文都教育®

高等院校数学经典教材

同步辅导及考研复习用书

# 经济数学 概率论与数理统计

# 解题方法技巧归纳

（与人大版袁荫棠编·修订本配套）

⊙毛纲源 编著

▲ 专题讲解 涵盖重点难点

▲ 通俗易懂 帮助记忆理解

▲ 同步学习 深入辅导指点

▲ 复习迎考 获益效果明显

买书送课：配套精品课程讲解



華中科技大學出版社

http://www.hustp.com

文都教育®

高等院校数学经典教材

同步辅导及考研复习用书

# 经济数学 概率论与数理统计

# 解题方法技巧归纳

（与人大版袁荫棠编·修订本配套）

◎毛纲源 编著

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

**图书在版编目(CIP)数据**

经济数学(概率论与数理统计)解题方法技巧归纳/毛纲源编著. —武汉：华中科技大学出版社，2017.2
ISBN 978-7-5680-2597-3

Ⅰ.①经… Ⅱ.①毛… Ⅲ.①经济数学-研究生-入学考试-题解 ②概率论-研究生-入学考试-题解 ③数理统计-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①F224.0-44 ②O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 034151 号

**经济数学(概率论与数理统计)解题方法技巧归纳** 毛纲源 编著

Jingji Shuxue (Gailülun yu Shuli Tongji) Jieti Fangfa Jiqiao Guina

策划编辑：王汉江
责任编辑：王汉江
特约编辑：陈文峰 邱晓春
封面设计：杨 安
责任监印：周治超

出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话：(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编：430074

录 排：世纪文都教育科技集团股份有限公司
印 刷：北京市兴城福利印刷厂
开 本：787mm×960mm 1/16
印 张：27.5
字 数：550 千字
版 次：2017 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
定 价：56.00 元

# 前　言

《经济数学(概率论与数理统计)解题方法技巧归纳》自前几个版本出版以来一直受到广大读者的好评，多次重印，畅销全国. 本书是在第 3 版的基础上结合人大版教材《概率论与数理统计(修订本)》(袁荫棠编)及近几年来的考研试题进行的修订，修订过程中广泛听取了读者的意见，并对第 3 版的内容作了适当的调整、充实和删改，但仍保留前几个版次的特色.

概率论与数理统计同我们以前学过的数学知识比较起来具有极其不同的特点. 在此之前，数学是研究在一定条件下，其结果必然发生或不发生的规律性，而概率论所研究的则是随机事件的规律性. 随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，完全是偶然的，但在大量的试验中随机事件的发生又具有一定的规律性，即具有一定的必然性. 概率论正是揭示这种偶然性背后隐藏着的必然性的科学. 这给初学者必然带来不少困难，尤其是解题时无从下手，解完题后又不知正确与否. 帮助初学者克服这些困难，较好地掌握这门课程的基本内容，是编写本书的目的之一.

本书将经济数学(概率论与数理统计)的主要内容按问题分类，通过引例归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧. 它不同于一般的教科书、习题集和题解，而是自具特色.

本书实例较多，且类型广、梯度大. 例题的一部分取材于袁荫棠编、中国人民大学出版社出版的《概率论与数理统计(修订本)》中的典型习题(原习题的题号在例序后用表示章序、题序和小题序的三个数码加上方括号标志. 例如，例 3 [2.1(2)]表示例 3 是人大版《概率论与数理统计(修订本)》习题二第 1 题的第 2 小题).

需查找《概率论与数理统计(修订本)》中习题解答的读者，请参看书末附录.

例题的另一部分取材于历届全国硕士研究生入学考试数学试题，其中数学试卷三的考题(适用于经济类、财政类及管理类专业的考生)绝大部分都已收入(例序后用表示年份的数字写上数学试卷类别再加上方括号标志. 例如，例 1 [2011 年 3]表示例 1 是 2011 年数学试卷 3 中的考题).

通过对历年真题的研讨，使有志于攻读硕士学位的同学“平战结合”，了解考研试题的特点及其逐年发展趋势，从知识、题型、方法和技巧上做好应试准备，做到心中有数. 这些考题并非都是难题，其突出特点是全面、准确地体现教学大纲

的要求，不少试题的原型就是《概率论与数理统计（修订本）》中的习题.多做考题，并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧，无疑对于启迪思维、开发智力、提高能力及加深对经济数学（概率论与数理统计）的理解都是大有好处的.

考虑到经济类和其他文科学生及自学者学习经济数学（概率论与数理统计）的困难，编写此书时，在选材、理论推导、文字叙述等诸多方面尽量适应其特点.此外，还在不少例题后加写注意部分，以总结解题经验，避免常犯错误.

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习经济数学（概率论与数理统计初步）时阅读和参考；对于自学者和有志于攻读硕士研究生的青年，本书更是良师益友；对于从事经济数学（概率论与数理统计）教学的教师也有一定的参考价值.

