文都教育®

2017
考研数学

15年真题解析与方法指导

Mathematics 数学一

文都考研数学命题研究组 策划 汤家凤 编著

- 名师解析透彻易懂 详尽归纳典型方法
- 方法点评开拓思路 抓住考点提高能力
- 2002-2016年共15年真题全收集

超值服务： 全书免费网络邮箱答疑

Mathematics

中国原子能出版社

文都教育®

2017

考研数学

15年真题解析与方法指导

数学一

文都考研数学命题研究组 策划 汤家凤 编著

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学15年真题解析与方法指导. 数学一 / 汤家凤编著. —北京：中国原子能出版社，2016.2

ISBN 978-7-5022-7151-0

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第044689号

考研数学15年真题解析与方法指导. 数学一

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100048)
责任编辑	孙凤春
特约编辑	李　焕　邱晓春
印　　刷	北京市兴城福利印刷厂
经　　销	全国新华书店
开　　本	787mm×1092mm 1/16
印　　张	13.75　　字　数　340千字
版　　次	2016年2月第1版　2016年4月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5022-7151-0　　定　价　26.00元

网址：http://www.aep.com.cn　　E-mail：atomep123@126.com

发行电话：010-68452845

版权所有　侵权必究

郑重声明

买正版图书　听精品课程

由文都考研数学命题研究组策划、汤家凤老师编著的《考研数学15年真题解析与方法指导·数学一》《考研数学15年真题解析与方法指导·数学二》《考研数学15年真题解析与方法指导·数学三》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;

4. 全国各地举报电话:010－88820419,13488713672

电子邮箱:tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www.wendu.com)可听取汤家凤老师的精品课程。

中国原子能出版社

世纪文都教育科技集团股份有限公司

授权律师:北京市安诺律师事务所

刘　岩

2016年4月

前 言 preface

全国硕士研究生招生考试工程类专业需要参加数学一、数学二的考试，其中数学要求较高的专业参加数学一的考试（如土木工程、电子、机械等），数学要求较低的专业参加数学二的考试（如化工、材料等）。数学课程因为其分值较高（总分150分）、难度较大而在整个研究生招生考试中起着举足轻重的作用。

数学复习经过上半年的基础复习和暑假的强化复习后，需要检查自己的复习效果，同时需要逐步增加考生的临场适应性。历年真题是最权威的练习材料，选择一本好的真题解析，通过适当的使用方法可以大幅度提高自己的临场适应性和考试成绩，可以明确自己的复习重点、发现自己的不足之处，使数学的复习日臻完善。

本书的解析部分是作者历经20余年考研数学辅导经验的总结。**本书的特点有：**

1. 真题跨年度较长

本书对2002—2016年共15年真题进行了详细解析。要达到理想的复习效果，真题练习的年份不能太少，15年真题基本涵盖了所有的知识点、重要的题型、重要的方法，使考生更好地掌握考研数学的命题特点和考试重点及方法。

2. 对重点题型力求做到方法总结

本书解析部分力求对重要的题型和重要考点进行方法总结与点评，便于考生进行归纳总结，对重要方法和题型有更系统的理解和掌握。

3. 力求做到一题多解

真题的解析部分力求做到一题多解，同时很多题目给出了作者多年教学过程中总结出的通俗、简明的方法。

本书的使用方法如下：

1. 从9月中旬开始，每周争取练习两套真题，从2002年开始往后练习，不要在短时间内突击做完，那样复习效果不佳。

2. 每套必须在规定的时间（3小时）内完成，对运算能力强的同学，最好在两个半小时内完成。

3. 每套真题完成后，首先检查结果的正确性，对做错的部分一定要找出原因，进行巩固复习，保证今后不再发生同样的错误。

冲刺阶段除练习真题外，大家还可以适当找一点模拟试题练习，有些模拟试题对考试趋势有一定的预测性，这样可以使得复习效果更好。本书在成书的过程中得到文都同仁的大力支持与鼓励，在此表示衷心感谢，限于作者水平有限，不足之处难免，欢迎广大读者批评指正。

