数学奥林匹克小丛书　初中卷 10

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

# 组合趣题

周建新 编著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

初中卷 10

# 组合趣题

olinpike Xiao Congshu

周建新 编著

华东师范大学出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

数学奥林匹克小丛书．初中卷．组合趣题／周建新编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4156-1

I.数... II.周... III.数学课-初中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019484号

数学奥林匹克小丛书・初中卷

**组合趣题**

编　　著　周建新
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　陈信漪
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
门市(邮购) 电话 021-62869887
门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
华东 中南地区 021-62458734
华北 东北地区 021-62571961
西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
邮编 200062

印 刷 者　江苏宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787x960 16开
印　　张　5.5
字　　数　93千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4156-1/G·2383
定　　价　8.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

# 数学奥林匹克小丛书 编委会

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue

# 总序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普

及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

# 目　录

# 1 计数问题

计数方法种类繁多，本章旨在介绍一些基本方法.

## 一、枚举计数

枚举计数就是把要计数的对象一一列举出来，最后计算总数的方法.枚举计数的过程中，必须注意不重复也不遗漏，力求有序、有规律、逐一地进行.

**例 1** 把 22 分成两个质数之和共有几种不同分法？

**分析** 设 $a+b=22$，其中 $a$、$b$ 都是质数.不妨设 $a\leqslant b$，则 $a$ 可能取 2、3、5、7 和 11，对每一个 $a$ 值，若 $b$ 也是质数，则得到一种分法.

**解** 设质数 $a$、$b$ 满足 $a\leqslant b$，$a+b=22$，则 $a$ 可取 2、3、5、7 和 11.当 $a=2$ 时，$b=20$，不为质数；当 $a=3$ 时，$b=19$，为质数；当 $a=5$ 时，$b=17$，为质数；当 $a=7$ 时，$b=15$，不为质数；当 $a=11$ 时，$b=11$，为质数.故不同分法有 3 组，即 $22=3+19=5+17=11+11$.

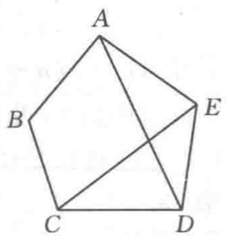


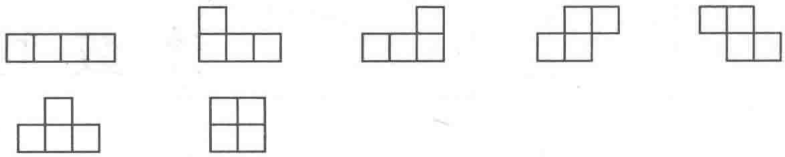
图 1-1

**例 2** 如图 1-1，沿着边或对角线不重复地从 $A$ 走到 $D$，一共有多少种走法（这里不重复指走过的点和线段都不重复）？

**解** 不同走法有：$A\to D$，$A\to E\to D$，$A\to E\to C\to D$，$A\to B\to C\to D$，$A\to B\to C\to E\to D$.一共有 5 种走法.

**例 3** 在一个网格纸（每个小方格都是边长为 1 的小正方形）中找出 4 个方格，使得任一个选出的方格都可以通过所选方格的公共边到达另外三个方格，则共有多少种不同选法（通过平移和旋转可以重合的图形认为是相同的.）？

**解** 依题意可以画出不同选法如下：



故一共有 7 种不同选法.

**例 4** 在中国古代,有五行相克之说.五行即金、木、水、火、土,而相克是金克木、木克土、土克水、水克火、火克金,从五行中找出互不相克的两行,共有几种不同选法?

**分析** 我们可以用“金→木”来表示金克木,从而有金→木→土→水→火→金,于是可以枚举出所有的选法.

**解** 可以选择的两行可以是:(金,土),(金,水),(木,水),(木,火),(土,火).一共五种.

在后面的例题中,我们可能会用到两个符号:$\mathrm{P}_n^m$ 及 $\mathrm{C}_n^m$($m \leqslant n$, $m$、$n$ 均为自然数),下面介绍这两个符号表示的意思.

