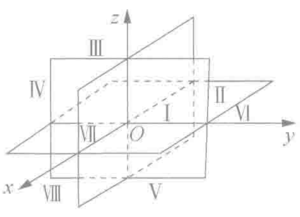

图 6-14

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，任意两条数轴确定的平面称为**坐标面**，如由 x 轴、y 轴确定 xOy 坐标面（简称 xOy 平面），同样有 yOz 坐标面（简称 yOz 平面），zOx 坐标面（简称 zOx 平面）. 这三个坐标面将空间分为八个部分，每个部分称为**卦限**，这八个部分分别称为第Ⅰ卦限，第Ⅱ卦限，…，第Ⅷ卦限，如图 6-14 所示.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中任取一点 M，过 M 点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三个平面与坐标轴的交点分别为 P,Q,R，如图 6-15所示. 设 P 点在 x 轴上的坐标为 x，Q 点在 y 轴上的坐标为 y，R 点在 z 轴上的坐标为 z，若不改变坐标的次序，就得到一个有序数组 (x,y,z)；反之，若给定一个有序数组 (x,y,z)，设在 x 轴上以 x 为坐标的点为 P，在 y 轴上以 y 为坐标的点为 Q，在 z 轴上以 z 为坐标的点为 R，过点 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，则这三个平面有唯一的一个交点，设交点为 M，这样一个有序数组 (x,y,z) 就唯一地确定了空间中的一个点 M. 因此在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，若点 M 与一组有序数组 (x,y,z) 一一对应，则把有序数组 (x,y,z) 就称为点 M 的**坐标**，可记为 $M(x,y,z)$，且 x 称为**横坐标**（或 x 坐标），y 称为**纵坐标**（或 y 坐标），z 称为**竖坐标**（或 z 坐标）.

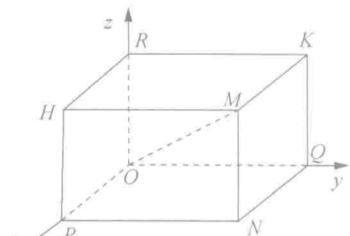

图 6-15

显然，空间直角坐标系 $Oxyz$ 的原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，xOy 坐标面上任一点的竖坐标为 0，yOz 坐标面上任一点的横坐标为 0，zOx 坐标面上任一点的纵坐标为 0.

若连接空间中的两点 P_1,P_2 的线段 P_1P_2 垂直于 xOy 平面，且点 P_1 与 P_2 被 xOy 平面平分，则称 P_1 点与 P_2 点关于 **xOy 平面对称**. 因此与点 $P(x,y,z)$ 关于 xOy 平面对称的点的坐标为 $(x,y,-z)$；与点 $P(x,y,z)$ 关于 yOz 平面对称的点的坐标为 $(-x,$

$y,z)$；与点 $P(x,y,z)$ 关于 zOx 平面对称的点的坐标为 $(x,-y,z)$.

若连接空间中的两点 P_1,P_2 的线段 P_1P_2 与 z 轴垂直相交，且被 z 轴平分，则称 P_1 点与 P_2 点**关于 z 轴对称**. 可知，与点 $P(x,y,z)$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(x,-y,-z)$；与点 $P(x,y,z)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-x,y,-z)$；与点 $P(x,y,z)$ 关于 z 轴对称的点的坐标为 $(-x,-y,z)$.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，与 x 轴、y 轴、z 轴正向同向的单位向量称为**基本单位向量**，分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$. 设图 6-15 中 M 的坐标为 (x,y,z)，由上述确定点的坐标的方法可知

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

又由向量的加法可得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

这个式子称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的三个坐标方向的**分向量**，向量 $\overrightarrow{OM}$ 也称为**向径**，x,y,z 称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式为 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

例 4 在图 6-15 中，自点 $M(x,y,z)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

解 自 $M(x,y,z)$ 分别作 xOy,yOz,zOx 面的垂线，则垂足分别为 N,K,H，则其坐标为 $N(x,y,0),K(0,y,z),H(x,0,z)$. 自 $M(x,y,z)$ 分别作 x 轴，y 轴，z 轴的垂线，垂足分别为 P,Q,R，则 $P(x,0,0),Q(0,y,0),R(0,0,z)$.