鉴于目前有关读物尚缺，适用于理工科学生阅读的参考读物，文科学生阅读多有不便，作者使用多年来在教学过程中所积累的资料，汇集历年来考研数学三的绝大部分考题和其他试卷的部分考题，编写成本书，为推进我国高校数学教学改革尽微薄之力.希望它能激起在校和自修的广大青年学习经济数学（概率论与数理统计）的兴趣，这是作者最大的心愿.

另外，准备考研的朋友还可以参考由本人编写、华中科技大学出版社出版的一套优秀考研书籍：

◎考研数学常考题型解题方法技巧归纳（数学一、二、三）

◎考研数学历年真题分题型详解（数学一、二、三）

编写本书时，参阅了有关书籍，引用了一些例子，在此一并向有关作者致谢.限于作者水平，书中不当之处在所难免，敬请读者不吝赐教！

**毛纲源**

2017 年 2 月于武汉理工大学

# 目 录

**第 1 章 随机事件与概率** …… (1)

1.1 事件的关系与运算 …… (1)

1.2 事件的关系及其运算法则的简单应用 …… (9)

1.3 加法原理和乘法原理的应用 …… (14)

1.4 计算古典型概率 …… (19)

1.5 计算几何型概率 …… (31)

**第 2 章 古典概率的间接计算** …… (36)

2.1 计算与对立事件有关的事件概率 …… (36)

2.2 与差事件有关的事件概率的算法 …… (38)

2.3 与包含关系有关的事件概率的算法 …… (40)

2.4 利用全集分解式求与积事件有关的事件概率 …… (43)

2.5 事件和的概率算法 …… (46)

2.6 应用乘法公式计算概率的几种情况 …… (52)

2.7 使用条件概率计算有关事件的概率 …… (55)

2.8 加法公式和乘法公式的综合应用 …… (61)

2.9 使用全概率公式和贝叶斯公式寻找完备事件组的两个常用方法 …… (67)

2.10 抽签原理的证明及其应用 …… (73)

2.11 如何正确理解事件独立性的概念 …… (76)

2.12 证明事件组的相互独立性 …… (82)

2.13 应用事件独立性计算概率 …… (87)

2.14 独立试验序列概型的计算 …… (91)

**第 3 章 一维随机变量及其概率分布** …… (99)

3.1 离散型随机变量分布的判别与求法 …… (99)

3.2 连续型随机变量分布的判别与求法 …… (106)

3.3 利用分布,求其未知参数,计算概率 …… (116)

3.4 随机变量函数分布的求法 …… (124)

3.5 证明与随机变量分布性质有关的命题 …… (135)

**第 4 章 二维随机变量及其分布** …… (141)

4.1 二维离散型随机变量的联合概率分布的求法 …… (141)

4.2 二维随机变量的边缘分布的求法 …… (149)

4.3 求二维随机变量的条件分布 …… (157)

4.4 二维随机变量的分布函数的判别与求法 …… (165)

4.5 计算二维随机变量落入平面区域内的概率 …… (174)

4.6 随机变量相互独立的判别 …………………………………………… (180)
4.7 两随机变量之和的概率分布的求法 ………………………………… (189)
4.8 求二维随机变量的最大值与最小值的分布及其落入区间内的概率 … (199)
**第 5 章 随机变量的数字特征** ………………………………………… (209)
5.1 离散型随机变量的期望与方差的求法 ……………………………… (209)
5.2 连续型随机变量的期望与方差的求法 ……………………………… (215)
5.3 随机变量函数的数学期望与方差的求法 …………………………… (225)
5.4 求二维随机变量的数字特征 ………………………………………… (230)
5.5 讨论随机变量的相关性与独立性的关系 …………………………… (245)
5.6 由随机变量的数字特征确定分布中的未知参数 …………………… (252)
5.7 期望或(和)方差的应用题的解法 …………………………………… (256)
5.8 如何掌握二维均匀分布与二维正态分布 …………………………… (261)
**第 6 章 几种常见的一维分布的应用** ………………………………… (275)
6.1 0-1 分布的应用 …………………………………………………… (275)
6.2 二项分布的应用 …………………………………………………… (277)
6.3 泊松分布的应用 …………………………………………………… (284)
6.4 几何分布的应用 …………………………………………………… (289)
6.5 超几何分布的应用 ………………………………………………… (293)
6.6 均匀分布的应用 …………………………………………………… (296)
6.7 指数分布的应用 …………………………………………………… (299)
6.8 正态分布的应用 …………………………………………………… (306)
6.9 求解与微积分及线性代数有关的综合应用题 ……………………… (315)
**第 7 章 大数定律和中心极限定理** …………………………………… (320)
7.1 切比雪夫不等式的两点应用 ………………………………………… (320)
7.2 大数定律成立的条件和结论及其简单应用 ………………………… (327)
7.3 中心极限定理的应用 ……………………………………………… (334)
**第 8 章 样本及抽样分布** ……………………………………………… (349)
8.1 样本均值的分布及其应用 …………………………………………… (352)
8.2 $\chi^2$ 分布及其应用 ……………………………………………………… (357)
8.3 利用 $t$ 分布求有关统计量的分布 …………………………………… (364)
8.4 $F$ 分布及其应用 ………………………………………………………… (370)
**第 9 章 参数估计** ……………………………………………………… (377)
9.1 矩估计法和极大似然估计法 ………………………………………… (377)
9.2 计算统计量的数字特征 …………………………………………… (388)
**习题答案或提示** ……………………………………………………… (392)
**附录**(人大版《概率论与数理统计(修订本)》部分习题解答查找表) ………… (425)

