模糊计算理论

李永明　李　平　著

科学出版社

模糊计算理论

李永明　李　平　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

对模糊计算理论与方法的研究是模糊数学与模糊系统的一个重要研究方向, 本书以模糊计算为主线, 结合作者的研究成果, 主要介绍模糊数学基础, 模糊关系计算理论, 模糊系统与模糊自动机理论, 模糊语言与模糊文法, 模糊计算模型——模糊图灵机, 以及无穷模糊计算理论. 本书重视理论分析, 试图给出较全面与详尽的推导过程, 并通过大量的例子对问题进行阐释.

本书可作为数学、计算机、自动化等专业模糊数学与模糊系统方向的研究生或高年级本科生的参考书或教材, 对相关领域工程人员也具有一定的指导意义.

图书在版编目(CIP)数据

模糊计算理论/李永明, 李平著. —北京: 科学出版社, 2016. 11
ISBN 978-7-03-050478-4
Ⅰ. ①模… Ⅱ. ①李… ②李… Ⅲ. ①模糊数学 Ⅳ. ①O159
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 265247 号

责任编辑: 李 萍 / 责任校对: 张怡君
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 红叶图文

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 11 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2016 年 11 月第一次印刷 印张: 17
字数: 343 000

定价: 90.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

当今社会, 计算无处不在. 大到航空航天, 小到日常生活中的各种家用电器、智能仪表以及智能汽车, 都用到各种计算装置去保障仪器的正常运行. 从理论上来说, 这些计算装置的形式化模型都是图灵机. 图灵机是 20 世纪 40 年代由英国数学家阿兰·图灵提出的一种计算模型, 人们普遍认为, 所有计算或算法都可以由一台图灵机来执行 (丘奇-图灵论题). 图灵机计算严格依赖于布尔逻辑, 是基于经典逻辑和经典集合的计算模型.

1965 年, 为了从数学上处理带有模糊性的不确定性现象, Zadeh 引入模糊集合的概念. 自此, 模糊集合的观点引起众多研究者的兴趣, 并被引入到许多理论与应用学科中, 在模糊数学与模糊系统的理论与应用方面已取得了许多重要的成果, 在工程、技术、医疗等行业得到了广泛的应用. 模糊集合的逻辑是模糊逻辑, 模糊计算就是基于模糊逻辑和模糊集合的计算理论. 模糊计算有 "狭义" 和 "广义" 两种定义方式. 狭义地说, 模糊计算就是指其对应的形式化模型, 是 "模糊算法" 的模型和理论. 广义地说, 模糊计算就是带有模糊集合概念的计算, 所有的模糊系统都可以归结到这个模型中.

模糊算法是 Zadeh 在 1968 年提出的一个概念, 它是指含有模糊指令的句子的集合, 如 "若 x 近似等于 5, 则让 y 近似等于 10" "若 x 是大的, 则给 y 增加几个单位, 若 x 是小的, 则给 y 减小几个单位, 否则 y 不变" 等, 这些指令都含有模糊集合概念. 模糊算法在我们日常生活中经常见到, 如菜谱中 "加少许盐, 适量的味精", 中医中 "身大热者, 加石膏, 知母, 脉洪大者重用石膏", 驾驶员倒车的指令 "方向盘稍向右打, 稍向后倒", 等等, 这些都是含有模糊集合概念的指令, 这些都是构成模糊算法的例子. Zadeh 提出可以利用图灵机的模糊化概念来给出模糊算法的形式化模型, 这个想法随后被 Santos 实现. Santos 在 1970 年给出模糊图灵机的概念, 从而给出模糊算法的基于模糊集合的形式化概念.

文法是描述算法的另一种有力的工具, 这个概念的模糊化是由 Lee 和 Zadeh 于 1969 年提出的. 而作为最简单的计算模型, 模糊有穷自动机早在 1967 年就由 Wee 提出. 这样, 作为模糊计算的三大模型 —— 模糊有穷自动机、模糊文法、模糊图灵机都被提出. 随后, 这些模型得到了进一步的研究, 并被应用到各种情形.

