运筹学教程

——方法与模型——

傅家良

西南交通大学出版社

运 筹 学 教 程

——方法与模型——

傅家良 编著

西南交通大学出版社

（川）新登字 018 号

内 容 简 介

本书介绍了运筹学中线性规划、整数规划、网络规划、网络计划技术、动态规划、排队论和排序问题等分支的基本概念和方法，并把各种运筹学求解方法归纳成接近于程序语言的算法步骤。本书特别重视各个运筹学分支对数学模型的建立，配备了较多的应用例题，使读者充分理解建立数学模型是一种艺术。本书力求深入浅出，注重应用。每章结尾都配有一定数量的习题，部分习题还附有答案。

本书可作为大专院校管理类、财经类各有关专业的教材或教学参考书，也可作为各类专业人员的自学参考书。

运筹学教程
傅家良　编著
*
西南交通大学出版社出版发行
（成都　九里堤）
新华书店经销
成都飞机工业公司印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/16　印张：26.75
字数：667 千字　印数：1—2500 册
1994 年 8 月第 1 版　1994 年 8 月第 1 版次印刷
ISBN 7—81022—699—1/O · 061
定价：18.80 元

前　言

管理是一门科学。运筹学用定量化的方法，对所研究的各类管理优化问题建立数学模型并进行求解，然后进行定量和定性分析，为决策者作出合理的决策提供科学的依据。

本书对运筹学各个组成分支都尽可能地以各种实际问题为背景，建立起各种类型的数学模型，然后通过对几何特征的分析或运用其它直观的手段，给出求解模型的算法思想，进而导出归纳成接近于程序语言的算法。本书配备了一定数量的富有建模技巧的典型应用实例，以培养读者建立数学模型的能力，并使读者深刻地理解用数学语言描述客观事物是一种“艺术”。

本书从读者认识事物、接受知识的规律出发，尽可能使各章内容深入浅出、重点突出，力求使读者感到运筹学是一门可亲可近而生动的应用性学科。本书对运筹学各个分支的基本概念、基本理论的系统性仍给予足够的重视，但又不偏于数学方法的严谨论证。本书可以作为大专院校管理、经济等有关专业的教材，同时，编者也深盼本书能受到那些孜孜不倦、刻苦追求知识的自学者的欢迎。

在本书的编写过程中，得到了复旦大学统计运筹系魏国华教授的热情帮助，西南交通大学的朱松年教授也提出了宝贵的意见，本人在此向他们表示诚挚的谢意。对那些在我追求知识的道路上曾给我以深切关怀和无私帮助的老师和朋友，本人表示衷心的感谢。

由于本人水平有限，本书难免有不当之处，敬请读者批评指正。

傅家良 1993 年 9 月
于上海铁道学院运输管理系

目 录

第一章 线性规划

§1.1 线性规划模型 …… 1
1.1.1 数学模型 …… 1
1.1.2 标准型线性规划 …… 4
§1.2 线性规划的几何特征 …… 6
1.2.1 两个变量的线性规划的图解法 …… 6
1.2.2 标准型线性规划的几何特征 …… 9
§1.3 基本可行解 …… 11
§1.4 单纯形法 …… 14
1.4.1 单纯形表和最优性条件 …… 15
1.4.2 转轴 …… 16
1.4.3 单纯形法 …… 20
1.4.4 关于最优解唯一性的讨论 …… 22
§1.5 单纯形表的矩阵描述 …… 25
§1.6 改进单纯形法 …… 27
§1.7 大 M 法和两阶段法 …… 31
1.7.1 大 M 法 …… 31
1.7.2 两阶段法 …… 36
§1.8 退化情况与 Bland 法则 …… 42
§1.9 线性规划的应用举例 …… 47
习题一 …… 58

第二章 线性规划的对偶理论与灵敏度分析

§2.1 对偶问题 …… 66
§2.2 对偶理论 …… 71
§2.3 对偶单纯形法 …… 75
§2.4 对偶问题的最优解 …… 78

§2.5 灵敏度分析 …… 82
2.5.1 参数 C_S 的灵敏度分析 …… 83
2.5.2 参数 b_S 的灵敏度分析 …… 86
2.5.3 变量 x_S 的系数列向量 $A._S$ 的变化 …… 89
2.5.4 增加新的约束条件 …… 92
2.5.5 增加新的变量 …… 94
§2.6 影子价格 …… 95
习题二 …… 98