# 第 1 章　随机事件与概率

## 1.1　事件的关系与运算

### 1.1.1　用样本点(基本事件)表示随机试验的有关随机事件及其相互关系

求解这类问题的步骤如下：

(1) 首先要明确随机试验是什么，试验的结果如何表达，基本事件如何表达；

(2) 再明确样本空间由哪些结果所组成，所要表示的事件由哪些结果构成；

(3) 最后依据事件的四种基本关系的定义判定有关的事件的相互关系.

**例 1**　写出下列随机试验的样本空间及其有关的随机事件，并判定它们之间的相互关系.

(1) 掷一颗骰子，观察掷得的点数，表示下列随机事件："掷得的点数不超过2"，"掷得的点数不超过 3"，"掷得的点数大于 3"及"掷得偶数点".

(2) 从一批灯泡中任取一只，测试它的寿命，考虑事件"测得寿命大于 1000 h"、"测得寿命大于 1500 h"及"测得寿命不小于 1000 h".

**解**　(1) 掷一次骰子可能出现的点数为 $i(i=1,2,\cdots,6)$，用 $i$ 表示"基本事件"即出现点数为"$i$"的面，则样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

用 $A$、$B$、$C$、$D$ 分别表示题中的 4 个事件，则它们由下述结果所组成：

$$A=\{1,2\},\quad B=\{1,2,3\},\quad C=\{4,5,6\},\quad D=\{2,4,6\}.$$

由于 $A$ 发生必导致 $B$ 发生，有 $A\subset B$，$A$ 与 $C$，$B$ 与 $C$ 不可能同时发生，故 $A$ 与 $C$ 互不相容，$B$ 与 $C$ 互不相容，而且在一次试验中 $B$ 与 $C$ 必有一个发生且只有一个发生，故 $B$ 与 $C$ 互为逆事件，即对立事件.

又 $D\cap A=\{2\}\neq\varnothing$，$D\cap B=\{2\}\neq\varnothing$，$D\cap C=\{4,6\}\neq\varnothing$，故 $D$ 与 $A,B,C$ 均分别相容.

(2) 用 $t$(单位：h)表示测得灯泡的寿命，则 $t\geqslant 0$ 且其样本空间为 $\Omega=\{t|t\geqslant 0\}$，这时样本空间含有无穷多个元素. 用 $E$、$F$、$G$ 依次表示题中的三个事件，则 $E=\{t|t>1000\}$，$F=\{t|t>1500\}$，$G=\{t|t\geqslant 1000\}$. 显然有

$$F\subset E,\quad F\subset G,\quad E\subset G.$$

**例 2**[1.2]* 同时掷两颗骰子，$x,y$ 分别表示第一、二两颗骰子出现的点数. 设事件 $A$ 表示“两颗骰子出现点数之和为奇数”，事件 $B$ 表示“点数之差为零”，事件 $C$ 表示“点数之积不超过 20”，用样本点的集合表示事件 $B-A;BC;B+\overline{C}$.

**解** 一个随机试验关联一个样本空间. 正确地写出试验的样本空间是解题的关键，而要正确地写出样本空间必须切实了解具体的一次试验的条件、步骤及目的. 本题的一次试验是同时掷两颗骰子，记下所出现的点数 $x=1,2,\cdots,6;y=1,2,\cdots,6$. 该次试验完成后所得出的结果即基本事件是 $(x,y)=$“第一颗骰子出现的点数为 $x$，第二颗骰子出现的点数为 $y$”$(x,y=1,2,\cdots,6)$. 于是试验的样本空间

$$\begin{aligned}\Omega &=\{(x,y)\mid x=1,2,3,4,5,6;y=1,2,3,4,5,6\}\\ &=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6);(2,1),(2,2),\cdots,(2,6);(3,1),(3,2),\cdots,(3,6);(4,1),(4,2),\cdots,(4,6);(5,1),(5,2),\cdots,(5,6);(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\}.\end{aligned}$$

事件 $A=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\}$，

事件 $B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$，

事件 $C=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3)\}$，

则 事件 $\overline{C}=\{$点数之积超过 20$\}$

$$=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\},$$

故

$$\begin{aligned}B-A&=B-AB=B-\varnothing=B\\&=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\};\end{aligned}$$

$$BC=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\};$$

$$B+\overline{C}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

**注意** 将事件 $A$ 表示为 $A=\{3,5,7,9,11\}$ 是错误的. 因为 3,5,7,9,11 不是 $\Omega$ 中的事件，假如是，它们在 $\Omega$ 中不是等可能出现的，其中 3 只能对应 2 个结果 (1,2),(2,1)，而 5 对应 4 个结果 (1,4),(4,1),(2,3),(3,2).

