普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学（基础版）

（第二版）

主　编　朱　砾　王文强　刘韶跃
副主编　唐树江　杨　柳　颜艳华

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（基础版）

（第二版）

主　编　朱　砾　王文强　刘韶跃
副主编　唐树江　杨　柳　颜艳华

科学出版社
北　京

内容简介

本书是湘潭大学文科高等数学教学改革课题组编《高等数学》的第二版，根据我们近几年的教学改革实践，遵循模块化教学的要求与新时期教材改革的精神进行修订而成的. 本次修订保留了第一版中的模块设置和风格，为了方便学生更好地自主学习，对部分内容进行了适当的增补和调整，以帮助学生提高数学素养、培养创新意识、支撑专业学习.

本书分基础版、加强版两册出版. 基础版为必修模块，包括函数与极限基础、函数微分学基础、一元函数积分学基础、微分方程初步等内容，书末附有部分习题参考答案、常见的数学公式、符号与希腊字母、常用积分公式、极坐标与常见曲线的方程.

本书体系完整、结构严谨、逻辑清晰、叙述清楚、通俗易懂，例题与习题较多，可供高等院校文科类(含经济、管理类)专业的学生作为教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：基础版/朱砾，王文强，刘韶跃主编. —2版. —北京：科学出版社，2016.7

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-049443-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… ②王… ③刘… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 170986 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：张凤琴
责任印制：白 洋 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2010 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2016 年 8 月第 二 版 印张：16 3/4
2016 年 8 月第九次印刷 字数：338 000

定价：34.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

本书第二版是在第一版的基础上，根据我们近几年的教学改革实践，遵循模块化教学的要求与新时期教材改革的精神进行修订的. 因此，在修订中，保留了原教材的模块设置和风格，同时注意吸收当前教学改革中一些成功的举措，使得新版能更适应当前教与学的需要.

新版为了更好地与中学数学教学相衔接，基础版增加了空间解析几何简介这部分内容，充实了反三角函数的内容，将极坐标与常见曲线的方程相关内容作为附录放在书末，以方便学生查看.

根据本书初版以来广大同行和读者在教学实践中的意见和建议，对第一版中存在的不足之处作了修订，包括本书基础版、加强版内容的适当调整. 将基础版第 1 章中数项级数简介的内容移至加强版第 3 章中.

本书的修订工作由湘潭大学文科高等数学教学改革课题组全体成员朱砾、王文强、刘韶跃、唐树江、杨柳、颜艳华完成.

第二版中难免依旧存在疏漏不足之处，恳请广大专家、学者及读者批评指正.

编　者

2016 年 5 月

第一版前言

中学新课程标准已在全国范围内铺开，在数学课程标准中，部分属于大学数学的教学内容下放到中学，而以往部分属于初等数学的教学内容没有涉及；并且在教学中提倡选用与生活实际密切相关的素材、现实世界中的常见现象或其他科学的实例，展现数学的概念、结论，体现数学的思想、方法，忽略一些抽象的推理与证明.

为了更好地与中学数学教学相衔接，帮助文科类 (含经济、管理类) 专业的学生掌握、理解高等数学基础知识， 掌握基本方法与技能，我们组织了数位工作在教学一线的中青年教师，针对模块化教学的特点， 结合自身多年的教学实践和教学经验，考虑到不同专业的要求和跨专业学习的需求，编写了本书. 本书采用与传统教材不一样的分级模块形式，针对文科类 (含经济、管理类) 专业对高等数学的不同要求，将课程内容分成 8 个模块, 分基础版和加强版出版. 基础版内容含 4 个必修模块：函数与极限基础、函数微分学基础、一元函数积分学基础、微分方程初步，所需教学课时约 64 学时；加强版内容含 4 个选修模块：极限、连续与导数续论、微分中值定理与导数的应用、二重积分与无穷级数、微分方程与差分方程，所需教学课时约 80 学时. 每个模块又由相应的子模块组成，可根据专业需要选修相关的模块及子模块. 本书可作为高等院校文科类 (含经济、管理类) 专业高等数学课程教材，也可供自学者使用.

本书特色鲜明，尽量做到知识点由浅入深、由粗到细，希望能保持学生学习的统一性与连贯性.

在基础版中，我们放弃传统意义下的经典，尽可能地绕开数学的抽象，试图以直观、描述性的形式来展示数学的内涵， 而对于知识点则试图广泛涉及，即追求宽度、广度而不是深度. 例如，不介绍极限的 “ε-N, ε-δ” 定义，不局限于一元函数的讲授. 适合全体文科类 (含经济、管理类) 专业选用.

在加强版中，我们力求重拾传统的经典. 针对学生的学习要求，培养对数学抽象的理解，让他们尽可能地理解高等数学的专业术语，养成严格的数学思维，能够较好地利用数学工具，并以严谨、抽象的形式来展示数学的内涵，增加对知识点进一步理解与掌握，尽量做到刨根究底，追求深度. 适合经济、管理类专业选用.