(1) $\mathrm{P}_n^m$ 表示从 $n$ 个元素中任取 $m$ 个元素的排列数.从 $n$ 个不同的元素中取 $m$ 个不同的元素按照一定次序排成一列,称为从 $n$ 个元素中取 $m$ 个元素的一个排列,所有这样不同排列的个数即为 $\mathrm{P}_n^m$,且

$$\mathrm{P}_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}\ (m \leqslant n),$$

其中 $n! = n(n-1)\cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$,并规定 $0! = 1$.

证明如下:设 $n$ 个元素为 $\{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$,而取的 $m$ 个元素的排列为 $b_1 b_2 \cdots b_m$,则 $b_1$ 可以是任一 $a_j(1 \leqslant j \leqslant n)$,故 $b_1$ 有 $n$ 种取法;而 $b_1$ 取定后,$b_2$ 只能取 $\{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 中除去 $b_1$ 后的任一元素,有 $n-1$ 种取法;类似地,$b_3$ 有 $n-2$ 种取法,…,$b_m$ 有 $n-m+1$ 种取法,故 $b_1 b_2 \cdots b_m$ 的取法有 $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 种取法.

(2) $\mathrm{C}_n^m$ 表示从 $n$ 个元素中任取 $m$ 个元素的组合数.从 $n$ 个不同元素中取 $m$ 个元素,不论顺序如何并成一组,称为从 $n$ 个元素中取 $m$ 个元素的一个组合,所有这样不同组合的个数即为 $\mathrm{C}_n^m$,且

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times m}.$$

证明如下:首先从 $n$ 个元素 $\{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 中选 $m$ 个元素的排列有 $\mathrm{P}_n^m$

种,而对其中取定的 $m$ 个元素 $\{b_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 的排列数有 $P_m^m = m!$ 种,对于这 $m!$ 种不同的排列,它们的 $m$ 个元素都是相同,故属于同一个组合,所以从 $n$ 个元素中取 $m$ 个元素的组合个数有 $\dfrac{P_n^m}{m!}$ 种.

**例 5** 求满足下列条件的所有五位数的个数:

任意两个数位上的数字之差的绝对值不小于 2.

**分析** 首先应该求出满足条件的五个数字,然后对每一组数字进行排列,即可求出所有满足条件的五位数的个数.

**解** 设五位数为$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$,设 $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$,且 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$. 由条件要求 $b_1$ 只能取 1 或 0.

若 $b_1 = 1$,则必有 $b_2 = 3$, $b_3 = 5$, $b_4 = 7$, $b_5 = 9$, 此时满足条件五位数 $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$个数为 $P_5^5 = 5! = 120$.

若 $b_1 = 0$ 时, 则$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$可以为$\{0, 3, 5, 7, 9\}$、$\{0, 2, 5, 7, 9\}$、$\{0, 2, 4, 7, 9\}$、$\{0, 2, 4, 6, 9\}$、$\{0, 2, 4, 6, 8\}$共 5 组. 对于每一组$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$,由于 0 不能排在首位,$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$的个数为 $P_5^5 - P_4^4 = 120 - 24 = 96$,从而共有 $96 \times 5 = 480$ 个.

所以满足条件的五位数的个数为 $(120 + 480 =)600$ 个.

**例 6** 在 1~2 004 中,有多少个整数可以表示为 $[2x] + [4x] + [6x]$ 的形式, 这里 $x$ 为实数.

**分析** 设 $f(x) = [2x] + [4x] + [6x]$, 则一个很重要的结论是 $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = \left[2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right] + \left[4\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right] + \left[6\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right] = [2x+1] + [4x+2] + [6x+3] = f(x) + 6$, 即某一整数可用 $f(x)$表示,则这个数加上 6 也可由 $f(x)$的形式表示,于是我们只需求出 1~6 中,有几个数可表示为 $f(x)$的形式.

**解** 设 $f(x) = [2x] + [4x] + [6x]$,则 $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x) + 6$, 故若整数 $a$ 可表示为 $f(x)$形式,则 $a + 6k$ $(k \in \mathbf{N})$ 也可表示为 $f(x)$形式,所以只需求得 1~6 中有几个数可表示成 $f(x)$形式.