模糊自动机是得到较多研究的一种计算模型, 早期的研究主要集中在真值论域, 并限定在实数范围内. 在 2000 年前后, 随着真值论域的扩大, 模糊自动机又得到了深入的研究, 这一方面中国学者的贡献较大, 包括应明生教授提出的基于词的

模糊自动机理论, 邱道文教授提出的基于完备剩余格的模糊自动机理论, 莫智文与舒兰教授提出的有关模糊文法理论等. 2005 年, 本书作者和加拿大阿尔伯塔大学 Pedrycz 教授提出基于格序半群的模糊自动机理论, 该理论得到了较广泛的研究. 实际上, 与模糊自动机理论并行的有一个研究方向——加权自动机理论. 加权自动机是一种状态转移带权重的自动机, 其中权重取值于半环这种代数结构, 而格序半群是一种特别的半环, 因此模糊自动机可看成加权自动机的特例. 但因为格序半群丰富的序结构, 所以模糊自动机比加权自动机具有更丰富的成果, 如层次结构、拓扑结构。本书将以分配格为真值论域较全面地介绍模糊自动机理论.

模糊文法包括一般的模糊文法、模糊上下文有关文法、模糊上下文无关文法和模糊正则文法. 相关研究主要集中在模糊上下文无关文法, 及其和模糊下推自动机在生成模糊语言方面的等价性, 以及模糊上下文无关文法的 Chomsky 范式等方面. 从识别语言的角度看, 一般的模糊文法和模糊图灵机等价, 模糊上下文无关文法和模糊下推自动机等价, 模糊正则文法和模糊自动机等价, 因此模糊文法给出了识别模糊语言的另一种描述工具. 模糊文法已在 DNA 序列分析、机器学习等方面得到应用.

模糊图灵机随着 Wiedermann 的工作的影响形成了模糊计算理论的另一个研究热点. 在 2005 年, Wiedermann 证明了模糊图灵机相对经典图灵机的超级计算能力, 引起了人们的重视. 本书作者在这方面做了较全面的研究, 如在通用模糊图灵机方面的研究在国际上是最早、最全面的. 本书也将以作者的工作为主, 详细介绍模糊图灵机的有关理论.

以上介绍的模糊计算针对的都是有穷计算, 即有限步终止的模糊计算. 有穷模糊计算的计算模型主要用于处理输入字母表上的有限输入的行为. 但实际中很多系统的特性表现为无限过程, 如操作系统 (ATM 机就是一例)、Web 服务、交通系统等, 这些系统从计算的角度表现为输入字母表上的无限输入串行为, 称其为无穷计算. 无穷计算在实际系统的形式化验证方面特别有用, 为此在本书中也简单介绍了无穷模糊计算的有关理论.

广义的模糊计算就是利用模糊集合概念进行的计算, 这里模糊关系及其运算为核心概念, 它以 Zadeh 提出的 CRI 复合算法为核心. 实际上, 狭义的模糊计算也都归结为模糊关系的运算. 模糊关系计算的理论内容包括 (但不限于) 模糊关系方程、模糊系统的定性分析、模糊矩阵的幂运算、模糊推理及其鲁棒性分析等. 第 2 章对这方面内容进行了简单介绍, 其中模糊关系方程的结果参考了王学平团队近年来的有关成果.

本书的各章内容安排如下: 第 1 章是本书的基础, 介绍模糊集合的一些最基本的内容. 第 2 章是有关模糊关系计算理论的内容, 既包括最常用的模糊关系方程及其求解问题, 又包括基于此的模糊矩阵的幂运算和基于模糊关系的系统分析以及模

糊推理系统的鲁棒性分析讨论. 第 3 章是模糊系统与模糊自动机理论的内容, 在格值意义下本章涵盖了模糊自动机的基本内容. 第 4 章主要总结模糊语言与模糊文法的有关内容, 在格值意义下本章涵盖了模糊文法的基本内容. 第 5 章讨论模糊图灵机的基本内容. 第 6 章简单介绍无穷模糊计算理论.

还有许多重要的模糊计算方法本书没有涉及, 有兴趣的读者可以从本书提供的参考文献中找到. 本书还提供了大量的作业, 有些是常规的训练, 有些是书中内容的一些拓展, 有些可以作为下一步的研究课题. 这些作业对于那些有志于在模糊计算理论方面做出贡献的读者是十分必要的.

模糊计算理论是目前模糊系统理论研究的一个重点, 目前仍处于发展阶段, 尚有许多的问题需要解决. 希望本书的出版对该学科的发展有一定的促进作用.

