“十二五”国家重点图书

Advances in Materials and Mechanics

量纲分析与Lie群

Dimensional Analysis and Lie Group

孙博华

高等教育出版社

"十二五"国家重点图书

Advances in Materials and Mechanics

量纲分析与Lie群

Dimensional Analysis and Lie Group

孙博华

高等教育出版社·北京

Author

Prof. Bohua Sun
Cape Peninsula University of Technology, South Africa
E-mail: bohua.sun@gmail.com
sunb@cput.ac.za

图书在版编目 (C I P) 数据

量纲分析与 Lie 群 / 孙博华编著. -- 北京 : 高等教育出版社, 2016. 6
(材料与力学进展 / 孙博华主编)
ISBN 978-7-04-045517-5

I. ①量··· II. ①孙··· III. ①量纲分析 – 研究②李群 – 研究 IV. ①O303 ②O152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 102049 号

策划编辑 刘剑波 责任编辑 卢艳茹 封面设计 杨立新 版式设计 童 丹
插图绘制 杜晓丹 责任校对 胡美萍 责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京中科印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	12.75		
字　数	240 千字	版　次	2016 年 6 月第 1 版
购书热线	010–58581118	印　次	2016 年 6 月第 1 次印刷
咨询电话	400–810–0598	定　价	49.00 元

物料号 45517–00

Advances in Materials and Mechanics 13 (AMM 13)

材料与力学进展 13

Advances in Materials and Mechanics (AMM)

前言

当处理一个科学或工程问题时，首先要从物理的角度深刻理解该问题，列出问题所涉及的各种物理参量，然后使用量分析找到这些参量之间的关系，发现问题的总体关系，在此基础上再利用物理原理建立问题的控制方程，即建模。建模之后，问题就变成了数学问题，即需要求解相应的控制方程，以便从量上对问题有深刻的了解。研究工程和科学问题一般都需要建模和求解的过程，有时还需要做试验。

建模的过程就是构建各物理量之间关系的过程，对于简单问题这个过程不一定复杂，但对于有些问题建模可能很复杂，甚至一时还无法建模。一般来讲，对于复杂问题，特别是第一次遇到的问题，一般都要先进行问题的量纲分析和相似性研究，尽量找出各物理量之间的一般性关系，以便指导建模过程。

科学和工程中的大多数问题是非线性的，对应的控制方程为非线性方程。求解非线性方程是一项困难的工作，求精确解就更加困难。虽然有不少求解非线性偏微分方程的方法，但对于变系数非线性偏微分方程，目前的研究手段主要还停留在数值求解或近似求解。

随着计算机的发展，计算能力越来越强大，数值方法也随之得到很大的发展，已经有了许多商业化科学计算软件。虽然数值方法有许多优点，但由于它只能给出特定条件下的结果，很难由此推广或预测更一般的情况，所以包含更多信息的解析解或精确解一直是科学界孜孜追求的目标。虽然有些非线性问题可以通过变换得到精确解，但这种变换往往需要特别的技巧，而这些技巧只能就事论事，没有一般性，很难推广。因此，求解非线性（包括线性）微分方程的一般性的方法，是人们一直探求的目标之一。

挪威数学家 Sophus Lie 于 1870 年左右提出了一种连续变换群的方法（也称 Lie 群或 Lie 群对称方法）。可以通过 Lie 群或对称群变换，简化原来的方程并获得精确解。这个方法不需要特别的变换技巧，是一种系统方法，不仅适用于线性微分方程，也适用于非线性微分方程，是目前最强有力的一般解析工具。Lie 群对称性分析不仅可用于求解，也可以指导构造数值算法。虽然 Lie 群最初是为了求解微分方程而提出的，距今已经有 140 年，但其应用主要侧重数学和物理理论方面，而不侧重微分方程的求解。目前有关 Lie 群的书籍都非常抽象，很难适用于理工科的学生和研究者。Lie 群的最初目的就是求解微分方程，所以为理工科学生编写一本用 Lie 群求解微分方程的书，是这本书的写作动机之一。