第三章 运输问题

§3.1 运输问题的数学模型 …… 104
§3.2 表上作业法 …… 108
3.2.1 初始基本可行解的寻求 …… 108
3.2.1.1 西北角法 …… 108
3.2.1.2 最小元素法 …… 110
3.2.2 位势法 …… 113
§3.3 应用举例 …… 118
习题三 …… 125

第四章 整数规划

§4.1 整数规划模型 …… 128
§4.2 纯整数规划的割平面法 …… 142
4.2.1 割平面法的几何特征 …… 142
4.2.2 柯莫利割 …… 143
4.2.3 柯莫利割平面法 …… 146
§4.3 混合整数规划的割平面法 …… 149
§4.4 分支定界法 …… 153
4.4.1 0—1 背包问题 …… 153
4.4.2 分支定界法 …… 159
§4.5* 0—1 规划的分支定界法 …… 167
4.5.1 划分和定界 …… 167
4.5.2 分支定界算法 …… 174
§4.6* 有界技术在(*AIP*)分支定界法中的应用 …… 178
4.6.1 增广单纯形表 …… 178

4.6.2 有界变量的对偶单纯形法 …… 182
4.6.3 有界技术在(AIP)分支定界法中的应用 …… 184
习题四 …… 187

第五章 网络规划

§5.1 图的基本概念 …… 192
5.1.1 无向图 …… 193
5.1.2 有向图 …… 195
5.1.3 图的矩阵表示 …… 197
5.1.4 树 …… 198
§5.2 最短路径问题 …… 199
5.2.1 Dijkstra 算法 …… 200
5.2.2* Floyd 算法 …… 203
5.2.3 应用举例 …… 207
§5.3 最长路径问题 …… 212
5.3.1 最长路径算法 …… 212
5.3.2 应用举例 …… 216
§5.4* 第 k 短路径问题 …… 220
§5.5 最小生成树 …… 223
5.5.1 破回路法 …… 224
5.5.2 Kruskal 算法 …… 224
§5.6* 中国邮路问题 …… 227
5.6.1 欧拉环游问题 …… 227
5.6.2 中国邮路问题 …… 230
§5.7 运输网络 …… 233
5.7.1 运输网络与流 …… 233
5.7.2 割、最小割和最大流 …… 236
§5.8 最大流 …… 239
5.8.1 增流链 …… 239
5.8.2 最大流算法 …… 240
5.8.3 应用举例 …… 245
§5.9* 有界容量运输网络及最大流 …… 250
§5.10 最小代价流问题 …… 253
5.10.1 伴随 f 的增流网络 …… 254
5.10.2 最小代价流算法 …… 257

5.10.3 应用举例······259
习题五······266

第六章 网络计划技术

§6.1 工程网络图······270
6.1.1 *PERT* 网络······270
6.1.2 网络图的时间参数和关键路径······273
§6.2* 网络计划的优化问题······276
6.2.1 总工期—成本优化问题······277
6.2.1.1 指定总工期的成本优化问题······278
6.2.1.2 最低成本的最优总工期问题······290
6.2.2 总工期—资源的优化问题······291
§6.3 非肯定型 PERT 网络······297
习题六······299

第七章 动态规划

§7.1 引例······302
§7.2 动态规划模型和求解方法······305
§7.3 动态规划应用举例······310
习题七······331

第八章 排队论

§8.1 泊松过程、生灭过程和负指数分布······335
8.1.1 泊松过程······335
8.1.2 生灭过程······339
8.1.3 负指数分布······341
8.1.4 爱尔朗分布······342
§8.2 一般排队系统结构······343
8.2.1 输入过程······343
8.2.2 服务机构······344
8.2.3 排队规则······345
8.2.4 排队模型的符号表示······345
8.2.5 排队模型的数量指标和基本公式······346
§8.3 泊松输入、负指数分布服务的排队模型······348

8.3.1 $M/M/S$ 排队模型 …… 348
8.3.2 $M/M/1$ 排队模型 …… 353
8.3.3 $M/M/\infty$ 排队模型 …… 359
8.3.4 $M/M/S/k$ 排队模型 …… 360
8.3.5 $M/M/S/m/m$ 排队模型 …… 364
§8.4 一般服务分布 $M/G/1$ 排队模型 …… 367
8.4.1 $M/G/1$ 排队模型 …… 367
8.4.2 $M/D/1$ 排队模型 …… 368
8.4.3 $M/E_k/1$ 排队模型 …… 369
习题八 …… 370

