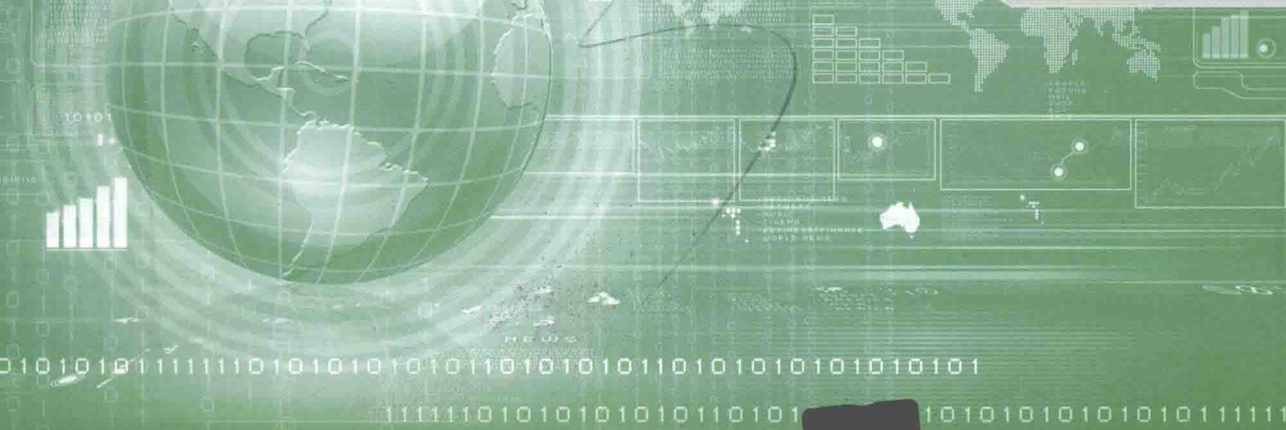
郭智莲 齐琼 吴静杰◎主编 褚万霞 张广计◎副主编

经济数学

微积分辅导及习题解答

（下册）



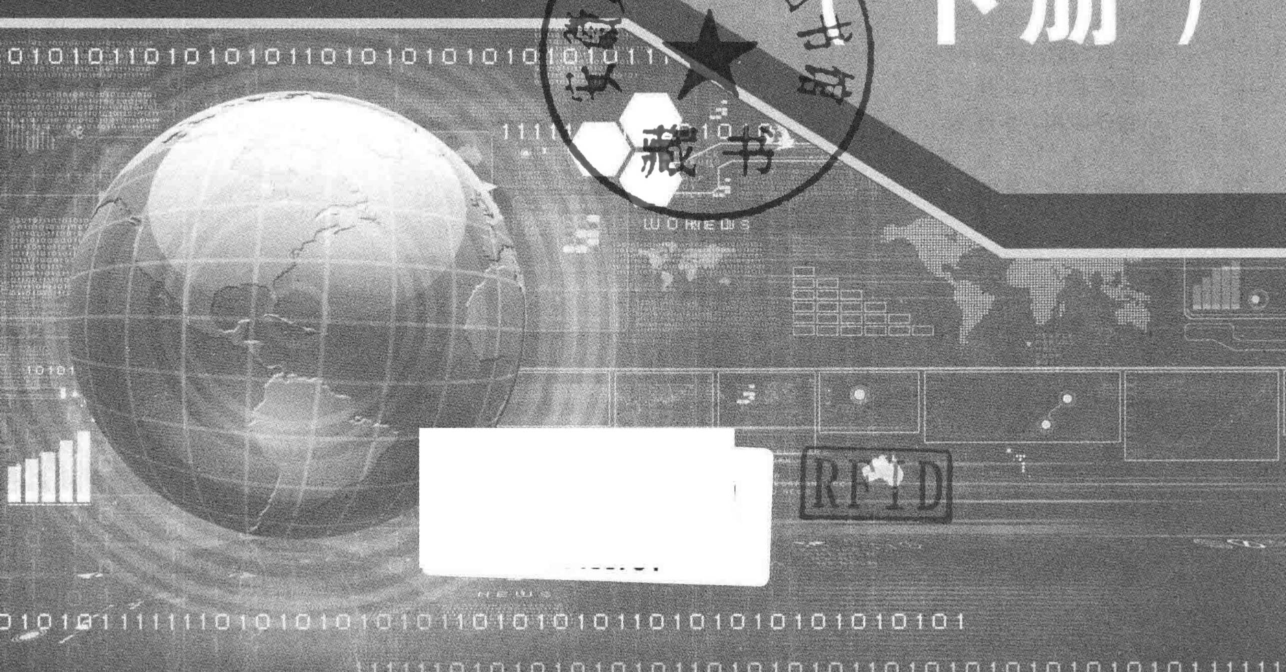
清华大学出版社

郭智莲 齐琼 吴静杰◎主编 褚万霞 张广计◎副主编

经济数学

微积分辅导及习题解答

（下册）



清华大学出版社
北京

内容简介

本书根据清华大学出版社出版的《经济数学——微积分(下册)》编写，分为四章。每章分为四个板块："内容概要"列出了每章的基本概念、重要公式和定理；"典型例题"是从历年考试学生易错、易失分和历年研究生入学考试试题中精选出来的题目，并有详细的解答过程；"本章教材习题解答"对《经济数学——微积分(下册)》的课后习题进行了详细的解答，部分习题附带了注释，旨在帮助读者顺利完成习题的同时能够做到举一反三，对知识点和计算技巧有具体的认识和掌握；"同步自测题及参考答案"是为读者检查学习效果、提高应试能力而设计的，这部分题目具有阶梯性，通过完成这部分题目，读者可以进一步加深对所学基本概念、基本定理和基本运算技巧的理解和掌握，增强计算能力。

本书可供高等院校经济、管理等文科专业的学生使用，也可供相关专业学生及读者自学使用。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 下册，微积分辅导及习题解答/郭智莲，齐琼，吴静杰主编. —北京：清华大学出版社，2016

ISBN 978-7-302-44076-5

Ⅰ. ①经…　Ⅱ. ①郭…　②齐…　③吴…　Ⅲ. ①经济数学-高等学校-教学参考资料　②微积分-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. ①F224.0　②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 132445 号

责任编辑：汪　莉
封面设计：刘　超
版式设计：文森时代
责任校对：赵丽杰
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：10　　**字　　数**：219 千字
版　　次：2016 年 11 月第 1 版　　**印　　次**：2016 年 11 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：26.00 元

产品编号：063639-01

前　言

微积分是经济、管理等专业的一门非常重要的专业课，也是硕士研究生入学考试的必考科目之一。而本课程的部分内容对有些读者，特别是对数学基础薄弱的读者来说，有一定的难度。为了满足广大读者学习的需要，我们根据自己多年的教学经验编写了本书。