作者十分感谢陕西师范大学数学与信息科学学院王国俊教授, 西北工业大学自动化学院史忠科教授, 四川大学数学学院刘应明院士, 清华大学计算机科学与技术系应明生教授, 中山大学信息与技术学院邱道文教授, 北京大学信息科学技术学院曹永知教授, 澳大利亚悉尼科技大学计算机与工程学院李三江教授, 加拿大阿尔伯塔大学电子与计算机工程系 Witold Pedrycz 教授, 以及德国莱比锡大学计算机系 Manfred Droste 教授这么多年所提供的各方面的帮助、学术上的建议和合作.

作者的多届研究生阅读了本书的早些版本, 并对其中的错误进行了纠正, 这里也向他们表示感谢.

本书的部分成果是作者承担国家自然科学基金项目 (10571112, 60873119, 11271237), 以及教育部高等学校博士点基金 (博导类) 项目 (2008170005, 20130202110001) 的研究成果的总结. 另外, 本书的出版还得到了陕西师范大学优秀研究生教材项目的资助, 在此一并致谢.

本书的各部分内容都向研究生讲授过, 其中一些是作者新近完成的科研成果, 但限于作者的水平, 不妥之处在所难免, 希望各位专家与读者不吝赐教.

作　者
2016 年 7 月 29 日于西安

目 录

第 1 章　模糊数学基础

本章将给出本书所要用到的模糊数学的一些最基本内容, 主要包括模糊集合的定义及其基本性质、模糊关系的定义及其基本性质, 以及模糊逻辑与推理的基本内容. 这一部分内容是模糊数学的经典内容, 更详细的内容可参见本章所列参考文献 [1]—[15] 中的介绍.

1.1　模糊集合的定义与运算

经典集合是用来描述确定性现象最基本的数学概念的, 也是现代数学的基础. 为了处理模糊现象 (概念), Zadeh 引入了模糊集合的概念. 本节简单回顾经典集合的概念及其一些基本性质, 然后引入模糊集合的概念, 并给出模糊集合的基本性质.

1.1.1　经典集合与特征函数

设 X 为普通集合, 以 X 为基本论域, X 的子集记为 $A, B, C, \cdots$. 集合 A 的表示方法主要有以下几种:

(1) 列举法: 列出集合 A 的所有元素, $A=\{x_1, x_2, \cdots\}$;

(2) 描述法: 给出集合 A 中元素性质的描述, $A=\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$;

(3) 特征函数法: 利用特征函数来表示集合 A, A 的特征函数 $\chi_A: X \to \{0,1\}$ 定义为

$$\chi_A(x)=\begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

记 $P(X)=\{A \mid A \subseteq X\}$, 称为 X 的幂集, 它表示集合 X 的所有子集构成的集合, 则 $(P(X), \subseteq)$ 构成偏序集, 即包含关系 $\subseteq$ 满足如下三个条件:

(1) 自反性: $A \subseteq A$;

(2) 反对称性: 若 $A \subseteq B, B \subseteq A$, 则 $A=B$;

(3) 传递性: 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

$P(X)$ 上有如下运算: 设 $A, B \in P(X)$, $B_t \in P(X)(t \in T, T$ 为一个指标集), 则 $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, A^c, $\bigcup\limits_{t \in T} B_t$, $\bigcap\limits_{t \in T} B_t$ 为 $P(X)$ 的并、交、补、任意并、任意交运算, 并且 $(P(X), \bigcup, \bigcap, c)$ 具有如下性质:

(1) $A\bigcup B, A\bigcap B, \bigcup\limits_{t\in T} B_t, \bigcap\limits_{t\in T} B_t, A^c \in P(X)$; (封闭性)

(2) $A\bigcup B = B\bigcup A, A\bigcap B = B\bigcap A$; (交换律)

(3) $(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C)$,

$(A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C)$; (结合律)

(4) $A\bigcup\varnothing = A, A\bigcap X = A$; (单位元存在性)

(5) $A\bigcup A^c = X, A\bigcap A^c = \varnothing$; (互补性)

(6) $A\bigcup(A\bigcap B) = A, A\bigcap(A\bigcup B) = A$; (吸收律)