第九章 最优分配问题

§9.1 匈牙利方法 …… 372
9.1.1 匈牙利方法 …… 372
9.1.2 最多独立零的选择与最少覆盖线的寻找 …… 375
9.1.3 最大流算法在最优分配问题中的应用 …… 379
§9.2* 分支定界法 …… 381
§9.3 应用举例 …… 385
习题九 …… 389

第十章 排序问题

§10.1 车间生产计划排序问题 …… 391
10.1.1 一台机器和 n 个工件的排序问题 …… 391
10.1.2 两台机器和 n 个工件的排序问题 …… 394
10.1.3 三台机器和 n 个工件的排序问题 …… 397
§10.2 旅行售货员问题 …… 404
10.2.1 旅行售货员问题 …… 404
10.2.2 分支定界法 …… 407
习题十 …… 412

附录

部分习题答案或提示 …… 415

第一章 线性规划

§1.1 线性规划模型

1.1.1 数学模型

在经济建设、企业管理和生产实践的各项活动中，我们常常面临把有限的资源分配到若干活动上去的分配问题：

1. 对有限的资金、材料、设备、场地、能源和劳动力等财力、物力和人力，如何以最佳方式作有效的分配，以期望获得最大的效益；

2. 在既定的任务之下，如何统筹安排，以做到用最少量的财力、物力和人力来完成任务。

这些最优分配问题的数学模型在运筹学中处于中心的地位，而线性规划是解决这一类问题的一个理论和方法都比较成熟的运筹学分支。下面我们来看两个实例。

例 1—1 （生产计划问题）某工厂生产 1#、2# 和 3# 三种产品，每种产品需经过三道工序。每件产品在每道工序中的工时定额、每道工序在每周可利用的有效工时和每件产品的利润由下表给出。问每种产品各生产多少，可使这一周内生产的产品所获利润最大？

定额（工时/件）		$j^{\#}$产品			每周可利用的有效工时
		1#	2#	3#	
工序	A	1.2	1.0	1.1	5400
	B	0.7	0.9	0.6	2800
	C	0.9	0.8	1.0	3600
利润（元/件）		10	15	12	

解 本问题是要把有限的工时资源合理地分配到三种产品的生产活动上去，以期望获得最多的利润。

首先我们引进决策变量：

设一周内 $j^{\#}$ 产品的生产件数为 $x_j(j=1, 2, 3)$。

然后，根据每件产品的工时定额以及各工序允许的有效工时列出约束条件：

1# 产品每生产一件需 A 工序 1.2 工时，现生产 x_1 件，故 1# 产品耗费 A 工序的工时数为 $1.2x_1$。类似地，生产 2# 和 3# 产品耗费 A 工序的工时数分别为 $1.0x_2$ 和 $1.1x_3$，所以三种产品对 A 工序的工时总需求量为

$$1.2x_1+1.0x_2+1.1x_3,$$

它不应超过 A 工序在一周内所允许的工作时间 5400 工时。于是，得工序 A 加工产品的约束条件：

$$1.2x_1+1.0x_2+1.1x_3\leqslant 5400。$$

类似地，对工序 B 和 C 有以下约束条件：

$$0.7x_1+0.9x_2+0.6x_3\leqslant 2800,$$

$$0.9x_1+0.8x_2+1.0x_3\leqslant 3600。$$

再者，变量 x_1、x_2 和 x_3 只能取非负值，故有下列非负约束条件：

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0$$

最后，我们来确定产品生产的效益：

若用 f 表示工厂一周内生产三种产品所能获得的利润，则有

$$f=10x_1+15x_2+12x_3,$$

现在工厂的目标是希望获得最大利润，我们写成：

$$\max f=10x_1+15x_2+12x_3。$$

综上所述，我们得本问题的数学模型：

$$\begin{aligned}&\max f=10x_1+15x_2+12x_3\\ \text{s.t.}\quad &1.2x_1+1.0x_2+1.1x_3\leqslant 5400,\\ &0.7x_1+0.9x_2+0.6x_3\leqslant 2800,\\ &0.9x_1+0.8x_2+1.0x_3\leqslant 3600,\\ &x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3。\end{aligned}$$

