



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

Discussion from the Multidimensional of Pythagoras Theorem
—The Theory of Simplex Rambling

从高维 Pythagoras 定理谈起 ——单形论漫谈

沈文选 杨清桃 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

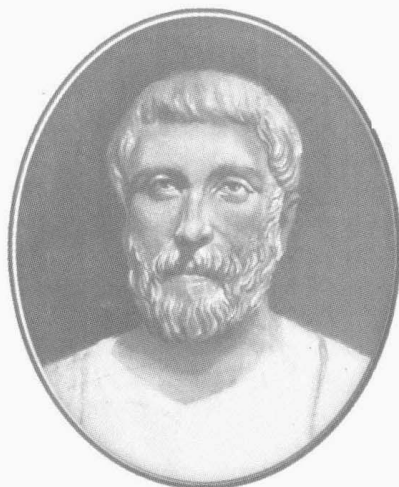
现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

Discussion from the Multidimensional of Pythagoras Theorem
—The Theory of Simplex Rambling

从高维Pythagoras定理谈起

——单形论漫谈

沈文选 杨清桃 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

1 维单形就是线段,2 维单形就是三角形,3 维单形就是四面体.从三角形、四面体到高维单形有一系列有趣的结论和优美的公式与不等式,本书详尽地介绍了 1 000 余个结论、公式、不等式及其推导、证明.从三角形到四面体,再到高维单形,其周界从线段变到三角形面,再变到体、超体,其两边夹角变到线线角、线面角、面面角,再变到维度角、级别角等,这就要用到新的数学工具来处理.本书系统地介绍了单形的一般概念、特性及其理论,介绍了从单形的周界向量表示到引入 k 重向量,从单形的顶点向量表示到引入重心坐标,从研究同一单形中的有趣几何关系到研究多个单形间的奇妙几何关系式,引导读者进入用代数方法研究几何问题的神奇数学世界.

本书可供初等数学、教育数学、凸体几何研究工作者及数学爱好者参考,适于中学数学教师、师范院校数学专业的教师和学生,也可以作为有关专业研究生的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

从高维 Pythagoras 定理谈起:单形论漫谈/沈文选,杨清桃著. — 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.3
(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5370 - 8

I. ①从… II. ①沈… ②杨… III. ①多维空间几何 - 高等师范院校 - 教学参考资料 IV. ①O184

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 094153 号

策划编辑	刘培杰	张永芹
责任编辑	张永芹	刘家琳
封面设计	孙茵艾	
出版发行	哈尔滨工业大学出版社	
社 址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号	邮编 150006
传 真	0451 - 86414749	
网 址	http://hitpress.hit.edu.cn	
印 刷	牡丹江邮电印务有限公司	
开 本	787mm × 960mm	1/16 印张 52.25 字数 573 千字
版 次	2016 年 3 月第 1 版	2016 年 3 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 5603 - 5370 - 8	
定 价	198.00 元	

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

这三本书融进了教育数学思想，
也融进了新课程理念。对于
提高数学教育方向的学生以
及中学数学教师的数学修养，
扩展其数学视野，丰富其数学
文化，都将发挥重要作用。

书祝

沈文选先生新书问世

张中于

2013年9月28日

代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。

真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种社会、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“谁言女子非英雄,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎ 序

文选教授是一位多产的数学通俗读物作家. 他的作品, 重点不在于文学渲染, 人文解读, 而是高屋建瓴, 以拓展青年学子的数学视野, 铸就数学探究的基本功为己任. 这次推出的《从 Cramer 法则谈起——矩阵论漫谈》《从 Stewart 定理的表示谈起——向量理论漫谈》《从高维 Pythagoras 定理谈起——单形论漫谈》三部著作, 就是为一些有志于突破高考藩篱, 寻求更高数学发展的学生们准备的.

中国数学教育正在进入一个新的周期. 21 世纪初的数学课程改革, 正在步入深水区. 单靠大呼隆地从教学方法入手改革课堂教学, 毕竟是走不远的. 数学课堂教学必然要基于数学本身, 揭示数学本质. 如果说, 教学方法相当于烹调技艺, 那么数学内容就相当于食材. 离开食材, 何谈烹调? 一个注重数学内容的数学教育, 正向我们走来. 本书作为青年数学教师的读物, 当有提升

数学素养之特定功效.