当 $x \in \left[0, \dfrac{1}{6}\right)$时,$f(x) = 0$;

当 $x \in \left[\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}\right)$时,$f(x) = 1$;

当 $x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right)$时,$f(x) = 2$;

当 $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$时，$f(x) = 3$；

又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.

因此 1～6 中，有 1、2、3、6 可表示为 $f(x)$的形式，故 1～2 004 中有 $2\,004 \div 6 \times 4 = 1\,336$ 个数可表示为 $f(x)$的形式.

**例 7** 设正整数 $a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$ 满足条件：

(1) $1 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \leqslant 20$；

(2) 任意两个数之差不小于 3.

求这样的数组$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$的组数.

**分析** 依题意有 $a_5 > a_4 + 2$, $a_4 > a_3 + 2$, $a_3 > a_2 + 2$, $a_2 > a_1 + 2$，即 $a_5 > a_4 + 2 > a_3 + 4 > a_2 + 6 > a_1 + 8 \geqslant 9$，故 $\{a_5, a_4 + 2, a_3 + 4, a_2 + 6, a_4 + 8\}$ 为 9～20 内不同的 5 个数，而相应的，由 9～20 内 5 个不同数也可以对应于 $a_5, a_4 + 2, a_3 + 4, a_2 + 6, a_1 + 8$.

**解** 依题意有 $9 \leqslant a_1 + 8 < a_2 + 6 < a_3 + 4 < a_4 + 2 < a_5 \leqslant 20$，而对于 9～20 中五个数 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$，则 $b_1 - 8$、$b_2 - 6$、$b_3 - 4$、$b_4 - 2$、$b_5$ 满足条件(1)、(2)，即满足条件(1)、(2)的$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$的个数为从 9～20 中取 5 数组的组数，也即 $\mathrm{P}_{12}^{5} = 792$.

**例 8** 设开始 $A = 0$. 将一枚硬币掷出，若掷得正面，则 $A$ 加上 1，否则 $A$ 减去 1. 当 $A = 3$ 或掷出次数达到 7 次时就不再掷了. 问当掷币停止时，不同掷币情况有多少种?

**分析** 当掷币停止了，要么 $A = 3$，掷出次数不超；要么 $A \leqslant 2$，且掷出次数已达到 7 次. 若 $A = 3$，则最后一次必为正面，前面可以是 2 次正面或 3 次正面 1 次反面或 4 次正面 2 次反面；若 $A$ 一直不大于 2，则当第 7 次掷出时，停止掷币.

**解** 若 $A = 3$ 且仅掷了 3 次，此时 3 次全为正面，即仅有 1 种方法；

若 $A = 3$ 且掷了 5 次，则前 4 次为 3 次正面、1 次反面. 但如果前 3 次已全部是正面，则 $A$ 已达到了 3，故一次反面必出现在前 3 次中，所以有 3 种掷法；

若掷了 7 次才停止，则前 6 次掷后 $A$ 不大于 2，此时有：

(i) 4 次正面、2 次反面. 此时不能前 3 次均为正面，也不能前 5 次为 4 次正面一次反面，故可能的掷法有 $(\mathrm{C}_6^2 - 3 - 3 =)9$ 种；

(ii) 3 次正面、3 次反面. 此时不能前 3 次均为正面，故可能的掷法有 $(\mathrm{C}_6^3 - 1 =)19$ 种；

(iii) 2 次正面、4 次反面或 1 次正面、5 次反面或全为反面，共有掷法 $(C_6^2+C_6^1+C_6^0=)22$ 种.

但第 7 次掷出有正、反面两种，故共有 $((9+19+22)\times 2=)100$ 种掷法.

综上，共有不同掷法 $(1+3+100=)104$ 种.

**例 9** 有 3 个红球和 8 个蓝球排成一圈，任意两个红球之间至少有两个蓝球，问共有多少种不同排列方法(只要把圆旋转一下就重合的排法认为是同一种)?

**分析** 我们可以将红球和在它逆时针方向相邻的两个蓝球看成一个整体，例如当成一个白球，这样问题就转化为 3 个白球和两个蓝球的不同圆排列方法.

**解** 由于任意两个红球之间至少有两个蓝球，故每个红球的逆时针方向相邻的位置至少有两个蓝球，于是，将每个红球和它逆时针方向相邻的两个蓝球看成一个球，如白球，则满足条件的排列与三个白球、两个蓝球的圆排列是一一映射的.

而三个白球、两个蓝球的圆排列的不同排列方法有 2 种(枚举即可)，故所求的不同排列种类为 2 种.