量纲分析有时也称相似论，实际上是基于物理量纲的齐次不变性，即数学上

的对称性, 对称性是 Lie 群的核心。所以, 美国著名学者 Cantwell① 倡议: 理工科的学生, 一要学习量纲分析方法, 二要掌握 Lie 群对称分析。前者用来建立物理模型, 后者用来求解。作者非常同意这个观点, 这就是为什么把量纲分析与 Lie 群合写在一本书中的原因, 以此希望读者关注它们之间的内在联系。

近几年, 作者受邀回国进行学术访问, 先后在北京大学、北京科技大学、中国科学院大学、北京理工大学、南方科技大学、北京航空航天大学、昆明理工大学、西安建筑科技大学和清华大学等高校就相关内容做过交流或讲座。从反馈看, 大家都渴望简明易懂、适合理工科学生的相关书籍出版。

本书是一本把量纲分析与 Lie 群合在一起的书, 希望学生可在较短时间内掌握量纲分析和 Lie 群对称性分析方法。本书除了介绍前人的成果外, 部分材料取自作者在不同时期的教学研究心得和学术成果。

在量纲分析及其应用部分, 介绍了量纲的基本概念, 包括量纲一致性定律和 Π 定理、量纲分析的 6 步法、定向量纲分析和相似论, 并通过一系列的例子展示了量纲分析的普适性。除了一些经典例子外, 还有一些实例涉及工程领域中非常重要的问题, 如破甲弹金属射流的稳定性问题、薄板在高速射流冲击下的撕裂问题、固体的断裂问题、航天器液体推进剂的晃动问题、海面原油泄漏的扩展问题、风吹声问题、不可压各向同性湍流的标度律、可压缩湍流的能谱标度律、湍流噪声问题、点源强爆炸问题、沙漠治理中草方格的障沙问题、考虑温度变化时微机电系统 (MEMS) 陀螺仪的标度律和水力压裂问题等。文中还给出了点源强爆炸至今较全面的科学史介绍。

在 Lie 群及其应用部分, 介绍了 Lie 群对称的概念、无穷小生成元和 Lie 代数、泛函的 Noether 守恒律、微分方程的不变量和相似解的寻求过程、Lie 群对称方法的外微分形式、符号运算的软件。为了让读者可以更好更快地理解并应用 Lie 群解决自己的科学问题, 书中细致介绍了一些实例, 如传热问题、无黏性流体的 Euler 方程的 Lie 群对称性分析、黏性流体的 Navier-Stokes 方程的 Lie 群对称性分析、二维流体边界层方程的 Lie 群对称性分析、平板大挠度的 von Kármán 方程、二维平行剪切流的线性稳定 Orr-Sommerfeld 方程的 Lie 群对称性分析、弹性力学的 Noether 守恒律、一般非线性 Burgers 方程的精确解和湍流边界层。书中还特别强调量纲分析 (相似论) 与 Lie 群对称性分析的内在联系, 如不变量 (相似变量) 的确定。

量纲分析的核心 —— Π 定理② 从 1914 年发表至今已有百年; Lie 群是由挪威数学家 Sophus Lie 于 1870 年左右开创发展的, 本书算作作者对量纲分析发展百年和对 Lie 群开创 140 周年的纪念。

应当指出, 作者作为非数学专业的教授在介绍 Lie 群时, 并不追求数学上的

---

① Cantwell B J. Introduction to Symmetry Analysis[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 2002.

② Buckingham E. On physically similar systems: Illustration of the use of dimensional equations[J]. Phys. Rev., 1914, 4: 345-376.

严格性和数学证明, 而是完全从应用的角度来介绍有关内容, 如果您需要更深入地了解, 请参考有关的数学书籍。

本书在南非开普敦完成撰写, 在南方科技大学完成第一次校对。作者对南方科技大学校长陈十一院士的邀请表示感谢, 访问期间没有任何任务的轻松 (所以有点不安), 使我在完成书稿校对的同时, 还有时间到几所大学做讲座或交流。南方科技大学是一所只成立 5 年的年轻大学, 朝气蓬勃, 充满希望。