本书按照清华大学出版社出版的《经济数学——微积分(下册)》的章节顺序，分为四章，每章分为四个板块。“内容概要”列出了每章的基本概念、重要公式和定理；“典型例题”是从历年考试学生易错、易失分和历年研究生入学考试试题中精选出来的题目，并有详细的解答过程；“本章教材习题解答”对《经济数学——微积分(下册)》的课后习题进行了详细的解答，部分习题附带了注释，旨在帮助读者顺利完成习题的同时能够做到举一反三，对知识点和计算技巧有具体的认识和掌握；“同步自测题及参考答案”是为读者检查学习效果、提高应试能力而设计的，这部分题目具有阶梯性，通过完成这部分题目，读者可以进一步加深对所学基本概念、基本定理和基本运算技巧的理解和掌握，增强计算能力。

全书共四章，第七章由郭智莲和张广计编写；第八章由吴静杰和齐琼编写；第九章由齐琼编写；第十章由褚万霞编写。郭智莲、齐琼、吴静杰担任主编；褚万霞、张广计担任副主编。

本书是根据编者多年的教学实践与经验整理编写的，希望能对学习《经济数学——微积分(下册)》的读者有所帮助。不妥之处，恳请读者指正。

编者

2016 年 3 月

目　　录

第七章　无穷级数 …… 1
内容概要 …… 1
典型例题 …… 6
本章教材习题解答 …… 12
同步自测题及参考答案 …… 28
自测题 …… 28
参考答案 …… 29
第八章　多元函数 …… 33
内容概要 …… 33
典型例题 …… 35
本章教材习题解答 …… 42
同步自测题及参考答案 …… 65
自测题 …… 65
参考答案 …… 67
第九章　二重积分 …… 71
内容概要 …… 71
典型例题 …… 74
本章教材习题解答 …… 77
同步自测题及参考答案 …… 95
自测题 …… 95
参考答案 …… 96

第十章　微分方程与差分方程 …… 100
内容概要 …… 100
典型例题 …… 105
本章教材习题解答 …… 119
同步自测题及参考答案 …… 146
自测题 …… 146
参考答案 …… 147
参考文献 …… 154

第七章　无 穷 级 数

内 容 概 要

1. 无穷级数的相关定义

(1)一般地,把给定数列$\{u_n\}$所有项相加得到的式子

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{7.1}$$

称为无穷级数(简称级数). 其中第 n 项 u_n 称为级数的通项,式(7.1)也可简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

(2)把级数前 n 项的和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为级数的(第 n 次)部分和. 部分和

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

构成一个数列. 如果部分和数列$\{S_n\}$的极限存在,即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$($S$ 为常数),则称级数(7.1)收敛,其和为 S(或收敛于 S),可记为 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. 如果数列$\{S_n\}$的极限不存在,则称级数(7.1)发散,发散级数没有和.