* [1.2]表示该例是中国人民大学出版社出版的《概率论与数理统计(修订本)》习题一第 2 题. 下同.

**例 3**　写出下列随机试验的样本空间并用样本点(基本事件)集合表示所述事件:

对某工厂生产的产品进行检验,合格的记上“正品”,不合格的记上“次品”. 如果查出 2 个次品就停止检查,或检查 4 个产品就停止检查. 记录检查的结果,$A=\{$有 2 个产品是次品$\}$,$B=\{$至少有 3 个正品$\}$.

**解**　由检查的规则知道,至少逐个检查 2 个产品,最多是逐个检查 4 个产品,检查的个数取决于已检查过的产品中次品的个数. 以“0”表示查出次品,“1”表示查出正品,检查有先后顺序,因此基本事件是一个有序数值. 依题意,样本空间为

$$\Omega=\{00,010,0110,0111,100,1010,1011,1100,1101,1110,1111\},$$

$$A=\{00,010,0110,100,1010,1100\},\quad B=\{0111,1011,1101,1110,1111\}.$$

### 1.1.2　用已知事件的运算关系表示其他事件

设 $A,B,C$ 为已知事件,利用其运算关系表示其他事件.

这些事件常用“恰有”(“只有”)、“至多”、“至少”、“都发生”、“都不发生”、“不都发生”等词语描述,要弄清这些概念的含义.

(1) 对立事件:每次试验中$\{$事件 $A$ 不发生的事件$\}$称为事件 $A$ 的对立事件. $A$ 的对立事件记为 $\overline{A}$.

$A$ 与 $B$ 互为对立事件,其含义是 $A$ 与 $B$ 既不能同时发生,但也不能同时不发生,即 $A$ 发生时,$B$ 一定不发生,而 $A$ 不发生时,$B$ 一定发生,记为 $A=\overline{B}$ 或 $\overline{A}=B$.

(2) $\{A$ 发生而 $B$ 和 $C$ 都不发生$\}$的事件可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B+C)$.

(3) $\{A$ 与 $B$ 都发生,而 $C$ 不发生$\}$的事件可表示为 $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$.

(4) $\{A,B,C$ 都发生$\}$的事件可表示为 $ABC$.

(5) $\{A,B,C$ 都不发生$\}$的事件可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或$\overline{A+B+C}$.

(6) $\{A,B,C$ 中至少有一个发生$\}$的事件可表示为 $A+B+C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$.

(7) $\{A,B,C$ 中至少有两个发生$\}$的事件可表示为 $AB+BC+CA$ 或$\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$.

(8) $\{A,B,C$ 中不多于一个发生$\}$的事件可表示为$\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或$\overline{AB+BC+CA}$($A,B,C$ 中至少有两个发生是不可能事件).

(9) $\{A,B,C$ 中不多于两个发生$\}$的事件可表示为 $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+$

$\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$($A,B,C$ 同时发生是不可能事件).

(10) {$A,B,C$ 中恰有一个发生}的事件可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

(11) {$A,B,C$ 中恰有两个发生}的事件可表示为 $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ 或 $AB+BC+CA-ABC$.

用已知事件表示其他事件,方法往往不唯一. 在解决具体问题时,往往要根据情况选择一种恰当的简便方法.

这些复合事件常与差事件、对立事件有关. 为求其表示式,要注意利用和事件、积事件、差事件、互不相容事件、对立事件的一些基本运算所满足的基本关系:

(1) $A\overline{A}=\varnothing, A\cup\overline{A}=\Omega, \overline{A}=\Omega-A$;

(2) 若 $A\subset B$,则 $A+B=B, AB=A$;

(3) $A-B=A\overline{B}=A-AB, A+B=A+(B-A)$.

**例 4**[补 4]* 关系(　　)成立,则事件 $A$ 与 $B$ 为对立事件.

(a) $AB=\varnothing$　　(b) $A+B=\Omega$

(c) $AB=\varnothing, A+B=\Omega$　　(d) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为对立事件

**解** 由对立事件的定义知,(c)入选. 对(c)中两事件,求其逆事件,有

$$\begin{cases}A+B=\Omega\\ AB=\varnothing\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{A+B}=\overline{\Omega}\\ \overline{AB}=\overline{\varnothing}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing\\ \overline{A}+\overline{B}=\Omega\end{cases}\Leftrightarrow\overline{A},\overline{B}\text{ 为对立事件},$$

故(c),(d)入选.

**注意** 上例已证明:如果 $A,B$ 为对立事件,则其逆事件 $\overline{A},\overline{B}$ 也是对立事件. 反之,也成立.

**例 5** 从一批含正品和次品的产品中,任意取出 5 个产品. 根据下列所取得的正品数与次品数,试分别写出各自的“对立事件”:

(1) $A_1$ 表示“至少有 1 个次品”的事件;

(2) $A_2$ 表示“至少有 2 个次品”的事件;

(3) $A_3$ 表示“至多有 2 个正品”的事件;

(4) $A_4$ 表示“恰有 4 个次品”的事件.