文选教授是全国初等数学研究学会的首任理事长,他是初等数学研究、竞赛数学研究、教育数学研究的积极倡导者和实践者.这套书为广大初等数学研究、竞赛数学研究、教育数学研究爱好者提供了丰富的材料,可供参考.

文选教授的这些著作,事关中国数学英才教育的发展.中国高中学生,为了高考得高分,不得不进行反复复习,就地空转.如果走奥赛的路子,也脱不开应试的框框.多年来,那些富有数学才华、又对数学怀有浓厚兴趣的年轻人,没有选择自己数学道路的余地,结果是造成了中国数学英才教育的缺失.反观国外的一些数学才俊,年纪轻轻就涉猎高等数学,徜徉在数学探究的路途上.仅就亚洲来说,香港移民到澳大利亚的陶哲轩,越南的吴宝珠,都已经获得菲尔兹奖.相形之下,当知我们应努力之所在了.

话说回来,本书的内容,虽与高考无直接关系,但却是数学万花丛中的一朵.有花香的熏染,数学功力日增,对升学的侧面效应,恐也不可小看.数学英才,毕竟是大学所瞩目的.最后,我热切期望,本书的读者能够像华罗庚先生所教导的那样,将书读到厚,再从厚读到薄,汲取书中之精华,并在不久的将来,能在中国数坛的预备队里见到他们活跃的身影.

与文选教授合作多年,欣闻他新作问世.写了以上的感想,权作为序.

张奠宙
华东师范大学数学系
2013年5月10日

前言

美丽的数学花园,奇妙的数学花坛,如果去游园,不仅欣赏了纯美的景观,而且可以享受充满数学智慧的精彩游程,开阔我们的视野,优化我们的思维,涤去蒙昧与无知.以至于诺贝尔奖获得者、著名的物理学家杨振宁先生也说出了:“我赞美数学的优美和力量,它有战术的技巧与灵活,又有战略上的雄才远虑,而且,奇迹的奇迹,它的一些美妙要领竟是支配物理世界的基本结构.”

为建设好这数学花园,扩展数学花坛,就要运用张景中院士的教育数学思想,对浩如烟海的数学材料进行再创造,把数学家们的数学化成果改造成学习者易于接受的知识,把数学化过程尽可能变成适合学习者可操作的活动过程,借助操作活动展示数学的优美特征,暴露数学的实质内涵,揭示朴素的数学思考过程,让数学冰冷的美丽转化为火热的思考,将数学抽象的形式转化为具体的案例.这也可以响应张奠宙教

授的倡议:建构符合时代需求的数学常识,享受充满数学智慧的精彩人生.

笔者认为,探讨数学知识的系统运用是建设数学花园、扩展数学花坛的一种重要途径.为此,笔者以数学中的几个重要工具——矩阵、行列式、向量为专题,展示它们在初等数学各学科中的广泛应用及扩展,便形成这一套书.

这本书是《从高维 Pythagoras 定理谈起——单形论漫谈》,在几何学中,最古老的定理就是直角三角形中的 Pythagoras(毕达哥拉斯,前 572—前 497)定理,在我国称为勾股定理(约前 11 世纪,商高就认识了边长为 3:4:5 的直角三角形,即勾三股四弦五):直角三角形两直角边平方和等于斜边的平方.

在平面几何中,三角形占据着极为重要的地位,它是平面中最简单的多边形,它具有一系列优美的特殊性质,人们从中归结出一系列著名的定理、公式和不等式,人们用这些定理、公式、不等式来探求平面几何中的各类问题.如果将平面中的三角形向高维欧氏空间推广,便提出了高维欧氏空间中的单纯形(简称单形)问题的研究课题.单形是高维欧氏空间中最简单的几何图形,它亦有一系列优美的特殊性质,既可从中归结出一系列定理、公式、不等式,也可运用它来探求高维欧氏空间乃至常曲率空间中的各类问题.