汤家凤

2016年4月于南京

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 1
2002 年数学(一)真题解析 …… 5
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 15
2003 年数学(一)真题解析 …… 19
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 30
2004 年数学(一)真题解析 …… 34
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 45
2005 年数学(一)真题解析 …… 49
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 59
2006 年数学(一)真题解析 …… 63
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 71
2007 年数学(一)真题解析 …… 75
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 85
2008 年数学(一)真题解析 …… 89
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 98
2009 年数学(一)真题解析 …… 103
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 114
2010 年数学(一)真题解析 …… 118
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 129
2011 年数学(一)真题解析 …… 133
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 143
2012 年数学(一)真题解析 …… 147
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 156
2013 年数学(一)真题解析 …… 160
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 168

2014 年数学(一)真题解析 ······ 172
2015 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 ······ 182
2015 年数学(一)真题解析 ······ 186
2016 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 ······ 193
2016 年数学(一)真题解析 ······ 197

2002 年全国硕士研究生入学统一考试
数学（一）试题

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分. 请将答案填在题中横线上.）

(1) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} =$ ________.

(2) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$ ________.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是________.

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$，则 $a=$ ________.

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=$ ________.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求，请将所选项前的字母填在题后的括号内.）

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续；

③$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；

④$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有（　　）.

(A)②⇒③⇒①　　(B)③⇒②⇒①

(C)③⇒④⇒①　　(D)③⇒①⇒④

(2) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$（　　）.

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 收敛性根据所给条件不能判定

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则（　　）.

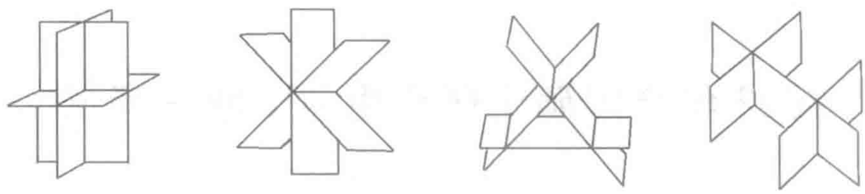
(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$

(4) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3$，它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三张平面可能的位置关系为（　　）.



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(5) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度函数分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$,则(　　).

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度函数.

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度函数.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数,且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$,若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小,试确定 a,b 的值.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}\,dt$ 在点$(0,0)$处的切线相同,写出此切线方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dx dy$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

七、(本题满分 7 分)

(1) 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$；

(2) 利用(1) 的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 7 分)

设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1) 中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

九、(本题满分 6 分)

已知四阶方阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$均为四维列向量,其中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

十、(本题满分 8 分)

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶方阵.

(1) 如果$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$相似,试证$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的特征多项式相等;

(2) 举一个二阶方阵的例子说明(1) 的逆命题不成立;

(3) 当$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为实对称矩阵时,试证(1) 的逆命题成立.

十一、(本题满分 7 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

对 X 独立地重复观察 4 次,用 Y 表示观察值大于$\dfrac{\pi}{3}$的次数,求 Y^2 的数学期望.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中$\theta\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$是未知参数,利用总体 X 的如下样本值 3,1,3,0,3,1,2,3,求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

2002 年数学(一) 真题解析

一、填空题

(1)【答案】 1.

【解】 $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_{e}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{e}^{+\infty}=1.$

(2)【答案】 -2.

【解】 **方法一** 将 $x=0$ 代入 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 中得 $y=0$.

$e^y+6xy+x^2-1=0$ 两边关于 x 求导得 $e^y\frac{dy}{dx}+6y+6x\frac{dy}{dx}+2x=0$,

将 $x=0,y=0$ 代入得 $y'(0)=0$;

$e^y\frac{dy}{dx}+6y+6x\frac{dy}{dx}+2x=0$ 两边关于 x 求导得

$$e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+e^y\frac{d^2y}{dx^2}+12\frac{dy}{dx}+6x\frac{d^2y}{dx^2}+2=0,$$

将 $x=0,y=0,y'(0)=0$ 代入得 $y''(0)=-2$.

方法二 将 $x=0$ 代入 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 中得 $y=0$.