作者在写作过程中对从参考文献获得的灵感和知识深怀感恩。感谢高等教育出版社刘剑波编辑的鼓励, 她对高质量学术著作的执著推动令人钦佩。感谢卢艳茹编辑及其他编辑的细致审阅, 他们发现文字和公式中笔误的专业能力给我留下深刻印象。要特别感谢家人的支持, 使我可以全身心地投入到本书的写作中, 没有他们的支持就没有本书。

年迈的父母还时刻牵挂着我们, 荣幸地将此书献给敬爱的父母! 感谢父母的养育之恩, 衷心祝愿父母健康长寿。

孙博华

2015 年 10 月 10 日完成于开普敦好望斋

2016 年 1 月 16 日第一次校对于南方科技大学

2016 年 3 月 27 日复活节第二次校对于开普敦大学图书馆

目录

第一章
量纲分析

随着人类对自然的探索活动的深入, 遇到的问题也愈来愈复杂。涉及多尺度、多层次、多材料、多物理的耦合问题对计算技术的要求愈来愈高, 但计算产生的大数据是否正确还需要认真分析判断, 这种数据分析必须建立在正确的物理模型基础之上, 否则就会产生海量的垃圾数据。

解决一个复杂问题, 除了需要理解具体问题的物理理论, 还需要掌握与物理概念密切相关的量纲分析方法和相似论。它们既可以用于数据整理, 也可以在不求解问题前对问题的结果有个定量和定性的把握。对于有些复杂问题, 建立其数学模型有时可能非常困难, 或者方程非常复杂难以求解, 或者求解的过程非常复杂不便于实际应用。有时需要做试验, 但实际尺寸很难在试验条件中实现, 必须缩小尺寸做模型试验, 这时要求必须满足一定的相似条件, 这种条件必须建立在量纲分析和相似论的基础上。一般来讲, 对于复杂问题, 特别是第一次研究, 一般都要先进行量纲分析和相似性研究, 尽量找出一般性规律, 发现主导控制参量, 细化演化过程, 以便在建模和分析时简化问题。

量纲分析 (dimensional analysis) 很难说从何时产生, 基本上它是古希腊几何中相似与比例的概念的推广。很多科学大师如 Newton、Fourier[1]、Maxwell[2]、Einstein 等处理问题时内心深处其实是有量纲 (dimension) 概念的, 但不成系统。法国数学家 J. B. Fourier 的名著 *Analytical Theory of Heat* (《热的解析理论》)[1]

中就有量纲分析的论述。20 世纪初, 量纲分析才逐渐成形, 并且成为物理学、数学中建立数学模型的重要方法之一。牛顿第二定律 $F = ma$, 其方程式应该与计量物理量的量纲无关。由此得到一个重要结论：任何有意义的定律, 对于其方程式的每一个计量量纲, 都必须是齐次方程式。这个认识的最终形式成为 Π 定理, 即假设一个有物理意义的方程式具有 n 个参量和 m 个基本量纲。Π 定理描述了怎样将此方程式等价地写成具有 $(n-m)$ 个无量纲量的方程式。更重要的是, 根据给定的参量, 这个定理给出了一种能够计算这些无量纲量的方法。

通过量纲分析可以检查反映物理现象规律的方程在量纲方面是否合理。它是在经验和试验的基础上, 利用物理定律的量纲平衡即齐次定理, 确定各物理量之间的关系。一个成熟的物理学家在探究某一个问题的时候, 往往是从定性或者半定量的角度入手分析, 使用的方法如量级分析、量纲分析、对称性分析等。

在量纲分析发展历史上, 一个特别有名的案例是第二次世界大战期间英国力学大师 G. I. Taylor 为研究原子弹爆炸 —— 点源强爆炸, 发现了冲击波球面半径与时间的 2/5 次方成正比的规律, 并从量纲分析的角度引进新的相似变量 (similar variable), 将偏微分方程组转化为常微分方程, 从而得出自相似解 (self-similar solution), 计算预测了美国第一颗原子弹的爆炸当量。这曾在国际社会引起很大的反响, 导致美国要调查是否有泄密事件。