震动科学界的爱因斯坦相对论激起了人们对 n 维几何学的研究兴趣,人们又开始了对经典几何学的重新深入研究.从 20 世纪 80 年代以来,我国数学界以张景中、杨路、张珏、冷岗松、杨世国、苏化明、左铨如、毛其吉、张晗方、郭曙光、刘根洪、尹景尧、周加农等先生

为代表提出了凸体几何学研究中的一系列重要课题. 进入 21 世纪后, 在高校界, 杨世国先生和他的研究生们、杨定华先生、马统一先生以及曾建国先生、王庚先生、王卫东先生等, 在中学界, 有周永国先生等, 对凸体几何中的一些问题进行了深入地探讨, 在某些方面也获得了世界领先水平的研究成果. 笔者也深入地研究了一系列问题, 撰写并发表了一系列论文, 也申请了有关科研课题. 为了将有关研究成果系统化, 促进对凸体几何学有关问题的深入研究, 建立完整的理论体系, 笔者花费了多年时间和相当的精力, 查阅资料, 分门别类进行类比推广、探索研究, 多方论证. 尤其是对三角形的高维推广进行了系统深入地研究, 也获得了一系列成果, 将这些成果汇集起来, 便成了这本书.

凸体几何是以凸体为主要对象的现代几何的一个重要分支. 著名数学家陈省身在祝贺我国自然科学基金设立 10 周年的讲话(刊在《数学进展》25 卷第 5 期(1996))中指出:“凸体几何是一个重要而困难的方面, C_{60} 的研究(1996 年获诺贝尔化学奖)显示了它在化学中的作用, 它当然对固态物理也有重大作用”. 由此可见, 凸体几何的研究不仅具有深刻的理论意义, 也有广泛的应用价值.

本书以三角形的高维推广为线索, 介绍了单形的基本理论以及研究的最新进展. 这可使读者了解到: 平面几何、立体几何、解析几何怎样有机地结合, 怎样运用向量、 k 重向量、重心坐标、矩阵及行列式等重要数学工具来解决问题. 使读者了解到: 三角形性质是怎样推广到四面体的? 三角形、四面体问题又是怎样向高维欧氏空间推广的? 主要结果又如何? 反过来, 又如

何指导低维空间的应用研究?这样,可以使我们看到:我国已开始试验的全日制高中数学课程中引入向量、矩阵等内容的实际背景;也可以减少我们在初等数学研究中的重复性劳动,或澄清某些研究成果(许多数学杂志常刊发这些文章)意义不大的理论认识问题;也为更新知识,革新教材创造条件;还为扩大研究领域进行导引,为进一步深入研究打下基础;为获得凸体几何学的新成果做出一些努力!

为了数学教育的需要,对有关数学研究成果进行再创造式整理,以提供适于教学法加工的材料,这也是进行教育数学理论研究的任务.本书在写作时试图体现这一点,以便与从事这一课题研究的工作者共勉!

此书的初稿曾以《单形论导引——三角形的高维推广研究》为书名,获得湖南师范大学出版基金资助,由湖南师范大学出版社于2000年出版.这次重新撰写,在原来的基础上做了较大调整,删去了第九章多胞形,增补了近20年的最新研究成果.

在本书的写作过程中,张垚教授、冷岗松教授、杨世国教授曾给予热情的指导与帮助,他们不仅提供了自己的最新研究成果,还提出了许多修改意见.特别是张垚教授,在百忙中挤时间审阅书稿,撰写初版序言.他们的大力帮助,使本书增色不少,在此深表感谢!

在此也要衷心感谢张景中院士、张奠宙教授在百忙中为本套书题字、作序;衷心感谢本书后面参考文献的作者,是他们的成果丰富了本书的内容;衷心感谢刘培杰数学工作室,感谢刘培杰老师、张永芹老师、刘家琳老师等诸位老师,使得本书以新的面目展现在读者面前;衷心感谢我的同事邓汉元教授、我的朋友赵雄辉

研究员、欧阳新龙先生、黄仁寿先生,以及我的研究生们:吴仁芳、谢圣英、羊明亮、彭熹、谢立红、陈丽芳、谢美丽、陈森君等对我写作工作的大力协助;还要感谢我的家人对我写作的大力支持!

限于作者的水平,本书不完善之处在所难免,恳请读者批评指正。

沈文选 杨清桃

2015年6月于岳麓山下长塘山