其中，s. t. 为英文“subject to”（受约束于）的缩写。

例1—2 （运输问题）两个发点 A_1 和 A_2 有物资必须运往3个收点 B_1、B_2 和 B_3。发点 A_i 对物资的供应量 a_i、收点 B_j 对物资的需求情况和发点 A_i 至收点 B_j 每输送一吨物资所需的运输费用 C_{ij} 见下表。为完成发点 A_1 和 A_2 对物资的运输任务，问运输方案应如何确定，而使总运费最少？

运价 C_{ij}(元/吨)		收点 B_j			供应量 a_i(吨)
		B_1	B_2	B_3	
发点 A_i	A_1	20	10	30	60
	A_2	15	20	18	40
需求量 b_j(吨)		恰为20	至多30	至少40	

解　本问题是在完成既定运输任务的条件下而希求化费最少的财力。

设 x_{ij} 为从发点 A_i 运送到收点 B_j 的物资数量。

由于发点 A_i 的 a_i 吨物资必须运走，因此，a_i 等于发点 A_i 运往各收点 B_j 的运量 x_{ij} 之和。由此得约束条件：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=60,$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=40。$$

注意到各收点 B_j 对物资的需求情况，我们有下列约束条件：

$$x_{11}+x_{21}=20,$$
$$x_{12}+x_{22}\leqslant 30,$$
$$x_{13}+x_{23}\geqslant 40。$$

自然，运量 x_{ij} 都应为非负变量：

$$x_{ij}\geqslant 0, \quad i=1,2; \quad j=1,2,3。$$

总运费为：

$$f=20x_{11}+10x_{12}+30x_{13}+15x_{21}+20x_{22}+18x_{23},$$

我们对 f 求最小值。故本问题归结为如下数学模型：

$$\min f=20x_{11}+10x_{12}+30x_{13}+15x_{21}+20x_{22}+18x_{23},$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} & x_{11}+x_{12}+x_{13}=60,\\ & x_{21}+x_{22}+x_{23}=40,\\ & x_{11}+x_{21}=20,\\ & x_{12}+x_{22}\leqslant 30,\\ & x_{13}+x_{23}\geqslant 40,\\ & x_{ij}\geqslant 0, \quad i=1,2; \quad j=1,2,3。\end{aligned}$$

上述建立的两个数学模型，我们称之为**线性规划**。可见，线性规划模型具有下列三个要素：

(1) **决策变量** 这些决策变量的一组定值代表所给问题的一个具体方案。一般来说，这些决策变量都是非负变量。如果在模型中变量 x_j 的符号不受限制，即变量 x_j 取正值，取负值或取零都可以，我们把它写成条件 $x_j\gtreqless 0$，并称 x_j 为**自由变量**。

(2) **约束条件** 这些约束条件都为线性等式或线性不等式，它们反映了所给问题对资源的客观限止及对所要完成的任务的各类要求。同时，对决策变量的符号要求也属于约束条件。

(3) **目标函数** 它为决策变量的线性函数。按所给问题的不同，可要求目标函数 f 实现最大值或最小值。

为此，线性规划模型的一般形式为：

$$\min f=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j \qquad (\text{或} \max \quad f=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j)$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \gtreqless bi, \quad i=1,\cdots,m, \tag{1—1}$$
$$x_j\gtreqless 0, \quad j=1,\cdots,n。$$

其中符号 $\gtreqless$ 表示 $\geqslant$，$=$，$\leqslant$ 三个符号中的任意一个。

我们给出线性规划的有关术语：

可行解——满足线性规划全部约束条件的解 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 称为线性规划的可行解。

可行域——全体可行解的集合称为线性规划的可行域。用符号 $\boldsymbol{K}$ 表示。

最优解——使目标函数实现最小值（或最大值）的可行解 $X^*=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 称为线性规划的最优解。

最优值——最优解的目标函数值

$$f^*=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j$$

称为线性规划的最优值。

1.1.2 标准型线性规划

由于求解数学模型的算法都是为标准化的模型设计的，所以，为了便于对求解线性规划模型建立一个有效的算法，我们有必要对线性规划模型规定它的标准形式。今后，我们谈到的线性规划模型的标准型，都是指下列形式：

$$
\begin{aligned}
&\min f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\
\text{s.t.}\quad &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \cdots, m, \\
&x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \cdots, n_{\circ}
\end{aligned}
\tag{1—2}
$$