**例 10** 袋中装有红、白球各 3 个，从袋中拿出球，每次拿一个，要求拿出的白球个数不得多于红球，问有多少种不同拿法?

**分析** 由于要求拿出的白球个数不多于红球，故第一个球必是红球. 而若最后一球为红球，则拿出第 5 个球时白球数大于红球数，故第 6 个球必为白球. 其他 4 个球可以利用枚举法枚举.

**解** 依题意知，第 1 个球必为红球，第 6 个球必为白球，而其余 4 个球的不同拿法有:红红白白、红白红白、红白白红、白红红白、白红白红，一共有 5 种不同拿法.

**例 11** 求 100 以内仅能分解为两个素数之积的正整数的个数.

**分析** 可以对 1～100 进行因数分解，然后找出符合条件的数;也可以用两个素数相乘，将 100 以内的数挑出来. 显然，后一种方法简单一些.

**解** 50 以内素数有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47 共 15 个. 设分解素因数后为 $a\times b$，其中 $a\leqslant b$.

若 $a=2$，则 $b$ 可取这 15 个素数，即有 15 个数;

若 $a=3$，则 $b$ 可取 3～31 这 10 个素数，即有 10 个数;

若 $a=5$，则 $b$ 可取 5～19 这 6 个素数，即有 6 个数;

若 $a=7$，则 $b$ 可取 7、11、13 共 3 个素数，即有 3 个数;

若 $a \geqslant 11$,则 $a \times b \geqslant 11 \times 11 = 121 > 100$, 不满足要求.

综上,满足条件的数有 $(15 + 10 + 6 + 3 =)34$ 个.

## 二、分类思想与加法原理

加法原理是指完成一件事情可以分为 $m$ 类,第 1 类有 $n_1$ 种方法,第 2 类有 $n_2$ 种方法,…. 第 $m$ 类有 $n_m$ 种方法,则完成这件事情的不同方法的总数为

$$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_m.$$

**例 12** 一位解放军打靶,他打了 3 枪,共 21 环,而每枪可以打 1～10 环,问他有多少种不同的打法(要求考虑打枪的次序)?

**分析** 设三枪分别为 $a$、$b$、$c$ 环,则 $1 \leqslant a, b, c \leqslant 10$, $a+b+c=21$, 于是 $\max(a, b, c) \geqslant 7$. 将$\{a, b, c\}$重排列为$\{a', b', c'\}$且 $a' \leqslant b' \leqslant c'$. 对 $c' = 7, 8, 9, 10$ 分类讨论即可得到总的打法数.

**解** 设三枪依次为 $a$、$b$、$c$ 环,对$\{a, b, c\}$重新排列为$\{a', b', c'\}$且 $a' \leqslant b' \leqslant c'$.

若 $c' = 7$,则 $a' = b' = 7$, 此时共有 1 种打法.

若 $c' = 8$, 则$(a', b')$可取$(5, 8)$、$(6, 7)$. 当 $(a', b') = (5, 8)$ 时, 有 3 种打法;当 $(a', b') = (6, 7)$ 时,有$(P_3^3 =)6$ 种打法. 即共有 9 种打法.

若 $c' = 9$, 则$(a', b')$可取$(3, 9)$、$(4, 8)$、$(5, 7)$、$(6, 6)$. 当 $(a', b') = (3, 9)$ 或$(6, 6)$ 时, 各有 3 种打法;当 $(a', b') = (4, 8)$ 或$(5, 7)$ 时, 各有 6 种打法. 即共有 18 种打法.

若 $c' = 10$, 则$(a', b')$可取$(1, 10)$、$(2, 9)$、$(3, 8)$、$(4, 7)$、$(5, 6)$. 当$(a', b') = (1, 10)$ 时, 有 3 种打法;当$(a', b')$取其他值时,各有 6 种打法. 即共有 $(3 + 6 \times 4 =)27$ 种打法.