(3)当级数收敛时,其和与部分和的差

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数的余项. 用 S_n 作为 S 的近似值所产生的误差,就是$|R_n|$.

2. 无穷级数的基本性质

(1)如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S、W,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛,且

和为 $S\pm W$.

(2)如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,和为 S,则它的每一项都乘以一个不为零的常数 k 后,所得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛,且和为 kS.

(3)在级数中去掉、加上或改变有限项,不会改变级数的敛散性.

(4)如果一个级数收敛,则对这个级数的项任意加括号后所得到的级数也收敛,且其和不变.

(5)如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

3. 正项级数

(1)定义:如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件 $u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则称其为正项级数.

(2)正项级数敛散性判别方法.

正项级数判敛基本定理:正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

比较判别法:如果两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的通项满足 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,则

①当后者收敛时,前者也收敛;

②当前者发散时,后者也发散.

比值判别法:如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n>0,n=1,2,\cdots)$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$,则

①当 $l<1$ 时,级数收敛;

②当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时,级数发散;

③当 $l=1$ 时,级数可能收敛,也可能发散(这意味着此法失效,须用别的方法进行判定).

根值判别法:如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$,则

①当 $l<1$ 时,级数收敛;

②当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时,级数发散;

③当 $l=1$ 时,级数可能收敛,也可能发散(定理失效情形).

4. 交错级数

(1)定义:正负项交替出现,这种级数称为交错级数,它的形式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+u_{2k-1}-u_{2k}+\cdots \tag{7.2}$$

式中,$u_n>0(n=1,2,\cdots)$.

(2)莱布尼茨定理:如果交错级数(7.2)满足条件

①$u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$

②$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

则级数收敛,和 $S\leqslant u_1$,余项的绝对值$|R_n|\leqslant u_{n+1}$.

(3)绝对收敛与条件收敛

定理 1　如果任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项绝对值组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

定理 2　如果任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$,则

①当 $l<1$ 时,级数绝对收敛;

②当 $l>1$ 时,级数发散.

定理 3　绝对收敛级数经改变项的位置后构成的级数也收敛,且与原级数有相同的和(即绝对收敛级数的项具有可交换性).

5. 幂级数

(1)幂级数的相关定义

定义 1　$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{7.3}$$

称为关于 $x-x_0$ 的幂级数,常数 $a_0,a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$分别称为幂级数的零次项,一次项,二次项,…,$n$ 次项,…的系数.

定义 2　$$a_0+a_1x+a_2x+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{7.4}$$

称为关于 x 的幂级数，常数 $a_0,a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$ 分别称为幂级数的零次项，一次项，二次项，…，n 次项，…的系数.

用自变量的变换 $x-x_0=t$ 可把关于 $x-x_0$ 的幂级数(7.3)化为关于 t 的幂级数(7.4)来研究，因此，以下主要讨论幂级数(7.4).

当自变量 $x=x_0$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 变成数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$，若数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 收敛，则称幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=x_0$ 处收敛，并称点 $x=x_0$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 的收敛点.

定义 3 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的全体收敛点组成的集合 I 称为该幂级数的收敛域.

不难发现，任何幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=0$ 处总是收敛的，从而幂级数的收敛域 I 不是空集.

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 I，当 $x\in I$ 时把幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 x 处的和记为 $S(x)$，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)\qquad(x\in I)$$

则 $S(x)$ 是以 I 为定义域的函数，称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(2)幂级数收敛半径的求法

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数 $a_n\neq0(n=1,2,\cdots)$，且存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$$

则当 $l=0$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 $R=+\infty$；当 $l=+\infty$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 $R=0$；当 $0<l<+\infty$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 $R=\dfrac{1}{l}$.

(3)幂级数的性质

①如果幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $R_1>0$ 和 $R_2>$

0，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=f(x)\pm g(x)$，幂级数的收敛半径 R 等于 R_1 与 R_2 中较小的一个.

②幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

③幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并有逐项积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^x s(t)\mathrm{d}t&=\int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\Big]\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\ (x\in I),\end{aligned}$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

④幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且有逐项求导公式

$$S'(x)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\qquad(|x|<R)$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

(4)函数的幂级数展开式

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在，则对于任意的正整数 n，泰勒公式都成立. 当 $n\to\infty$ 时，如果 $R_n(x)\to 0$，则得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\Big[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Big]$$

由于上式右端方括号内的式子是级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的前 $n+1$ 项组成的部分和式，所以此级数收敛，且以 $f(x)$ 为其和. 因此函数 $f(x)$ 可以写为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\tag{7.5}$$

它叫作函数 $f(x)$ 的泰勒级数. 特别地，当 $x_0=0$ 时，式(7.5)成为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\tag{7.6}$$

它称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

将函数 $f(x)$ 展开成 x[或 $(x-x_0)$]的幂级数的步骤如下：

①求出 $f(x)$ 的各阶导数值 $f^{(n)}(0)$[或 $f^{(n)}(x_0)$]$(n=1,2,3,\cdots)$.

②写出幂级数(7.6)[或(7.5)],并求出其收敛域.

③检验 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 在收敛域内是否成立. 如果成立,则 $f(x)$ 在此收敛域内有幂级数展开式(7.6)[或(7.5)].

典型例题

题型一　利用定义判定级数的敛散性

例 7.1　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

解:
$$S_n=\frac{1}{(1+1)(1+2)}+\frac{1}{(2+1)(2+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{2}$

所以此级数收敛,它的和是 $\dfrac{1}{2}$.

分析:将通项拆成两项之差,以求得前 n 项和 S_n,这种方法叫拆项法,当求 S_n 有困难时,要采取灵活的策略.

题型二　正项级数的敛散性(比较判别法,比值判别法,根值判别法)

例 7.2　判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解:因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}<1$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,根据比较判别法可知原级数收敛.

例 7.3 说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)!}$ 是收敛的.

解:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0<1$,

根据比值判别法可知此级数收敛.

例 7.4 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\left(\dfrac{a+1}{2}\right)^n$ $(a>-1)$ 的敛散性.

解:由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2\left(\dfrac{a+1}{2}\right)^n}=\dfrac{a+1}{2}$,所以

当$\dfrac{a+1}{2}<1$,即$-1<a<1$时,级数收敛.

当$\dfrac{a+1}{2}>1$,即 $a>1$ 时,级数发散.

当$\dfrac{a+1}{2}=1$,即 $a=1$ 时,$u_n=n^2\not\to 0(n\to\infty)$,级数发散.

题型三 交错级数的敛散性判定(莱布尼茨判别定理)

例 7.5 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n-1}$ 的敛散性.

解:令 $u_n=\dfrac{1}{2n-1}$,由于 $u_n=\dfrac{1}{2n-1}>\dfrac{1}{2n+1}=u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,且

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n-1}=0$,则由莱布尼茨判别定理可知原级数收敛.

题型四 讨论参数对绝对收敛、条件收敛、发散的影响

例 7.6 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$,讨论 x 取何值时,绝对收敛,条件收敛;x 取何值时,发散.

解:(1)当$|x|=1$时,$|u_n|=\dfrac{1}{2}\not\to 0(n\to\infty)$,故$|x|=1$时,级数发散.

(2)当 $0<x<1$ 时,此时级数为正项级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}}\cdot\frac{1+x^{2n}}{x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}}=x<1$$

则由比值判别法知,级数收敛.

(3)当 $x>1$ 时,此时级数为正项级数.由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n+1}}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}}+1}=\frac{1}{x}<1$$

则由比值判别法知,级数收敛.

(4)当 $x=0$ 时,级数的和为 0,从而收敛.因此当 $x\geqslant 0$,且 $x\neq 1$ 时,级数收敛.

(5)当 $x<0$ 时,$u_n=(-1)^n\dfrac{(-x)^n}{1+x^{2n}}$,$|u_n|=\left|(-1)^n\dfrac{(-x)^n}{1+x^{2n}}\right|=\dfrac{(-x)^n}{1+x^{2n}}$为正项级数.

同理可证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ $(x<0$ 且 $x\neq -1)$ 收敛.

综上所述,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\begin{cases}\text{绝对收敛,} & \text{当 } |x|\neq 1 \text{ 时;}\\ \text{发散,} & \text{当 } |x|=1 \text{ 时.}\end{cases}$

题型五　求幂级数的收敛域

例 7.7　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n}}\cdot x^{2n}$ 的收敛域.

解:解法(一)　$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{2^{2(n+1)}}\cdot x^{2n+2}}{\frac{1}{2^{2n}}\cdot x^{2n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}|x|^2$,所以

当$\dfrac{1}{4}|x|^2<1$,即$|x|<2$ 时,原级数收敛;

当$\dfrac{1}{4}|x|^2>1$,即$|x|>2$ 时,原级数发散;

当$\dfrac{1}{4}|x|^2=1$,即$|x|=2$ 时,原级数变成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n}}2^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$,因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$ 的一般项随着 $n\to\infty$时不趋于零,所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$ 发散.因此原幂级数的收敛域为$(-2,2)$.