**解** 在次品数数轴和正品数数轴上(注意它们的方向相反)分别描出 6 个点,这些点组成一个全集 $\Omega$. 然后在这两个数轴上分别标出有关事件,两个数轴上箭头方向相同的两事件为等价事件;一轴或两轴上方向相反的两事件为对立事件,因此可以按

* [补 4]表示该例(或该习题)是中国人民大学出版社出版的《概率论与数理统计(修订本)》补充习题第 4 题. 选项用小写字母(a)、(b)、(c)、(d)表示该题可能为多选题. 下同.

次品数{至多有 $x$ 个}与{至少有 $x$ 个}来写对立事件;也可按正品数{至多有 $x$ 个}与{至少有 $x$ 个}来写对立事件.

(1)由图 1.1.1 易得到,$A_1$ 与 $A_1'$ 是等价事件,$\overline{A}_1$ 与 $\overline{A}_1'$ 也是等价事件,因而 $\overline{A}_1$ 与 $\overline{A}_1'$ 都是事件 $A_1$ 的对立事件,即 $A_1=$ {至少有 1 个次品}的对立事件为 $\overline{A}_1=$ {没有次品}(按次品数写对立事件)或 $\overline{A}_1'=$ {全是正品}(按正品数写对立事件).

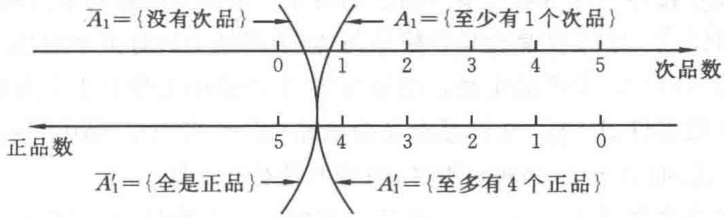


图 1.1.1

由图 1.1.1 还可看出:{至多有 4 个正品}的对立事件也有上面两种表述方式,即{没有次品}或{全是正品}.

(2) 由图 1.1.2 易看出,$A_2$ 与 $A_2'$,$\overline{A}_2$ 与 $\overline{A}_2'$ 分别为两组等价事件,且 $A_2$ 的对立事件为 $\overline{A}_2$ 或 $\overline{A}_2'$,即 $A_2=$ {至少有 2 个次品}的对立事件为 $\overline{A}_2=$ {至多有 1 个次品}(按次品数写对立事件),或 $\overline{A}_2'=$ {至少有 4 个正品}(按正品数写对立事件).

(3) $A_3=$ {至多有 2 个正品} $=$ {至少有 3 个次品}的对立事件为 $\overline{A}_3=$ {至多有 $3-1=2$ 个次品},或 $\overline{A}_3'=$ {至少有 $5-(3-1)=3$ 个正品}.

(4) $A_4=$ {恰有 4 个次品}一般只用其等价事件表示为 $A_4'=$ {恰有 1 个正品}(在图 1.1.2 中用黑点表示),而不用其对立事件表示,也可以说这时其等价事件就是其对立事件.

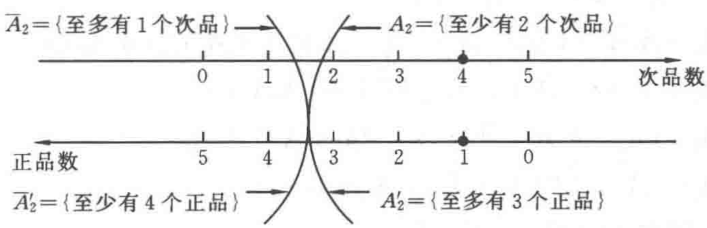


图 1.1.2

**例 6**[1.3] 用步枪射击目标 5 次. 设 $A_i$ 为"第 $i$ 次击中目标"($i=1,2,3,4,5$),$B$ 为"5 次中击中次数大于 2",用文字叙述下列事件:

(1) $A=\sum_{i=1}^{5}A_i$;  (2) $\overline{A}$;  (3) $\overline{B}$.

**解** (1) 事件 $A=\sum_{i=1}^{5}A_i$ 表示 5 次射击中至少有 1 次击中目标.

(2) 事件 $\overline{A}$ 表示 5 次射击中 1 次也没有击中目标.

(3) 事件 $\overline{B}$ 表示 5 次射击中击中次数小于等于 2,或表示 5 次射击中至多击中 2 次.

**例 7** 互不相容事件与对立事件的区别何在? 说出下列各对事件的关系.

(1) [1.1(5)] 20 个产品全是合格品与 20 个产品中只有 1 个废品.

(2) [1.1(6)] 20 个产品全是合格品与 20 个产品中至少有 1 个废品.