本书的编写得到湘潭大学教务处、数学与计算科学学院的大力支持.

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

由于我们水平有限，成书仓促，书中难免有疏漏之处，请有关专家、学者及使用本书的老师、同学和读者批评指正.

编　者

2010 年 8 月于湘潭

目　　录

数学是在一切领域中建立真理的方式.

—— 勒奈 • 笛卡儿 (Rene Descartes)

第 1 章　函数与极限基础

静止是相对的，运动是绝对的，如何描述事物的运动状态是高等数学与初等数学对函数研究的关键区别. 函数与极限是高等数学这门课程最基本的核心概念，其中函数是“灵魂”，极限是“基础”，极限思想和极限理论既是重点又是难点，将直接影响到后续章节的学习.

本章从简单介绍 $\mathbf{R}^n$ 空间入手，试图通过几何直观到数学的抽象来思考问题，然后讨论函数及其图形，以直观的形式给出极限在不同情形下的概念，并介绍一些简单极限的计算方法.

1.1　$\mathbf{R}^n$ 空间简介

1. 了解 $\mathbf{R}^n$ 空间、距离、邻域等基本概念;
2. 熟知 $\mathbf{R}^n$ 空间的距离公式;
3. 注意区分 $\mathbf{R}^1$ 空间中几类常见的邻域的异同.

1.1.1　$\mathbf{R}^n$ 空间

空间不是一个陌生的词语，人们常说的有：生存空间、生活空间、私人空间等. 如何描述空间呢？在数学上，空间是由满足一定“关系”的点组成的集合. 研究空间就是如何确定空间中的点及其关系. 例如：当描述一个物体在空间中的位置时，我们通常可以采用以下三种不同的描述方式：一是按“上下东西南北”的方式；二是按“上下前后左右”的方式；三是按“内外”的方式. 其共同的特点是必须选择一个具体参照物的位置为基准点 (参照点)，然后才可以进行正确的描述.

人们常说数学的美在于抽象. 例如，对于“上下”“前后”“左右”的描述方式，如果只考虑其中一对方向上的位置，那么，数学上都抽象成用带方向的直线——数轴 (常用字母 $x, y, z, \cdots$) 来表示. 习惯上，如果该直线是左右方向 (或说水平) 的，则选右方为正向，如果该直线是上下方向的，则选上方为正向，如果该直线是前后方向的，则选前方为正向.

下面以考虑“左右”一对方向为例：以坐标原点 O 表示参照点，一条水平方向的数轴如图 1.1 所示，若得知在 $x_1 = -3$ 处位置，我们就可以明确该位置是在坐标原点 O 的左侧，距离坐标原点 O 为 3 个单位长度的地方. 同理，若得知在 $x_2 = 3$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

处位置, 可以明确该位置是在坐标原点 O 的右侧, 距离坐标原点 O 为 3 个单位长度的地方.

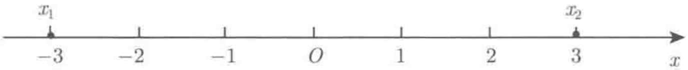

图 1.1

在直线上, 任意选定一个原点 O、一个正向 (正向有两种可能的情形) 和一个单位长度, 该直线就叫做数轴.

这里借助符号 “+” 和 “−” 来表示正向和负向, 用数值的大小来表示与原点 O 距离的远近. 因此, 数轴上的点和实数之间建立了一种 “一一对应” 关系, 即不仅数轴上每一点 P 确定唯一的一个实数 x, 而且每一个实数 x 也确定数轴上唯一的一点 P. 我们常常将点 P 称为点 x, 而不加以区分. 若以 O 为起点, P 为终点, 可以唯一确定一个向量 $\overrightarrow{OP}$, 且有

$$\overrightarrow{OP} = x,$$

如图 1.2 所示.

图 1.2

对应于数轴上一点 P 的实数 x 也叫做 P点的坐标, 数轴也可以称为坐标轴, 用 Ox 表示, 对应地称为 x轴.

跟现实生活中一样, 当既要考虑 “左右” 方向, 又要考虑 “前后” 方向时, 对此我们在中学数学中借助两条相互垂直的数轴来表示, 即平面直角坐标系, 如图 1.3 所示.

我们借助有序实数对 (x, y) 来表示平面所有点的位置, 类似于数轴的情形, 平面上的点和实数对 (x, y) 之间建立了一种 “一一对应” 关系, 即不仅平面上每一点 P 确定唯一的一个实数对 (x, y), 而且每一个实数对 (x, y) 也确定平面上唯一的一点 P. 我们也常常将点 P 称为点 (x, y), 而不加以区分. 若以 O 为起点, P 为终点, 可以唯一确定一个向量 $\overrightarrow{OP}$, 且有

$$\overrightarrow{OP} = (x, y)\,.$$

如图 1.4 所示.