6.1.4 利用坐标作向量的线性运算

6.1.4.1 向量的坐标

设空间点 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

于是向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 关于基本单位向量的分解式为

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 称为向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的**坐标**.

向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标表达式为 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，即向量的坐标等于终点坐标减去相应的起点坐标.

6.1.4.2 坐标表示下的向量运算

定理 4 设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=(x_2,y_2,z_2)$，$\lambda$ 为实数，则有

(1) $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$；

(2) $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$；

(3) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2,z_1=z_2$；

(4) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

下面只给出(4)的证明.

证　当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时显然成立.

当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=\lambda x_2\boldsymbol{i}+\lambda y_2\boldsymbol{j}+\lambda z_2\boldsymbol{k}$

$$\Leftrightarrow x_1=\lambda x_2,y_1=\lambda y_2,z_1=\lambda z_2\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

【注】　在最后一个等式中，当 x_2,y_2,z_2 中有一个为零时，如当 $x_2=0,y_2\neq0,z_2\neq0$ 时等式应理解为$\begin{cases}x_1=0,\\ \frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2};\end{cases}$当 x_2,y_2,z_2 中有两个为零时，如当 $x_2=y_2=0,z_2\neq0$ 时，等式应理解为$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0.\end{cases}$

例 5　设两力 $F_1=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$，$F_2=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 都作用于点 $M(1,-2,3)$ 处，且点 $N(s,t,19)$ 在合力的作用线上，试求 s,t 的值.

解　合力为

$$F_1+F_2=(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})+(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=(4,7,8),$$

$$\overrightarrow{MN}=(s-1,t+2,19-3)=(s-1,t+2,16),$$

点 M,N 都在合力的作用线上，即$\overrightarrow{MN}$与 F_1+F_2 平行，由两非零向量平行的充要条件可得

$$\frac{s-1}{4}=\frac{t+2}{7}=\frac{16}{8},$$

计算得 $s=9,t=12$.

6.1.5　向量的模、方向角、投影

6.1.5.1　向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，现将其起点平移到原点，终点为 M，如图 6-15 所示，则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z),$$

因此

$$|\boldsymbol{a}|^2=|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{ON}|^2+|\overrightarrow{NM}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2=x^2+y^2+z^2,$$

则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，即向量的模完全由其坐标决定.

由此可得空间中两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离 $|P_1P_2|$ 的公式为

$$|P_1P_2|=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 6　设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,5,-3)$，试求

(1) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;

(2) 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 平行的单位向量.

解　(1) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2\times1-2,2\times2-5,2\times(-1)-(-3))=(0,-1,1)$;

(2) $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 平行的单位向量为

$$\pm\frac{2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)=\left(0,\mp\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

即为 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 与 $\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

例 7 求证以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 8 设点 P 在 x 轴上，它到 $P_1\left(0,\sqrt{2},3\right)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解 设 P 点坐标为 $(x,0,0)$，根据题意有

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},$$
$$|PP_2|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2},$$
$$|PP_1|=2|PP_2|,$$

即

$$\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2},$$

解得 $x=\pm1$，所以所求点 P 的坐标为 $(1,0,0)$ 或 $(-1,0,0)$.

6.1.5.2 方向余弦

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的定义见图 6-2. 类似地，可以定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴正向之间的夹角.

非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$ 分别与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**(图 6-16).

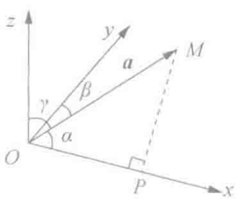

图 6-16

从图 6-16 可知，对于给定的一个非零向量 $\boldsymbol{a}$，它的方向可由其方向角来确定. 设 $\boldsymbol{a}=\left(x,y,z\right)$，由于 x 是有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值，$MP\perp OP$，故

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

因此有

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}\right)$$
$$=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(x,y,z)=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_a.$$

把 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 上式表明以 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$. 由此可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 9　已知两点 $P\left(2,\sqrt{2},2\right)$,$Q(1,0,3)$,计算向量$\overrightarrow{PQ}$的模、方向余弦及方向角.