也就是说，线性规划的标准型，是指：对目标函数一律求最小值；决策变量一律为非负变量；约束条件除变量的非负条件外一律为等式约束。今后，记线性规划模型的标准型为（LP）。

若令

$$
C=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},
$$

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_{\cdot j}=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},
$$

则(LP)便可写成下列形式：

$$
\begin{aligned}
&\min f=C^T X, \\
\text{s.t.}\quad &AX=b, \\
&X\geqslant 0_{\circ}
\end{aligned}
\tag{1—3}
$$

或

$$
\min\{C^T X \mid AX=b,\ X\geqslant 0\}_{\circ} \tag{1—4}
$$

对于(LP)，其可行域 K 我们常写成：

$$
K=\{X \mid AX=b,\ X\geqslant 0\} \tag{1—5}
$$

各种形式的线性规划模型都可以化成标准型：

(1) 若线性规划为：

$$
\begin{aligned}
&\max z=C^T X \\
\text{s.t.}\quad &AX=b, \\
&X\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

这时，只需要将求目标函数的最大值变换为求另一个目标函数的最小值：

$$
\max z=-\min(-z),
$$

令 $f=-z$，于是，得到(LP)：

$$
\min f=(-C)^T X,
$$

$$\text{s.t.}\quad AX=b,$$
$$X\geqslant 0。$$

（LP）与原有问题具有同样的可行域和最优解（若存在），只是最优值（若存在）相差一个符号而已。求解原有问题转化成求解（LP）。

（2）约束条件为不等式。

如果线性规划具有不等式约束

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,$$

这时我们可引进一个新变量 x'，用下面两个约束条件代替这个不等式约束：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x' = b_i,\\ x' \geqslant 0。\end{cases}$$

我们称 x' 为**松弛变量**。

如果线性规划具有不等式约束

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i,$$

这时我们引进一个新变量 x''，并用下面两个约束条件代替这个不等式约束：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x'' = b_i,\\ x'' \geqslant 0\end{cases}$$

我们称 x''为**剩余变量**。

有时，x'和 x''统称为松弛变量，它们在目标函数中的系数都为零。

（3）决策变量 x_j 为自由变量：$x_j \gtreqless 0$。

引进两个新的非负变量 x'和 x''，

令

$$x_j = x' - x'',$$

将其代入约束条件和目标函数中，消去 x_j，同时，在约束条件中加入约束 $x'\geqslant 0$和 $x''\geqslant 0$。由于可能发生 $x'>x''$，或 $x'=x''$，或 $x'<x''$，故 $x_j \gtreqless 0$。

（4）约束条件中出现 $x_j\leqslant 0$。

引进新的非负变量 x'_j，令 $x_j=-x'_j$，代入约束条件和目标函数中消去 x_j。这样，$x_j\leqslant 0$化成 $x'_j\geqslant 0$。

（5）约束条件中出现 $x_j\geqslant h_j(h_j\neq 0)$。

引进新的非负变量 x'_j，令

$$x_j = x'_j + h_j,$$

将它代入目标函数和约束条件中消去 x_j。这样，$x_j\geqslant h_j$ 转化成 $x'_j+h_j\geqslant h_j$，即为 $x'_j\geqslant 0$。

例1—3 将下列线性规划问题化成标准型：

$$\max z = -2x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_1+3x_2-2x_3\leqslant 20,\\
& 2x_1-x_2+3x_3\geqslant 12,\\
& 3x_1-4x_2+2x_3\geqslant 2,\\
& x_1\geqslant 0,\quad x_2\leqslant 0,\quad x_3\gtreqless 0。
\end{aligned}
$$

解 它共有四处不符合标准型要求：对目标函数 z 是求最大值；$x_2\leqslant 0$；x_3为自由变量；第一、第二、第三个约束条件为不等式。为此，我们通过以下步骤把该模型标准化：