**解** (1) 设事件 $A=\{20$ 个产品全是合格品$\}$,$B=\{20$ 个产品中只有 1 个废品$\}$. 显然 $AB\neq\varnothing$,因而 $A$ 与 $B$ 是相容事件,当然不是对立事件.

(2) 因两个事件 $A$ 与 $C=\{20$ 个产品中至少有 1 个废品$\}$不仅不能同时发生,也不可能同时不发生. 事实上任取一个产品,它要么是合格品,要么是废品,于是事件 $A,C$ 仅有其中之一发生,且必然有一事件发生,所以 $A$ 与 $C$ 是对立事件.

**例 8**[补 2] 射击 3 次,事件 $A_i(i=1,2,3)$表示第 $i$ 次命中目标,则事件(  )表示至少命中 1 次,其中 $\Omega$ 表示样本空间.

(a) $A_1+A_2+A_3$  (b) $A_1+(A_2-A_1)+[(A_3-A_2)-A_1]$

(c) $\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$  (d) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

**解** 因(d)中事件的表示式仅表示恰有 1 次命中目标的事件,故(d)不能入选. (a)显然入选. 因

$$\begin{aligned}\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3&=\Omega-\overline{A_1+A_2+A_3}=\Omega(\overline{\overline{A_1+A_2+A_3}})\\&=\Omega(A_1+A_2+A_3)=A_1+A_2+A_3,\end{aligned}$$

故(c)也入选. 利用差化积及和对积的分配律(见式(1.2.1)),得到

$$\begin{aligned}&A_1+(A_2-A_1)+[(A_3-A_2)-A_1]\\&=A_1+A_2\overline{A}_1+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1=(A_1+A_2)(A_1+\overline{A}_1)+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\&=A_1+A_2+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1=A_2+[A_1+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1]\\&=A_2+(A_1+A_3\overline{A}_2)(\overline{A}_1+A_1)=A_1+A_2+A_3\overline{A}_2\\&=A_1+(A_2+A_3)(A_2+\overline{A}_2)=A_1+A_2+A_3.\end{aligned}$$

故(b)也入选,因而(a),(b),(c)均入选.

或 $$\begin{aligned}&A_1+(A_2-A_1)+[(A_3-A_2)-A_1]\\&=A_1+A_2\overline{A}_1+A_3\overline{A}_2\overline{A}_1=(A_1+A_2)(A_1+\overline{A}_1)+A_3\overline{A}_2\overline{A}_1\\&=(A_1+A_2)+A_3(\overline{A_1+A_2})=(A_1+A_2+A_3)[(A_1+A_2)+\overline{A_1+A_2}]\\&=A_1+A_2+A_3,\end{aligned}$$

或 $$\begin{aligned}A_1+A_2+A_3&=A_1+A_2(A_1+\overline{A}_1)+A_3(A_1+\overline{A}_1)(A_2+\overline{A}_2)\\&=A_1+A_1A_2+A_2\overline{A}_1+A_3(A_1A_2+\overline{A}_1A_2+A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_2).\end{aligned}$$

因　　$A_1A_3\overline{A}_2\subset A_1, A_1A_2\subset A_1,\quad A_1A_2A_3\subset A_1,\quad A_3\overline{A}_1A_2\subset\overline{A}_1A_2,$

故
$$\begin{aligned}A_1+A_2+A_3&=A_1+A_2\overline{A}_1+A_3\overline{A}_1\overline{A}_2\\&=A_1+(A_2-A_1)+[(A_3-A_2)-A_1].\end{aligned}$$

上式也可用文氏图证之.

为了直观，一般用平面上某个方形（或矩形）区域表示必然事件$\Omega$，该区域内的一个子区域就表示一个事件. 这种表示事件及其运算关系的示意图称为文氏图.

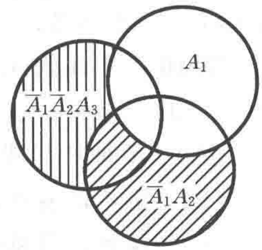


图 1.1.3

将有关事件借助于图示法，即用文氏图表示，对于分析和理解事件的关系，求出事件的表示式，既直观又简便. 如图 1.1.3 所示，显然有

$$\begin{aligned}A_1+A_2+A_3&=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\\&=A_1+(A_2-A_1)+[(A_3-A_2)-A_1].\end{aligned}$$

故(a)，(b)，(c)入选.