解　$\overrightarrow{PQ}=\left(1-2,0-\sqrt{2},3-2\right)=\left(-1,-\sqrt{2},1\right)$,$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$,

$$\cos\alpha=\frac{-1}{2},\cos\beta=\frac{-\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2},$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}.$$

例 10　设向量的方向余弦分别满足

(1)$\cos\alpha=0$;

(2)$\cos\beta=1$;

(3)$\cos\alpha=0,\cos\beta=0$. 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解　(1)$\cos\alpha=0$,该向量与 x 轴的夹角为$\frac{\pi}{2}$,即与 x 轴垂直,平行于 yOz 平面;

(2)$\cos\beta=1$,该向量与 y 轴的夹角为 0,即与 y 轴平行,且方向与 y 轴正向一致,垂直于 xOz 平面;

(3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$,该向量与 x 轴的夹角为$\frac{\pi}{2}$,与 y 轴的夹角为$\frac{\pi}{2}$,即平行于 z 轴,垂直于 xOy 平面.

6.1.5.3　向量在轴上的投影

设有一轴 $\boldsymbol{u}$,$\overrightarrow{OP}$是轴 $\boldsymbol{u}$ 上的有向线段,如果数 λ 满足 $|\lambda|=|\overrightarrow{OP}|$,且当$\overrightarrow{OP}$与轴 $\boldsymbol{u}$ 同向时,λ 取正值;当$\overrightarrow{OP}$与轴 $\boldsymbol{u}$ 反向时,λ 取负值;那么数 λ 称为轴 $\boldsymbol{u}$ 上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值. 设 $\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{u}$ 轴同方向的单位向量,则$\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{e}$.

通过空间点 A 作轴 $\boldsymbol{u}$ 的垂直平面,如图 6-17 所示,该平面与轴 $\boldsymbol{u}$ 的交点 A'称为点 A 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的**投影**.

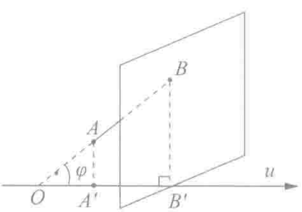

图 6-17

如果有一已知向量$\overrightarrow{AB}$,如图 6-17 所示,其起点 A 和终点 B 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影分别为点 A'和 B',那么轴 $\boldsymbol{u}$ 上的有向线段的值 $A'B'$称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的**投影**,记做 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$.

向量的投影具有以下性质：

性质 1 向量在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

性质 2 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影的和，即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}_2.$$

性质 3 向量与数的乘法在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘法，即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}.$$

习 题 6-1

1. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下，求点 $P(2,-3,1)$ 关于

(1)坐标平面；(2)坐标轴；(3)坐标原点的各对称点的坐标.

2. 在平行六面体 $ABCD$-$EFGH$ 中，令 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BH},\overrightarrow{CE},\overrightarrow{DF}$.

3. 要使下列各式成立，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 应满足什么条件？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$； (2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；

(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$； (4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(5) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

4. 已知平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 的中点分别为 K 和 L. 设 $\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{l}$，求 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$.

5. 设向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$. 证明 A,B,D 三点共线.

6. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$. 证明四边形 $ABCD$ 为梯形.

7. 设 L,M,N 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 AB,BC,CA 的中点，证明：三中线向量 $\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形.

8. 设 L,M,N 分别是 $\triangle ABC$ 的三边的中点，O 是任意一点，证明 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

9. 用向量法证明：平行四边形的对角线互相平分.

10. 设点 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心，O 是任意一点，证明 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}$.