(7) $A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$,

$A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$,

$A\bigcup\left(\bigcap\limits_{t\in T} B_t\right) = \bigcap\limits_{t\in T}(A\bigcup B_t)$,

$A\bigcap\left(\bigcup\limits_{t\in T} B_t\right) = \bigcup\limits_{t\in T}(A\bigcap B_t)$; (分配律)

(8) $A\bigcup A = A, A\bigcap A = A$; (幂等律)

(9) $A\bigcup X = X, A\bigcap\varnothing = \varnothing$; (两极律)

(10) $(A^c)^c = A$; (对合律)

(11) $(A\bigcup B)^c = A^c\bigcap B^c, (A\bigcap B)^c = A^c\bigcup B^c$,

$\left(\bigcup\limits_{t\in T} B_t\right)^c = \bigcap\limits_{t\in T} B_t^c, \left(\bigcap\limits_{t\in T} B_t\right)^c = \bigcup\limits_{t\in T} B_t^c.$ (De-Morgan 对偶律)

若令 $2^X = \{\chi_A \mid A\subseteq X\} = \{f \mid f: X\to\{0,1\}$为映射$\}$, 则可以在 2^X 上引入以下运算:

$$(\chi_A\vee\chi_B)(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$
$$(\chi_A\wedge\chi_B)(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$
$$\chi'_A(x) = 1-\chi_A(x).$$

于是存在双射 $\varphi: P(X)\to 2^X$, 其中 φ 定义为 $\varphi(A) = \chi_A$, 且 φ 为代数同构, 即 φ 保持各种代数运算, 记为 $(P(X), \bigcup, \bigcap, c)\cong(2^X, \vee, \wedge, ')$. 因此, 在本书中, A 与 χ_A 不加区别, $P(X)$ 也记为 2^X.

1.1.2 模糊集合的定义与例子

以下设 X 为普通集合, 为了和模糊集合区分, 也称 X 为经典集合.

定义 1.1.1 集合 X 上的模糊集合 (fuzzy set) 是一个映射 $A: X\to[0,1]$, A 也称为模糊集合 A 的隶属函数, 常记为 μ_A. 对 $x\in X$, $A(x)$ 称为 x 属于模糊集 A 的隶属度.

模糊集合有以下几种记法:

(1) $A = \{(x, A(x)) \mid x\in X\}$;

(2) 若 X 为连续集 (无限集), 则 A 可以表示为

$$A = \int A(x)/x;$$

(3) 若 X 为有限集或可数集, 并设 $X = \{x_i\}$, 则 A 可以表示为

$$A = \sum A(x_i)/x_i.$$

例 1.1.1 设 $X = [0, 100]$ 表示年龄的集合, A 与 B 表示 "年老" 与 "年轻" 的模糊集合, 它们的隶属函数分别为

$$A(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 50, \\ \left[1 + \left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50 < x \leqslant 100; \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 25, \\ \left[1 + \left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25 < x \leqslant 100, \end{cases}$$

分别如图 1.1.1 和图 1.1.2 所示.

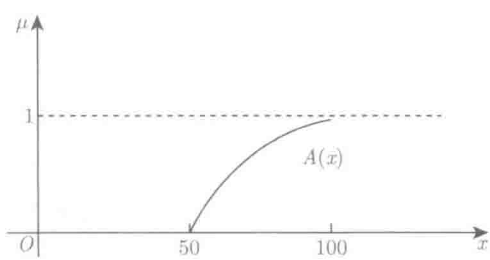

图 1.1.1 模糊集合 "年老" A

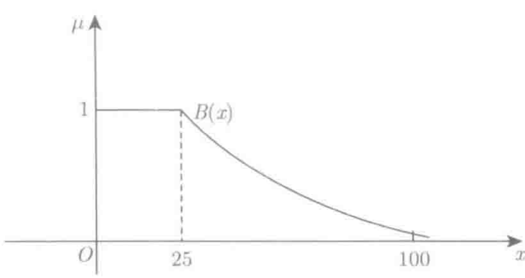

图 1.1.2 模糊集合 "年轻" B

如果 $x = 60$, 则 $A(60) = 0.8, B(60) = 0.02$, 故可认为 60 岁是比较年老的.