$e^y+6xy+x^2-1=0$ 两边关于 x 求导得

$e^y\frac{dy}{dx}+6y+6x\frac{dy}{dx}+2x=0$,解得$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+6y}{6x+e^y}$,

将 $x=0,y=0$ 代入得 $y'(0)=0$;

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(2+6\frac{dy}{dx}\right)(6x+e^y)-(2x+6y)\left(6+e^y\frac{dy}{dx}\right)}{(6x+e^y)^2},$$

将 $x=0,y=0,y'(0)=0$ 代入得 $y''(0)=-2$.

(3)【答案】 $y=\sqrt{x+1}$.

【解】 **方法一** 令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,方程 $yy''+y'^2=0$ 化为 $yp\frac{dp}{dy}+p^2=0$.

因为 $p\neq 0$,所以$\frac{dp}{dy}+\frac{1}{y}p=0$,解得 $p=C_1e^{-\int\frac{1}{y}dy}=\frac{C_1}{y}$.

由 $y(0)=1,y'(0)=\frac{1}{2}$,得 $C_1=\frac{1}{2}$,于是 $yy'=\frac{1}{2}$,解得$\frac{1}{2}y^2=\frac{x}{2}+C$.

由 $y(0)=1$,得 $C=\frac{1}{2}$,故 $y=\sqrt{x+1}$.

方法二 由 $yy''+y'^2=0$,得$(yy')'=0$,解得 $yy'=C_1$.

由 $y(0)=1,y'(0)=\frac{1}{2}$,得 $C_1=\frac{1}{2}$,即 $yy'=\frac{1}{2}$ 或$(y^2)'=1$,解得 $y^2=x+C_2$.

由 $y(0)=1$,得 $C_2=1$,故满足初始条件的特解为 $y=\sqrt{x+1}$.

方法点评:本题考查可降阶的高阶微分方程的求解,可降阶的高阶微分方程有:

(1)$y^{(n)}=f(x)$,进行 n 次不定积分即可.

(2) $f(x,y',y'')=0$，令 $y'=p$，原方程化为 $f(x,p,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x})=0$.

(3) $f(y,y',y'')=0$，令 $y'=p$，原方程化为 $f(y,p,p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})=0$.

可降阶的高阶微分方程有时可采用简单技巧，如：

$xy''+y'=(xy')'$， $yy''+y'^2=(yy')'$， $\frac{yy''-y'^2}{y^2}=(\frac{y'}{y})'$ 等.

(4)【答案】 2.

【解】 **方法一** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{pmatrix}$，因为二次型经过正交变换得标准形为 $f=6y_1^2$，

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=0$，由 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 得 $a=2$.

方法二 因为二次型 f 经过正交变换化为 $f=6y_1^2$，所以 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=0$，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{vmatrix}=(a+4)(a-2)^2=0$，得 $a=-4$ 或 $a=2$.

当 $a=-4$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+4&-2&-2\\-2&\lambda+4&-2\\-2&-2&\lambda+4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+6)^2=0$，

得 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=-6$，矛盾，故 $a=2$.

方法三

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，

而 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-2&-2\\-2&\lambda-a&-2\\-2&-2&\lambda-a\end{vmatrix}=\lambda^3-3a\lambda^2+3(a^2-4)\lambda-(a+4)(a-2)^2$，

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\lambda^3-6\lambda^2$，比较系数得 $a=2$.

方法点评：化二次型为标准形有配方法和正交变换法，注意如下两点：

(1) 配方法化二次型为标准形时，标准形不唯一，标准形系数中正、负系数个数是唯一的；

(2) 正交变换法化二次型为标准形，在不考虑系数次序时，标准形是唯一的，标准形的系数即为二次型矩阵的特征值.

(5)【答案】 4.

方法一 方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的充要条件是 $\Delta=16-4X<0$，或 $X>4$，

由题意得 $P\{X>4\}=\frac{1}{2}$，若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{X>\mu\}=P\{X\leqslant\mu\}=\frac{1}{2}$，故 $\mu=4$.

方法二

方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的充要条件是 $\Delta=16-4X<0$，或 $X>4$，由题意得 $P\{X>4\}=\frac{1}{2}$.