(1) 令 $f=-z$，把求 $\max z$ 改变为求 $\min f$；

(2) 用 $-x_4$替换 x_2，x_4为非负变量；

(3) 用 x_5-x_6替换 x_3，其中 $x_5\geqslant 0$，$x_6\geqslant 0$。

(4) 对不等式约束分别引进松弛变量 x_7和剩余变量 x_8、x_9。

于是，得本问题的标准型：

$$
\begin{aligned}
& \min f=2x_1+x_4+3x_5-3x_6\\
\text{s.t.}\quad & x_1-3x_4-2x_5+2x_6+x_7=20,\\
& 2x_1+x_4+3x_5-3x_6-x_8=12,\\
& 3x_1+4x_4+2x_5-2x_6-x_9=2,\\
& x_j\geqslant 0,\quad j=1,4,\cdots,9。
\end{aligned}
$$

我们称下列形式的线性规划为典则型：

$$
\begin{aligned}
& \min f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i,\quad i=1,\cdots,m,\\
& x_j\geqslant 0,\quad j=1,\cdots,n。
\end{aligned}
\tag{1—6}
$$

因为等式约束$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$ 等价于

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i,\\
& \sum_{j=1}^{n}(-a_{ij})x_j\geqslant -b_i,
\end{aligned}
$$

所以，线性规划的标准型可化成典则型。换言之，各种形式的线性规划问题都可以化成典则型。

§1.2 线性规划的几何特征

1.2.1 两个变量的线性规划的图解法

让我们先来讨论两个变量的线性规划问题的可行域 K 及最优解的几何特征，对其最优解可能出现的各类情况作一个几何直观的认识。

例1—4 求解线性规划：

$$
\begin{aligned}
& \min f=-x_1+2x_2\\
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2\leqslant 5,\\
& 2x_1+3x_2\geqslant 6,
\end{aligned}
\tag{1—7}
$$

$$-x_1+x_2\leqslant 3$$
$$x_1\geqslant 0,\qquad x_2\geqslant 0$$

解 因为该线性规划仅有两个变量，我们在 x_1ox_2 坐标平面内用图解法来求解此问题。

第一步 确定可行域 K：

不等式 $x_1\geqslant 0$表示以 x_2轴（直线 $x_1=0$）为界的右半平面，不等式 $x_2\geqslant 0$表示以 x_1轴（直线 $x_2=0$）为界的上半平面，所以线性规划的可行解 $X=(x_1,\ x_2)^T$ 必在第一象限。

$x_1+x_2=5$是一条直线（选取两个点$(0,\ 5)^T$ 及$(5,\ 0)^T$ 连成直线即是），它把 x_1ox_2坐标平面分成两个半平面。为确定哪一个半平面是符合约束条件$x_1+x_2\leqslant 5$的，我们只要把原点$(0,\ 0)^T$ 代入不等式 $x_1+x_2\leqslant 5$中：若不等式成立，则我们就取原点所在的那一个半平面（以$x_1+x_2=5$为界）表示 $x_1+x_2\leqslant 5$，否则就取不含原点的那个半平面。我们在直线的两端画垂直箭头指向符合约束条件的半平面。