**例 9**[补 1]　某工厂每天分三班生产，事件$A_i(i=1,2,3)$表示第$i$班超额完成生产任务，则至少有两个班超额完成任务可以表示为(　　).

(a) $A_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3$　　(b) $A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$

(c) $A_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2A_3$　　(d) $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_3\overline{A}_1}$

**解**　(a) 表示恰有两个班超额完成任务，不能入选.

设$A=\{$至少有两个班超额完成任务$\}$，则

$$\begin{aligned}A&=\{\text{至少有两个班超额完成任务}\}+\{\text{三个班都超额完成任务}\}\\&=A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1+A_1A_2A_3\\&=A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1(\text{因 }A_1A_2A_3\subseteq A_1A_2),\end{aligned}$$

由图 1.1.4 易看出，事件$A$与$B$为等价事件，而事件$B=\{$至多有一个班未超额完成任务$\}$，因而

$$A=B=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3.$$

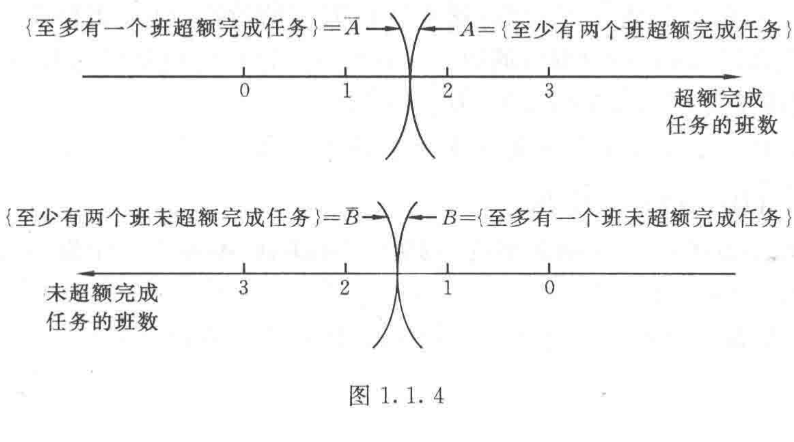


图 1.1.4

又因 $\overline{B}$ 为 $B$ 的对立事件,也为 $A$ 的对立事件,故$\overline{\overline{B}}=B=A$,而

$$\overline{B}=\{至少有两个班未超额完成任务\}=\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_3\overline{A}_1,$$

故 $A=\overline{\overline{B}}=\{至少有两个班未超额完成任务是不可能的\}=\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_3\overline{A}_1}$,因而(b),(c),(d)入选.

**例 10** 以 $A$ 表示事件“甲种产品畅销,乙种产品滞销”,则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　).

(A)“甲种产品滞销,乙种产品畅销”

(B)“甲乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”

(D)“甲种产品滞销,或乙种产品畅销”

**解** 设甲、乙两种产品畅销的事件分别为 $B,C$,则 $A=B\overline{C}$,由摩根律有

$$\overline{A}=\overline{B\overline{C}}=\overline{B}+\overline{\overline{C}}=\overline{B}+C,$$

故 $A$ 的对立事件为甲种产品滞销,或乙种产品畅销. 仅(D)入选.

## 习 题 1.1

**1.** 设 $A,B$ 为两个随机事件,通过 $A,B$ 的运算关系在空白内分别写出下列事件及其对立事件.

(1) $A,B$ 都发生______,其对立事件为______.

(2) $A,B$ 至少有一个发生______,其对立事件为______.

(3) $A,B$ 都发生或都不发生______,其对立事件为______.

**2.** 从一批含有正品与次品的产品中,任意取出 5 个产品,试写出 $A=\{至少有 3 个次品\}$的对立事件.

**3.** 试判断事件 $M_1=\{A,B 至少发生一个\}$与 $M_2=\{A,B 最多发生一个\}$及 $M_3=\{A,B 都不发生\}$中哪两个是对立事件.

**4.** 设 $A,B,C$ 为三事件,用 $A,B,C$ 的运算关系表示事件 $M_1=\{A,B,C 中不多于一个发生\}$和 $M_2=\{A,B,C 中至少有两个发生\}$.

**5.** 在区间[0,2]内任取一数,观察取得的数的情况,试写出样本空间. 如令事件 $A=\{在[1/2,3/2]内取得的数\}$, $B=\{在[1/4,1]内取得的数\}$,试用区间表示下列诸事件:$A$;$B$;$\overline{A+B}$;$A+\overline{B}$ 及 $A\overline{B}$.

**6.** 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,$A=\{2,3,4\}$,$B=\{3,4,5\}$,$C=\{5,6,7\}$. 求(1) $\overline{\overline{A}\overline{B}}$; (2) $\overline{A(\overline{BC})}$.

**7.** 设 $A,B,C$ 是三个随机事件,则事件$\{A,B,C 不多于一个发生\}$的逆事件是(　　).

(A) $A,B,C$ 至少有一个发生　(B) $A,B,C$ 至少有两个发生

(C) $A,B,C$ 都发生 (D) $A,B,C$ 都不发生

## 1.2 事件的关系及其运算法则的简单应用

事件的关系及其运算法则非常重要，不仅在讨论各事件间的关系时经常用到，而且在概率计算及随机变量的分布中也经常用到.要学会用概率论的语言来解释这些关系并会应用其运算法则.

下面仅给出容易混淆的互斥事件与对立事件的联系与区别.

若事件 $A$ 与 $B$ 满足 $AB=\varnothing$，则称事件 $A$ 与 $B$ 为互斥事件或互不相容事件，其含义是事件 $A$ 与 $B$ 不能同时发生.例如，同一样本空间中的任意两个基本事件是互斥的(两两互不相容的).