再由 $\frac{1}{2}=P\{X>4\}=1-P\{X\leqslant 4\}=1-\Phi(\frac{\mu-4}{\sigma})$ 得 $\Phi(\frac{\mu-4}{\sigma})=\frac{1}{2}$，

于是 $\frac{\mu-4}{\sigma}=0$，故 $\mu=4$.

方法点评：正态分布是概率统计重要的考查点，熟练掌握如下结论：

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

(1) $P\{X>\mu\}=P\{X\leqslant\mu\}=\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

(3) $P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$.

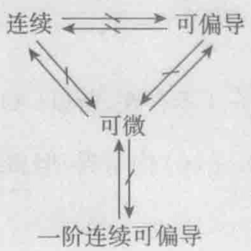
二、选择题

(1)【答案】 (A).

【解】 若 $f(x,y)$ 两个偏导数连续，则 $f(x,y)$ 一定可微，反之不对；

若 $f(x,y)$ 可微，则 $f(x,y)$ 连续且可偏导，反之不对，应选(A).

方法点评：二元函数 $f(x,y)$ 在一点处的连续性、可偏导性、可微性、一阶连续可偏导性之间的关系图如下：



(2)【答案】 (C).

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$，

$$S_n=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 收敛，(A)，(D) 不对；

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right),$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$ 得 $\frac{1}{u_n}\sim\frac{1}{n}$，$\frac{1}{u_{n+1}}\sim\frac{1}{n+1}$，

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_{n+1}}$ 都发散，

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$发散，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$条件收敛，应选(C).

(3)**【答案】** (B).

【解】 **方法一** 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$，取$\varepsilon=\frac{A}{2}$，存在$X>0$，当$x>X$时，有

$$|f'(x)-A|<\frac{A}{2},$$

从而$f'(x)>\frac{A}{2}$.

当$x>X$时，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)-f(X)=f'(\xi)(x-X)>\frac{A}{2}(x-X),\text{其中 } X<\xi<x,$$

于是$f(x)>f(X)+\frac{A}{2}(x-X)$，两边取极限得$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与$f(x)$在$(0,+\infty)$内有界矛盾.

同理，若$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A<0$，则有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，与$f(x)$在$(0,+\infty)$内有界矛盾，应选(B).

方法二 取$f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$，

由$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$及$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$得$f(x)$在$(0,+\infty)$内有界.

$f'(x)=\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}$，

因为$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2})=1$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2})$不存在，所以(A)、(C)不正确；

取$f(x)=\sin x$，显然$f(x)$在$(0,+\infty)$内有界，但$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1$，(D)不正确，应选(B).

(4)**【答案】** (B).

【解】 因为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

因为$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，所以方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$有无数个解，即三个平面有无数个交点，因为(A)只有一个交点，而(C)，(D)没有交点，应选(B).

(5)**【答案】** (D).

【解】 **方法一** 因为$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=2\neq1$，

所以$f_1(x)+f_2(x)$一定不是某个随机变量的密度函数，(A)不对；

设$X_1\sim E(1)$，$X_2\sim E(1)$，则

$$f_1(x)=f_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}\quad f_1(x)f_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0,\\ \mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\end{cases}$$

因为$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq 1$，所以 $f_1(x) f_2(x)$ 不是某个随机变量的密度函数，(B) 不对；

因为 $F_1(+\infty) + F_2(+\infty) = 2 \neq 1$，所以 $F_1(x) + F_2(x)$ 不是某个随机变量的分布函数，(C) 不对，应选(D).

方法二 因为$F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个随机变量的分布函数，所以$0 \leqslant F_1(x) \leqslant 1$，$0 \leqslant F_2(x) \leqslant 1$，$F_1(x)$，$F_2(x)$ 单调不减，$F_1(x)$，$F_2(x)$ 右连续且

$$F_1(-\infty) = F_2(-\infty) = 0, \quad F_1(+\infty) = F_2(+\infty) = 1,$$

于是 $F_1(x)F_2(x)$ 满足：$0 \leqslant F_1(x)F_2(x) \leqslant 1$，$F_1(x)F_2(x)$ 单调不减，$F_1(x)F_2(x)$ 右连续且 $F_1(-\infty)F_2(-\infty) = 0$，$F_1(+\infty)F_2(+\infty) = 1$，故 $F_1(x)F_2(x)$ 为某个随机变量的分布函数，应选(D).