例 1.1.2　设 X 中元素是各种单连通凸区域 x, 以光滑的封闭曲线为边界, 用 l 表示边界的周长, s 表示区域的面积, 模糊集 A 表示 "圆的程度", A 的隶属函数为 $A(l,s)=\dfrac{4\pi s}{l^2}$. 当 x 是圆时, $A(x)=1$; 当 x 不圆时, $A(x)<1$.

当基本论域为 $\mathbf{R}$ 时, 常用下列三种标准函数表示模糊集合的隶属函数:

(1) S 函数 (偏大型隶属函数), 如图 1.1.3 所示;

(2) Z 函数 (偏小型函数), 如图 1.1.4 所示;

(3) π 函数 (中间型隶属函数), 如图 1.1.5 所示.

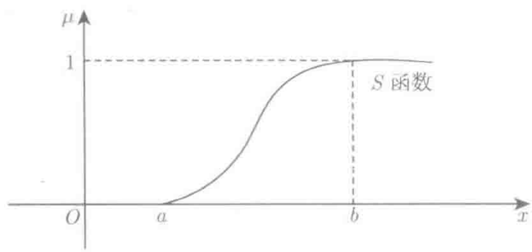

图 1.1.3　S 函数

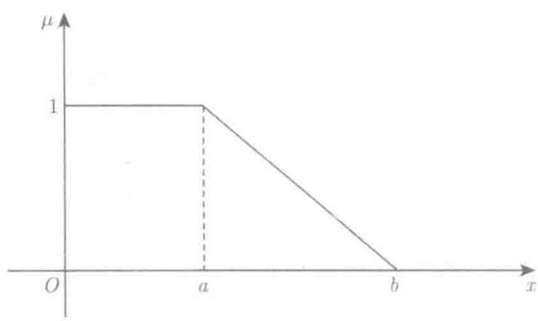

图 1.1.4　Z 函数

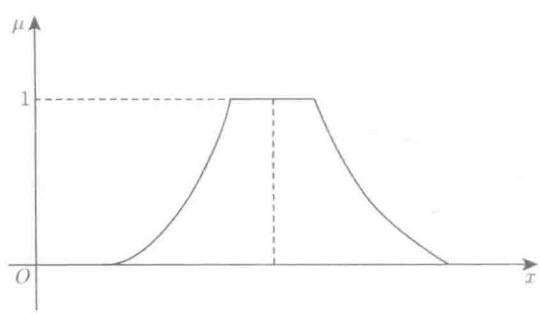

图 1.1.5　π 函数

1.1.3 模糊集合的运算

用 $F(X)$ 表示 X 上模糊集合的全体, 即

$$F(X) = \{A \mid A : X \to [0,1]\}.$$

定义 1.1.2 设 $A, B \in F(X)$, 若 $\forall x \in X$ 有 $A(x) \leqslant B(x)$, 则称 A 包含于 B, 或 B 包含 A, 记作 $A \subseteq B$. 若 $\forall x \in X$, 有 $A(x) = B(x)$, 称 A 等于 B, 记作 $A = B$, 则 $(F(X), \subseteq)$ 为偏序集.

定义 1.1.3 设 $A, B \in F(X)$, A 与 B 的并 $A \bigcup B$, 交 $A \bigcap B$, 补 A^c 的隶属函数定义为

$$\begin{aligned}
&(A \bigcup B)(x) = A(x) \vee B(x) = \max\{A(x), B(x)\},\\
&(A \bigcap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = \min\{A(x), B(x)\},\\
&A^c(x) = 1 - A(x).
\end{aligned}$$

显然, 若 $A, B \in F(X)$, 则 $A \bigcup B, A \bigcap B, A^c \in F(X)$. 另外, 若 $A_t \in F(X)(t \in T)$, 则可定义模糊集合的任意并与任意交的运算如下:

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)(x) = \bigvee_{t \in T} A_t(x) = \sup_{t \in T} A_t(x),$$

$$\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)(x) = \bigwedge_{t \in T} A_t(x) = \inf_{t \in T} A_t(x).$$

显然, $\bigcup\limits_{t \in T} A_t, \bigcap\limits_{t \in T} A_t \in F(X)$.