若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都是互斥的，则称该事件组是互斥事件组.例如，同一样本空间的一个基本事件组是互斥事件组.

若 $AB=\varnothing$，且 $A+B=\Omega$，则称事件 $A$ 与 $B$ 互为对立事件或称事件 $A$ 与 $B$ 互为逆事件.$A$ 的对立事件记为 $\overline{A}$.事件 $A$ 的对立事件的含义就是“事件 $A$ 不发生的事件”，$\overline{A}$ 就表示事件 $A$ 不发生的事件.

若事件 $A,B$ 互斥，则 $AB=\varnothing$；若事件 $A,B$ 对立，则不仅 $AB=\varnothing$，而且 $A+B=\Omega$.可见，两个互为对立的事件一定是互斥事件；反之，互斥事件不一定是对立事件，且互斥的概念适用于多个事件，但对立事件只适用于两个事件.

两个事件互斥只表明两个事件不能同时发生，即至多只能发生一个，也可以都不发生.而两个事件对立，则仅表示它们中有且仅有一个发生.

关于事件的运算，应注意事件的运算法则与集合的相应运算法则完全一致.必然事件、不可能事件、事件分别相当于全集、空集、全集的某个子集.事件的和、差、积、逆(对立)事件分别相当于集合的和、差、交和余集.由集合的运算性质可推知相应事件的运算法则.

(1) 分配律： $A(B+C)=AB+AC$；

$$AB+C=(A+C)(B+C)\text{ (和对积的分配律)}. \tag{1.2.1}$$

要特别注意上述和对积的分配律的应用：两项和的两因子 $A+C$ 与 $B+C$ 相乘 $(A+C)(B+C)$ 等于两因子中的公共项 $C$ 加上其余两项的乘积 $AB$：

$$(A+C)(B+C)=C+AB.$$

(2) 摩根律(对偶律)：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$. (1.2.2)

**记忆方法：和变积及积变和，均为长线变短线.**

(3) 补元律：$A\overline{A}=\varnothing,A+\overline{A}=\Omega$. (1.2.3)

(4) 还原律：$\overline{\overline{A}}=A$. (1.2.4)

(5) 吸收律("并"取大，"交"取小)：如 $A\subset B$，则 $AB=A$，且 $A+B=B$. (1.2.5)

(6) 蕴涵律：如 $AB=\varnothing$，则 $A\subset\overline{B}$，$B\subset\overline{A}$； (1.2.6)

$$A\overline{B}=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\overline{A}\supset\overline{B}\Leftrightarrow AB=A\Leftrightarrow A+B=B. \tag{1.2.7}$$

(7) 交换律：$A+B=B+A$；$AB=BA$.

(8) 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；$(AB)C=A(BC)$.

(9) 分解律：分以下两种情况.

① 将事件的和(并)分解为互不相容事件的和(并)：

1° 如 $A\subset B$，则 $B=A+\overline{A}B$； (1.2.8)

2° $A_1+A_2=A_1+(A_2-A_1)=A_1+A_2\overline{A}_1=A_1\overline{A}_2+A_2$； (1.2.9)

3° $A_1+A_2+A_3=A_1+(A_2-A_1)+[(A_3-A_2)-A_1]$

$$=A_1+A_2\overline{A}_1+A_3\overline{A}_1\overline{A}_2. \tag{1.2.10}$$

② 事件对完备事件组的分解律：因 $B$ 与其对立事件 $\overline{B}$ 构成一个完备事件组，故

$$A=AB+A\overline{B},\quad \overline{A}=\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}. \tag{1.2.11}$$

若 $\sum_i B_i=\Omega$，$B_iB_j=\varnothing\ (i\neq j)$，则称 $B_1,B_2,\cdots$ 为一完备事件组.

若 $B_1,B_2,\cdots$ 为一完备事件组，则对任意事件 $A$，有 $A=\sum_i AB_i$.

在事件运算的上述法则中，吸收律、对偶律、分配律(和对积的分配律)及分解律在事件的化简运算及概率计算中常常起着极为重要的作用，应熟练掌握并会应用.

因概率论中的事件与集合论中的集合以及它们之间的关系和运算是一致的，在同一个样本空间中事件间的关系就是集合之间的关系. 因此，可把集合的运算规律、解题思路全部用来指导事件的运算，推出有关事件的关系式；另一方面，也要会用概率论语言，对事件关系式进行描述和论证.

**应用一** 证明事件关系式.

(Ⅰ) 证明事件的相等关系.

可以通过事件的运算法则给出证明，也可以通过事件的发生与否来证明，还可以通过事件相互包含，即其元素相互属于关系来证明.

**例 1** 证明下列事件等式成立：

(1) $A+B=A\overline{B}+B$； (2) $(A-AB)+B=A+B=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$.

**证** (1) **证一** 利用和对积的分配律得到

$$A\overline{B}+B=(A+B)(\overline{B}+B)=(A+B)\Omega=A+B.$$