同样，$2x_1+3x_2\geqslant 6$和$-x_1+x_3\leqslant 3$各对应着一个半平面。

所以，可行域 K 为上述五个半平面之交集，它是一个在第一象限的凸多边形（包括边界），如图1—1中的阴影线部分。

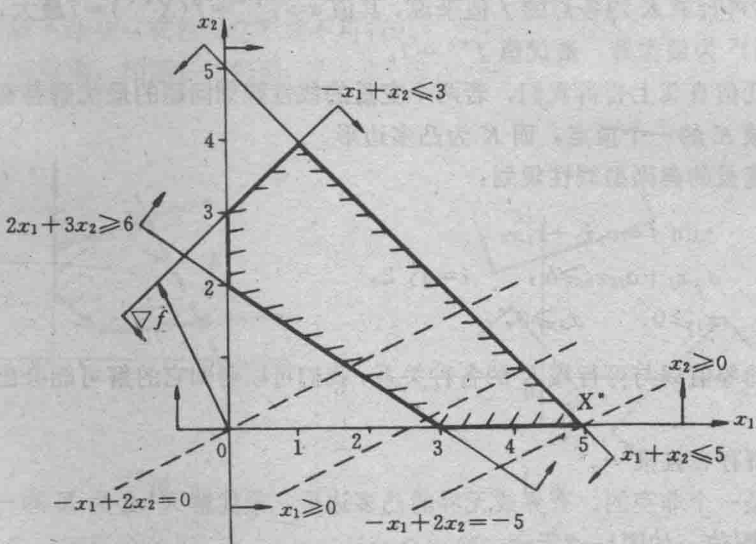


图 1—1

第二步 寻找最优解：

我们结合目标函数 $f=-x_1+2x_2=c_1x_1+c_2x_2$来求线性规划的最优解。对于任一给定的实数 α，方程

$$-x_1+2x_2=\alpha$$

为一条直线。由于位于该直线上的点都具有相同的目标函数值 α，故而称它为等值线。当 α 的数值变动时，我们就得到一族相互平行的直线，它们的斜率都为$-\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{1}{2}$。我们知道，目标函数 f 作为 x_1及 x_2的函数，它在任一点的梯度都是

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^T=(c_1,\ c_2)^T=(-1,\ 2)^T,$$

它与目标函数的等值线垂直。由高等数学有关知识可知，当点 $(x_1, x_2)^T$ 沿梯度方向移动时，f的值将随之增大；沿着负梯度方向移动时，f的值将随之减少。不妨在原点作梯度$C=(c_1, c_2)^T=(-1, 2)^T$（从原点至点$(c_1, c_2)^T$ 作一向量即为原点的梯度），过原点作向量 C 的垂直线（用虚线表示），它为过原点且 $\alpha=0$的等值线

$$-x_1+2x_2=0。$$

因为我们的问题是求 $\min f$，因此让等值线逆梯度方向移动，使 $c_1x_1+c_2x_2=\alpha$ 的值 α 逐步减少。当它刚要离开 K（此时，与 K 仅有一个交点 $X^*=(5, 0)^T$）时的等值线

$$-x_1+2x_2=-5,$$

对可行域 K 内各点的 f 值来说，其值 $\alpha=f^*=f(X^*)=-5$最小。所以，顶点 $X^*=(5, 0)^T$ 即为线性规划（1—7）的最优解，

$$f^*=-5$$

即为最优值。

倘若我们将例1—4的目标函数改为求max，则我们将等值线沿梯度方向移动，此时$c_1x_1+c_2x_2=\alpha$ 的值逐步增加，当它刚要离开 K 时的直线$-x_1+2x_2=7$（与 K 的唯一交点 X^{**} 为$(1, 4)^T$），对可行域 K 内各点的 f 值来说，其值 $\alpha=f^{**}=f(X^{**})=7$最大，因此，$K$ 的顶点 $X^{**}=(1, 4)^T$ 为最优解，最优值 $f^{**}=7$。

例1—4从几何直观上告诉我们，若两个变量的线性规划问题的最优解存在且唯一，则最优解必为可行域 K 的一个顶点，而 K 为凸多边形。

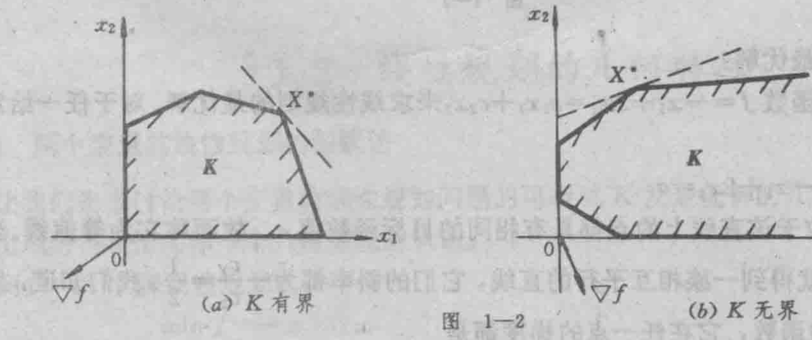
对于两个变量的典则型线性规划：

$$\begin{aligned} &\min f=c_1x_1+c_2x_2 \\ \text{s.t.}\quad &a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\geqslant b_i, \quad i=1, 2, \\ &x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \end{aligned} \tag{1—8}$$

根据目标函数的等值线与可行域K 的各种关系，我们可以得知它的解可能会出现以下几种情况：

（1）最优解存在且唯一。

这时，K 是一个非空的、有界或无界的凸多边形，最优解 X^* 必为 K 的一个顶点，最优值 f^* 为一个有限值，如图1—2所示。



(a) K 有界　　图 1—2　　(b) K 无界

（2）最优解 X^* 存在但不唯一。