方法点评：判断函数 $F(x)$ 是否为某个随机变量的分布函数往往需验证四个特征：

(1)$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$；

(2)$F(x)$ 单调不减；

(3)$F(x)$ 右连续；

(4)$F(-\infty) = 0$，$F(+\infty) = 1$.

判断可积函数 $f(x)$ 是否为某连续型随机变量的密度函数往往需验证两个特征：

(1)$f(x) \geqslant 0$；

(2)$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = 1$.

三、【解】 **方法一** 等式 $af(h) + bf(2h) - f(0) = o(h)$ 两边令 $h \to 0$ 得$(a+b-1)f(0) = 0$，由 $f(0) \neq 0$ 得 $a + b - 1 = 0$；

由$\frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = \frac{o(h)}{h}$ 得$\lim\limits_{h \to 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = 0$，

而$\lim\limits_{h \to 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{af(h) + bf(2h) - (a+b)f(0)}{h}$

$= a \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2b \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2h) - f(0)}{2h} = (a + 2b) f'(0)$，

由 $f'(0) \neq 0$ 得 $a + 2b = 0$.

由$\begin{cases} a + b = 1, \\ a + 2b = 0 \end{cases}$得 $a = 2$，$b = -1$.

方法二 由 $f(x)$ 连续可导得 $f(h) = f(0) + f'(0)h + o(h)$，
$f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + o(h)$，代入 $af(h) + bf(2h) - f(0) = o(h)$ 得
$(a + b - 1)f(0) + (a + 2b)f'(0)h = o(h)$，

于是$\begin{cases} a + b = 1, \\ a + 2b = 0. \end{cases}$ 故 $a = 2$，$b = -1$.

四、【解】 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^{\arctan x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\arctan^2 x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$， $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^{\arctan x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \Big|_{x=0} = 1$，

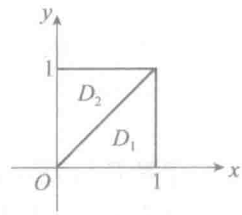
因为曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ 在(0,0) 处切线相同，所以 $f'(0) = 1$ 且 $f(0) = 0$.

所以切线方程为 $y = x$，

而且$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)}{\dfrac{2}{n}}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{2}{n}}=2f'(0)=2.$

五、【解】 如图，令$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 1\}$，



五题图

$$\begin{aligned}\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dxdy&=\iint\limits_{D_1}e^{x^2}\,dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{y^2}\,dxdy\\&=\int_0^1 e^{x^2}\,dx\int_0^x dy+\int_0^1 e^{y^2}\,dy\int_0^y dx\\&=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx+\int_0^1 ye^{y^2}\,dy\\&=2\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1.\end{aligned}$$

六、【解】 (1) $P(x,y)=\dfrac{1}{y}[1+y^2f(xy)]=\dfrac{1}{y}+yf(xy)$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy),$$

$$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]=xf(xy)-\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy),$$

因为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以曲线积分$I$与路径$L$无关；

(2) **方法一**
$$\begin{aligned}I&=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy\\&=\int_L\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy+\int_L\frac{1}{y}yf(xy)dx+xf(xy)dy,\end{aligned}$$

$$\int_L\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy=\int_{(a,b)}^{(c,d)}d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}\Big|_{(a,b)}^{(c,d)}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd},$$

令$F(u)$为$f(u)$的原函数，则

$$\begin{aligned}\int_L\frac{1}{y}yf(xy)dx+xf(xy)dy&=\int_{(a,b)}^{(c,d)}f(xy)d(xy)\\&=\int_{ab}^{cd}f(u)du=F(cd)-F(ab)=0,\end{aligned}$$

故$I=\dfrac{bc-ad}{bd}$.

方法二 因为$\displaystyle\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$与路径无关，

所以
$$\begin{aligned}I&=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy\\&=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]dx+\int_b^d\frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]dy\\&=\frac{c-a}{b}+\int_a^c f(bx)d(bx)+\int_b^d f(cy)d(cy)-\int_b^d\frac{c}{y^2}dy\end{aligned}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com