量纲分析是一种非常值得研究和学习的科学方法, 它是探讨科学规律、解决科学和工程问题的一种有用的工具和普适方法。

第二章 量纲分析的基本概念和 Π 定理

作为一种科学方法，量纲分析有它的核心概念和定理，理解它们对于灵活使用其分析问题非常重要。量纲分析和相似论课程的核心知识点包括量纲概念、7 个基本量纲、量纲的幂次律、量纲一致性定律、Π 定理、量纲分析的 6 步法、模型试验与原问题的相似模数都必须相等。

2.1 量纲

任何物理量都有量纲或单位，该物理量的大小就是这个单位的多少倍，即一个标量乘这个单位。如长度 10 m，其中 m 是度量这个长度的单位，而 10 是这个长度和 m 所表示的单位长度的比例。很明显，用来度量这个物理量的单位和这个物理量本身一定是同一类型的量，或者说，这些量的量纲是相同的。长度的量纲用 L 来表示，而不特别说明具体是用 m、cm 还是 mm，只要是长度量纲就行。

当然也有一些量是没有量纲的，我们就称其为无量纲量 (或称为量纲一的量)，如角度和一些导出的量。

物理世界千变万化，看起来非常复杂，但值得庆幸的是，基本的物理量量纲

一共只有 7 个。所以有如下结论:

定律 2.1 (基本物理量的量纲定律)　*基本物理量的量纲一共只有 7 个; 所有其他的物理量的量纲都是其组合的导出量纲。*

通过一个问题所涉及的基本物理量的量纲的个数可以预测这个问题的复杂程度, 当然越多越复杂, 但最多就是 7 个 (如表 2.1 所示)。近几年来, 科学界比较关注的多物理问题从本质上看就是这些问题涉及的基本物理量较多, 但也不会多于 7 个。

例如, 纯力学类系统只涉及 3 个基本物理量 (质量、长度和时间), 如果考虑温度变化的热力学过程就需要加上基本物理量温度。

表 2.1　基本物理量的量纲及 SI 单位

基本物理量的名称	量纲	SI 单位
质量	M	kg(kilogram)[a]
长度	L	m(meter)[b]
时间	T	s(second)[c]
热力学温度	Θ	K(kelvin)[d]
电流	I	A(ampere)[e]
发光强度	J	cd(candela)[f]
物质的量	N	mol(mole)[g]

[a] 光在真空中于 1/299 792 458 s 内行进的距离定义为 1 m。

[b] 存放于法国巴黎国际度量衡局的国际千克原器的质量定义为 1 kg。

[c] 铯 133 原子基态的两个超精细能阶间跃迁对应辐射的 9 192 631 770 个周期的持续时间定义为 1 s。

[d] 水的三相点温度的 1/273.16 定义为 1 K。

[e] 在真空中相距为 1 m 的两根无限长平行直导线, 通以相等的恒定电流, 当每米导线上所受作用力为 2×10^{-7} N 时, 各导线上的电流为 1 A。

[f] 给定一个频率为 540.015 4×1 012 Hz 的单色辐射光源 (黄绿色可见光) 与一个方向, 且该辐射源在该方向的辐射强度为 1/683 W/sr, 则该辐射源在该方向的发光强度为 1 cd。

[g] 所含基本微粒个数与 0.012 kg 碳 -12 中所含原子个数相等的一系统的物质的量定义为 1 mol。

例如液体表面张力的量纲问题。液体的内聚力是形成表面张力的原因。在液体内部, 分子在每个方向都受到邻近分子的吸引力 (也包括排斥力), 因此, 液体内部分子受到的分子力合力为零。然而, 在液体与气体的分界面上的液体分子在各个方向受到的引力是不均衡的, 造成表面层中的分子受到指向液体内部的吸引力, 并且有一些分子被 "拉" 到液体内部。因此, 液体会有液面面积缩小的趋势, 在宏观上的表现即为表面张力现象。

一些昆虫如水黾可以利用表面张力在水面上爬行, 如图 2.1 所示。非常扁的物体如铝质或镍质的钱币、剃须刀片或铝膜也可以通过表面张力浮在水面上。生活中其他表面张力的例子如水滴形成圆球状, 针浮在水面上, 荷叶上的水滴呈圆球状。在表面张力高的情况下, 水不仅不易浸湿物体, 还会从物体表面反弹。洗衣粉的作用之一就是降低水的表面张力。