6.2 数量积 向量积 *混合积

在 6.1 节中明确了向量的概念以后，在解决实际问题时还需要定义向量间的运算规则，如向量间的加减法和数量与向量的乘法一样，这一节中要继续介绍向量间的运算规则.

6.2.1　两向量的数量积

设一物体受到一常力 $\boldsymbol{F}$ 作用沿直线由 A 点运动到 B 点，由物理学知识知道，力 $\boldsymbol{F}$ 在这一段时间内所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{AB}$所夹的角，见图 6-18.

这种由两个向量运算以后得到一个数的式子在解决实际问题中经常遇到.

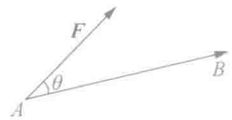

图 6-18

定义 1　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（也称**内积**、**点积**）等于这两个向量的模与它们的夹角余弦的乘积，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

其中 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

【注】　两向量数量积运算的结果为一个数，数量积运算符号不能省略.

根据这个定义，上述力 F 所做的功为：$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$

由数量积的定义可以推得：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，这个等式表明，由向量数量积可计算一个向量的模；

(2) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量时，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}$，这个等式表明，由向量数量积可计算两个向量的夹角. 若规定零向量与任何向量都垂直，则有两个向量垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积符合如下运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) 结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$（其中 λ 为常数）.

例 1　已知 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为三个相互垂直的基本单位向量，试证

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1;$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0.$$

证　因为 $|\boldsymbol{i}|=1,|\boldsymbol{j}|=1,|\boldsymbol{k}|=1$，所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|\,|\boldsymbol{i}|\cos0=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{j}|\,|\boldsymbol{j}|\cos0=1,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{k}|\cos0=1;$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{i}|\,|\boldsymbol{k}|\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{i}|\,|\boldsymbol{k}|\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{j}|\,|\boldsymbol{k}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

例 2　已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\&=2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}-3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+5\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=2-9-10=-17.\end{aligned}$$

下面来推导向量数量积的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\\&\quad a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,\end{aligned}$$

因此两个向量的数量积等于这两个向量对应坐标乘积之和.

由向量的模与向量的夹角和向量数量积的关系,有

(1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;

(2) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$;

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

例 3 已知点 $M(1,1,1)$, $A(1,2,2)$, $B(2,1,2)$,求 $\angle AMB$.

解 $\angle AMB$ 是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角,因为

$$\overrightarrow{MA}=(1-1,2-1,2-1)=(0,1,1),\quad |\overrightarrow{MA}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{MB}=(2-1,1-1,2-1)=(1,0,1),\quad |\overrightarrow{MB}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\times1+1\times0+1\times1=1.$$

所以 $\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}|\,|\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$,即可得 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$.

6.2.2 两向量的向量积

设 O 为一杠杆 L 的支点,力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处,力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ,求力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩,如图 6-19 所示. 根据力学知识,力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$, $|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}|\,|\boldsymbol{F}|\sin\theta$, $\boldsymbol{M}$ 的方向按以下方法确定:伸出右手,让右手四指指向 $\overrightarrow{OP}$ 的方向,当四指以不超过 π 的角度转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时,大拇指所指的方向就是 $\boldsymbol{M}$ 的方向.(在四指转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时,大拇指始终与四指垂直). 在解决实际问题时,经常遇到与上述同样的情况,于是从中抽象出两个向量的向量积概念.

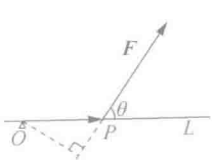

图 6-19

定义 2 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,若向量 $\boldsymbol{c}$ 由以下方式确定:

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向同时垂直 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 符合右手螺旋法则.

则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(也称**外积**、**叉积**),记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

定义中所谓右手螺旋法则是伸出右手,让右手四指指向向量 $\boldsymbol{a}$,当四指以不超过 π 的角度转向 $\boldsymbol{b}$ 时(在此过程中,大拇指始终与四指垂直),大拇指所指的方向即为 $\boldsymbol{c}$ 的方向. 因此,上例的力矩表示为 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

由向量积的定义可得以下结论:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.