分析:当幂级数缺少无穷多项时,可以利用比值判别法或根值判别法得出收敛半径.

解法(二)　令 $x^2=t$,原级数变成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n}}t^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2(n+1)}}}{\frac{1}{2^{2n}}}=\frac{1}{4}$$

所以，当$|t|<4$，即$|x|=\sqrt{|t|}<2$时，原级数收敛，进一步可知原级数的收敛半径$R=2$. 当$|x|=2$时，同解法(一)的讨论，可知此时幂级数发散. 所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}x^{2n}$的收敛域为$(-2,2)$.

分析：作变量代换将原幂级数化成标准型幂级数，直接利用公式求收敛半径.

例 7.8 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$的收敛半径.

解：由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2[2+(-1)^n]}=\begin{cases}\frac{1}{6}, & n\text{ 为偶数}\\ \frac{3}{2}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在，故不能直接用公式求其收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}\frac{|x|}{2}=\frac{|x|}{2}$$

所以，当$\frac{|x|}{2}<1$，即$|x|<2$时，原级数收敛；当$\frac{|x|}{2}>1$，即$|x|>2$时，原级数发散. 因此幂级数的收敛半径$R=2$.

分析：当$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$不存在时，不能用比值判别法求收敛半径，可采用根值判别法.

题型六　求幂级数的和函数(利用逐项求导，逐项积分的方法)

例 7.9 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数.

解：不难发现$S(0)=0$，从而只需求$0<|x|<1$时和函数$S(x)$的表达式.

注意：$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{x}S_1(x)-\frac{x^2}{1-x^2}$

式中，$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\in(-1,1)$.

逐项求导,得 $$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},x\in(-1,1)$$

将上式两端的 x 改写成 t,分别从 0 到 $x\in(-1,1)$求积分,可得

$$S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in(-1,1)$$

又因 $S_1(0)=0$,于是 $S_1(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in(-1,1)$.

综合以上讨论,即得 $S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}, & 0<|x|<1\end{cases}$

分析:求幂级数的和函数前,应先求出幂级数的收敛域.

例 7.10 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的和函数.

解:记 $u_n=n(n+1)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$,故收敛半径 $R=1$. 显然当 $x=\pm1$ 时,原级数发散,故收敛域为$(-1,1)$.

记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n$

解法(一) $S_1(x)=\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)\int_0^x t^n\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ $(|x|<1)$

记 $S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

将 $S_2(x)$在 0 到 x 上积分得 $\int_0^x S_2(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

所以 $S_2(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$,于是 $S_1(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}$

所以 $S(x)=S_1'(x)=\left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2x}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$

解法(二) $$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)[(n+2)-2]x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+2})''-2\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)''-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{x^3}{1-x}\right)''-2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^3}\quad(|x|<1)$$

题型七　将函数展开成幂级数(利用变量代换、代数运算、逐项求导、逐项积分等方法将问题转换为简单的、已知的函数展开)

例 7.11　将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数,并指出其收敛区间.

解:首先将函数 $f(x)$ 作换元 $x=t-1$,即 $t=x+1$,得

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}=\frac{1}{(t+1)^2-3(t+1)-4}=\frac{1}{t^2-t-6}$$
$$=\frac{1}{(t-3)(t+2)}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2+t}+\frac{1}{3-t}\right)$$

利用已知的幂级数展开式 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\quad(|x|<1)$ 可得

$$\frac{1}{2+t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}t^n\quad(|t|<2)$$

$$\frac{1}{3-t}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^{n+1}}\quad(|t|<3)$$

因此 $f(x)=-\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{3^{n+1}}\right]t^n=-\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{3^{n+1}}\right](x-1)^n$ 的收敛区间为$(0,3)$.

例 7.12　将函数 $y=\ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数,并指出其收敛区间.

解:由 $1-x-2x^2=(1-2x)(1+x)$ 知 $\ln(1-x-2x^2)=\ln(1-2x)+\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\quad(|x|<1)$$

$$\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-2x)^n}{n}\quad\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$$

于是有 $\ln(1-x-2x^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+(-1)^{n+1}\dfrac{(-2x)^n}{n}\right]$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n,\ \text{其收敛区间为}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

分析:直接把函数展开成幂级数时,计算量大,且 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 证明有难度,往往利用转化成已有幂级数展开式,从而套用公式.