定理 1.1.1 设 X 为论域, $A, B, C \in F(X)$, 则代数系统 $(F(X), \bigcup, \bigcap, c)$ 具有如下性质:

(1) $A \bigcup B = B \bigcup A, A \bigcap B = B \bigcap A$; (交换律)

(2) $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$,

$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$; (结合律)

(3) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$,

$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$; (分配律)

(4) $A \bigcup (A \bigcap B) = A$; (吸收律)

(5) $A \bigcup A = A, A \bigcap A = A$; (幂等律)

(6) $(A^c)^c = A$; (对合律)

(7) $X \bigcap A = A, X \bigcup A = X$,

$\varnothing \bigcap A = \varnothing, \varnothing \bigcup A = A$; (两极律)

(8) $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$,

$(A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$. (De-Morgan 对偶律)

若 $B_t \in F(X)(t \in T)$, 则 (3) 和 (8) 有更一般的形式:

(3′) $A \bigcap \left(\bigcup\limits_{t \in T} B_t \right) = \bigcup\limits_{t \in T} (A \bigcap B_t)$, $A \bigcup \left(\bigcap\limits_{t \in T} B_t \right) = \bigcap\limits_{t \in T} (A \bigcup B_t)$;

(8′) $\left(\bigcup\limits_{t \in T} B_t \right)^c = \bigcap\limits_{t \in T} B_t^c$, $\left(\bigcap\limits_{t \in T} B_t \right)^c = \bigcup\limits_{t \in T} B_t^c$.

证明　直接验证即可. ■

注 1.1.1　模糊集合不再满足互补律, 即 $A \bigcup A^c = X, A \bigcap A^c = \varnothing$ 一般不再成立.

例 1.1.3　设 $X = [0,1], A(x) = x$, 则 $A^c(x) = 1 - x$, 这时

$$(A \bigcup A^c)(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ x, & x > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad (A \bigcap A^c)(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1 - x, & x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

于是 $A \bigcup A^c \neq X, A \bigcap A^c \neq \varnothing$, 特别地, $(A \bigcup A^c)\left(\dfrac{1}{2}\right) = (A \bigcap A^c)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

1.1.4　模糊集合的分解定理

定义 1.1.4　设 $A \in F(X)$, $\forall \lambda \in [0,1]$, 记

$$A_\lambda = \{x \in X \mid A(x) \geqslant \lambda\} (\subseteq X),$$

则 A_λ 称为 A 的 λ 截集 (λ-cut). 又记

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x \in X \mid A(x) > \lambda\},$$

则 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 又称为 A 的 λ 强截集.

定理 1.1.2　截集有下列性质:

(1) $(A \bigcup B)_\lambda = A_\lambda \bigcup B_\lambda$, $(A \bigcap B)_\lambda = A_\lambda \bigcap B_\lambda$;

(2) $(A \bigcup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \bigcup B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$, $(A \bigcap B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \bigcap B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$;

(3) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset A_\lambda$;

(4) 若 $A \subseteq B$, 则 $A_\lambda \subseteq B_\lambda, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$;

(5) 若 $\lambda_1 > \lambda_2$, 则 $A_{\lambda_1} \subseteq A_{\lambda_2}, A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda_2}}$;

(6) $A_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda \leqslant \alpha} A_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda < \alpha} A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$, $A_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcup\limits_{\lambda > \alpha} A_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda \geqslant \alpha} A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

证明　直接验证即可. ■

$\{A_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ 也称为对应于模糊集合 A 的集合套. 关于模糊集合与集合套的关系的讨论可见表现定理 (定理 1.1.6).

定义 1.1.5 设 $A \in F(X)$, 称 $A_1 = \{x \in X \mid A(x) = 1\}$ 为 A 的核, 记作 $\ker A$. $A_0 = \{x \in X \mid A(x) > 0\}$ 为 A 的支集, 记作 $\mathrm{supp}A$. 而差集 $\mathrm{supp}A - \ker A$ 称为 A 的边界. 如图 1.1.6 所示.

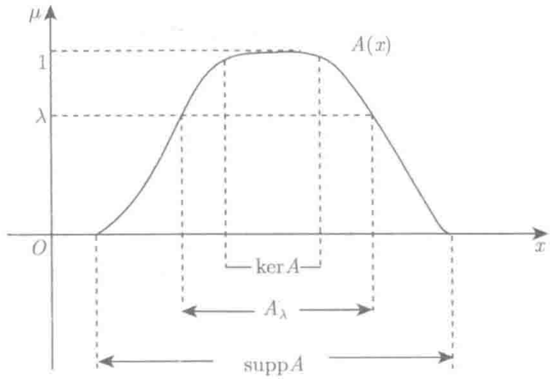

图 1.1.6 模糊集合的截集、支集和核

明显地, 有 $\forall\lambda \in (0,1], \ker A \subseteq A_\lambda \subseteq \mathrm{supp}A \subseteq X$.