综上,由加法原理,一共有 $(1 + 9 + 18 + 27 =)55$ 种不同打法.

**例 13** 由 1、2、3 这 3 个数组成六位数,要求相邻数位上的数字都不相同,有多少个满足条件的六位数?

**分析** 依题意知,不可能有一个数字出现在 4 个数位上,所以可能是两个数字分别出现 3 次,也可能是三个数字分别出现 1、2、3 次或者 2、2、2 次,再用加法原理对上述三种可能下的个数求和即可.

**解** 依题意知,不可能有某个数字出现在 4 个数位上,故每个数字至多出现 3 次.

若为两个数字各出现 3 次,那么两个数字必间隔排列,即有 2 个不同的六

位数.而这两个数字可以是(1, 2)、(1, 3)或(2, 3),故有 $(2\times3=)6$ 个不同的六位数.

若为三个数字且分别出现1、2、3次,首先各个数字出现次数不同的情况共有 $(\mathrm{P}_3^3=)6$ 种.对于其中任一种,不妨设1出现3次,2出现2次,3出现1次,先将两个2与一个3排成一排(有3种排法)再与3个1间隔排列,可得 $(3\times2=)6$ 个六位数;又将一个2和一个3组合,再和另一个2放在3个1的三个数位之间,可得121231、121321、123121、132121等4个六位数.故共有 $(6\times(6+4)=)60$ 个不同的六位数.

若为三个数字各出现2次,首先前两位是从3个数字中选2个排列,共有 $(\mathrm{P}_3^2=)6$ 种排法;再设前两位为12,则后四位可以为1323、3123、3132、3213、3231共5种,故不同的六位数共有 $(6\times5=)30$ 个.

综上,由加法原理可知,一共有满足条件的六位数 $(6+60+30=)96$ 个.

**例14** 在一个五条边长各不相同的五边形的边上染色,每条边可以染红、黄、蓝三种颜色中的一种,但不允许相邻边有相同颜色,问有多少种不同染色法?

**分析** 不妨将边编号为 $a$、$b$、$c$、$d$、$e$, $ab$、$bc$、$cd$、$de$、$ea$ 为相邻边,则先不妨设 $a$、$b$ 分别为红、黄色,再对后面三条边染色,则可得到所有不同染色方法.

**解** 将五条边依次编号为 $a$、$b$、$c$、$d$、$e$.先假定 $a$ 为红色,$b$ 为黄色,则:

若 $c$ 为红色,则 $(d, e)$ 可以为(黄、蓝)、(蓝、黄);

若 $c$ 为蓝色,则 $(d, e)$ 可以为(红,黄)、(红,蓝)、(黄,蓝).

由加法原理知,当 $(a, b)$ 为(红,黄)时,共有 $(2+3=)5$ 种染色法.

而 $(a, b)$ 还可以为(红,蓝)、(黄,蓝)、(黄,红)、(蓝,红)、(蓝,黄),而每一种情况下都是对称的,故不同染色法总共有 $(5\times6=)30$ 种.

**例15** 某届运动会的十一天的比赛中,××队拿了16块金牌,其中每天至少有一枚金牌,则××队拿金牌的不同情况可能有多少种(假设金牌都是一样的)?

**分析** 由于每天至少有一块金牌,则先给每天分配一块金牌,剩下的五块金牌如何分配就决定了不同的情况.

**解** 设第 $i\ (1\leqslant i\leqslant 11)$ 天取得 $a_i+1$ 块金牌,则

$$a_i\geqslant0,\quad \sum_{i=1}^{11}a_i=5.$$

若$\{a_i\}$中有一个为5,则有$(\mathrm{P}_{11}^1=)11$种方法;

若$\{a_i\}$中有4和1或3和2,则各有$(\mathrm{P}_{11}^2=)110$种,于是共有$(110\times 2=)220$种;

若$\{a_i\}$中有3、1、1或2、2、1,则各有$\left(\frac{\mathrm{P}_{11}^3}{2!}=\right)495$种,于是共有$(495\times 2=)990$种方法;

若$\{a_i\}$中有2、1、1、1,则有$\left(\frac{\mathrm{P}_{11}^4}{3!}=\right)1\,320$种;

若$\{a_i\}$中有1、1、1、1、1,则有$(\mathrm{C}_{11}^5=)462$种.