定义 1.1.6 设 $A \in F(X)$, 若 $\ker A \neq \varnothing$, 则称 A 为正规模糊集 (normal fuzzy set), 否则称 A 为非正规模糊集.

定义 1.1.7 设 $\alpha \in [0,1]$, $A \in F(X)$, α 与 A 的数积为 αA 定义为

$$\forall x \in X, \quad (\alpha A)(x) = \alpha \wedge A(x).$$

定理 1.1.3 (模糊集合的分解定理) 对于任意的 $A \in F(X)$, 有

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_{\underline{\alpha}}.$$

若 R_0 为 $[0,1]$ 中的有理点集 (或稠密集), 则

$$A = \bigcup_{\alpha\in R_0} \alpha A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in R_0} \alpha A_{\underline{\alpha}}.$$

证明 因为

$$A_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_\alpha, \\ 0, & x \notin A_\alpha, \end{cases}$$

所以 $\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_\alpha\right)(x) = \sup\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \alpha A_\alpha(x) = \sup\limits_{x\in A_\alpha} \alpha = \sup\limits_{\alpha\leqslant A(x)} \alpha = A(x).$ ■

推论 1.1.1 设 $A, B \in F(X)$, 则 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall\alpha \in [0,1], A_\alpha \subseteq B_\alpha$, 或者 $\forall\alpha \in R_0$, $A_\alpha \subseteq B_\alpha$.

证明 由分解定理知成立. ■

1.1.5 模糊集合的模运算

为了使模糊集合适用于各种不同的模糊现象, 必须建立模糊集合的各种不同的运算. 模运算是模糊集合运算的最一般形式.

定义 1.1.8　映射 $T:[0,1]^2\to[0,1]$ 称为三角模, 如果 T 满足如下条件:

(1) $T(0,0)=0, T(1,1)=1$;

(2) $a\leqslant c, b\leqslant d\Rightarrow T(a,b)\leqslant T(c,d)$;

(3) $T(a,b)=T(b,a)$;

(4) $T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$.

若三角模 T 满足 $T(a,1)=a(\forall a\in[0,1])$, 则称 T 为 t-模 (t-norm); 若三角模 T 满足 $T(0,a)=a(\forall a\in[0,1])$, 则称 T 为 t-余模或 s-模 (s-norm).

例 1.1.4　下面的运算都是 t-模:

极端积 (drastic product): $T_0'(a,b)=\begin{cases}a, & b=1,\\ b, & a=1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

取小算子 (minimum): $T_0(a,b)=a\wedge b=\min\{a,b\}$;

代数积 (algebraic product): $T_1(a,b)=ab$;

Einstein 积 (Einstein product): $T_2(a,b)=\dfrac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$;

有界积或 Lukasiewicz 积 (Lukasiewicz product): $T_\infty(a,b)=\max\{0,a+b-1\}$.

下面的运算都是 s-模:

$$S_0'(a,b)=\begin{cases}b, & a=0,\\ a, & b=0,\\ 1, & \text{其他};\end{cases}$$

$$S_0(a,b)=a\vee b=\max\{a,b\};$$

$$S_1(a,b)=a+b-ab;$$

$$S_2(a,b)=\frac{a+b}{1+ab};$$

$$S_\infty(a,b)=\min\{1,a+b\}.$$

例 1.1.5　Hamacher t-模与 s-模: $\forall p\geqslant 0$,

$$T^{(p)}(a,b)=\frac{ab}{p+(1-p)(a+b-ab)},\quad S^{(p)}(a,b)=\frac{a+b+(p-2)ab}{1+(p-1)ab}$$

分别为 t-模和 s-模. 特别地, 当 $p=2$ 时, $T^{(2)}=T_2$, $S^{(2)}=S_2$; 当 $p=1$ 时, $T^{(1)}=T_1$, $S^{(1)}=S_1$.