综上,由加法原理知,××队拿金牌的不同可能情况有$11+110+990+1\,320+462=2\,893$种.

**例16** 工厂需要3名钳工和3名车工,现有12人可供挑选,其中5人会钳工,5人会车工,还有2人既会钳工也会车工,问工厂有多少种不同的挑选方法?

**分析** 解决问题的关键是确定两个既会钳工又会车工的工人是做钳工还是做车工,或是不被挑选,然后运用加法原理即可求出所有不同的挑选方法.

**解** 设既会钳工又会车工的两人为$a$、$b$.

若$a$、$b$均未被挑选,则不同方法有$(\mathrm{C}_5^3\cdot\mathrm{C}_5^3=)100$种;

若$a$、$b$有一人做钳工,则不同方法有$(\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_5^3=)200$种;

若$a$、$b$有一人做车工,也有不同方法200种;

若$a$、$b$两人均做钳工,则不同方法有$(\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_5^3=)50$种;

若$a$、$b$两人均做车工,则不同方法也有50种;

若$a$、$b$一人做钳工,一人做车工,则不同方法有$(\mathrm{P}_2^2\cdot\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_5^2=)200$种.

综上,由加法原理知,工厂不同的挑选方法有$(100+200+200+50+50+200=)800$种.

**例17** 形如“313”,“72427”的正整数称为回文数,即这个数的各个数位前后颠倒过来后仍是这个数,求1亿内的回文数的个数.

**分析** 设回文数有$k$位,则前$\left[\frac{k+1}{2}\right]$位确定后,则后$\left[\frac{k}{2}\right]$位也随之确定,即$k$位回文数对应于$\left[\frac{k+1}{2}\right]$位的所有数,再利用加法原理,对$k(=1,2,\cdots,8)$位回文数的个数求和即得所求回文数的个数.

**解** 设回文数有$k$位$(1\leqslant k\leqslant 8)$,则该$k$位回文数与它的前$\left[\frac{k+1}{2}\right]$位

组成的数一一对应.

若 $k=1$, 则有 9 个回文数;

若 $k=2$, 则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=1$, 即可取 9 个回文数;

若 $k=3$, 则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=2$, 即可取 90 个回文数;

若 $k=4$, 则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=2$, 即可取 90 个回文数;

若 $k=5$, 则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=3$, 即可取 900 个回文数;

若 $k=6$, 则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=3$, 即可取 900 个回文数;

若 $k=7$, 则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=4$, 即可取 9 000 个回文数;

若 $k=8$, 则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=4$, 即可取 9 000 个回文数.

综上,由加法原理知,1 亿内共有回文数 $(9+9+90+90+900+900+9\,000+9\,000=)19\,998$ 个.

**例 18** 某足球队参加足球比赛,现在该队有 11 名队员在场上踢比赛,在场下还有 7 名替补队员.比赛规定,比赛中,可以从替补队员中挑队员与场上队员交换替补上场,但至多可以换 3 名队员,而且已经换下的队员不能再替补上场.如果整场比赛中没有队员被罚下,则比赛结束时,场上的 11 名队员的不同情况有多少种?

**分析** 依题意知,有可能留在场上的替补队员个数为 0、1、2、3.

**解** 若没有替补队员被替换上场,则有 1 种情况;

若有 1 名队员被替换上场,则有 $(C_7^1\times C_{11}^1=)77$ 种情况;

若有 2 名队员被替换上场,则有 $(C_{11}^2\times C_7^2=)1\,155$ 种;

若有 3 名队员被替换上场,则有 $(C_{11}^3\times C_7^3=)5\,775$ 种.

综上,由加法原理知共有不同情况 $(1+77+1\,155+5\,775=)7\,008$ 种.

## 三、分步处理与乘法原理

乘法原理是指完成一件事情要分 $m$ 步,第 1 步有 $n_1$ 种方法,第 2 步有 $n_2$ 种方法,…,第 $m$ 步有 $n_m$ 种方法,则完成这件事情的不同方法的总数为

$$N=n_1\times n_2\times\cdots\times n_m.$$