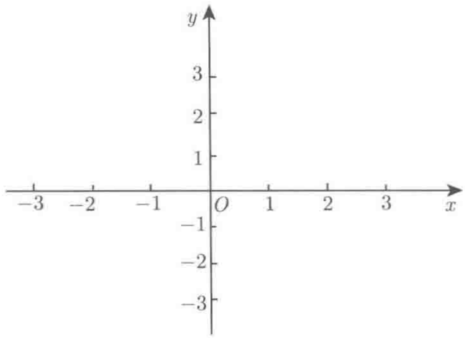

图 1.3

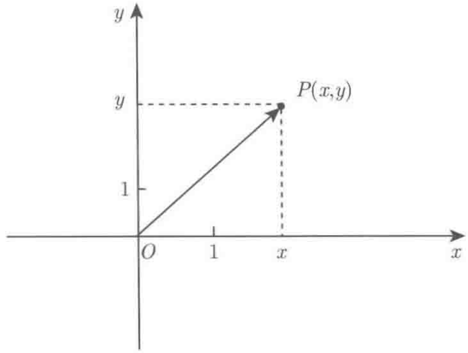

图 1.4

对应于平面上一点 P 的有序实数对 (x, y) 叫做**点P的坐标**, 数轴称为**坐标轴**, 分别用 Ox 和 Oy 表示, 对应地分别称为 **x轴**和 **y轴**, 或**横轴**和**纵轴**.

在现实生活中, 当我们不仅要考虑 "左右" 与 "前后" 位置关系, 而且还要考虑 "上下" 位置时, 那么跟平面直角坐标系类似, 可建立空间直角坐标系来描述, 即如图 1.5 所示: 在空间取一定点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, 就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴, 依次记为 x 轴 (横轴)、y 轴 (纵轴)、z 轴 (竖轴), 统称为**坐标轴**. 它们构成一个空间直角坐标系, 称为 **$Oxyz$ 坐标系**.

各轴正向之间的顺序通常按下述法则确定 (图 1.6):

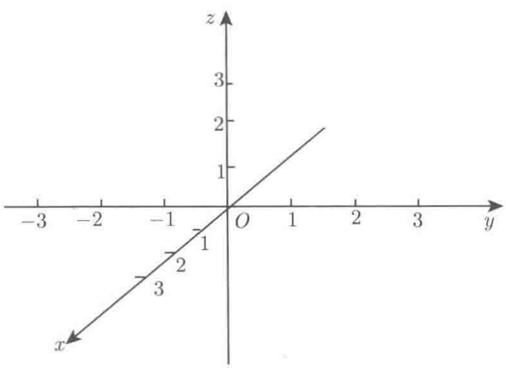

图 1.5

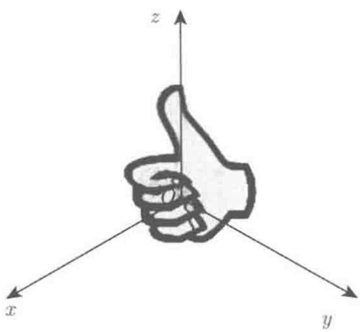

图 1.6

以右手握住 z 轴, 让右手的四指从 x 轴的正向, 以 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向, 这时大拇指所指的方向就是 z 轴的正向. 这个法则叫做**右手法则**.

注 (1) 通常三条数轴应具有相同的长度单位.

(2) 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴则是铅垂线.

(3) 数轴的正向通常符合右手法则.

在空间直角坐标系中, 任意两个坐标轴可以确定一个平面, 这种平面称为**坐标面**.

x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面, 另两个坐标面是 yOz 面和 zOx 面.

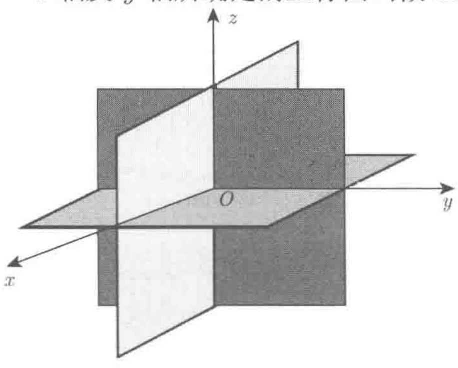

图 1.7

如图 1.7 所示：三个坐标面把空间分成八个部分, 每一部分叫做**卦限**, 含有三个正半轴的卦限叫做第一卦限, 它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面的上方, 按逆时针方向排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 面的下方, 与第一卦限对应的是第五卦限, 按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 八个卦限分别用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示.

类似于平面的情形, 我们借助有序实数组 (x,y,z) 来表示空间所有点的位置, 同理可得, 空间上的点和有序数组 (x,y,z) 之间建立了一种 "一一对应" 关系, 即不仅空间上每一点 P 确定唯一的一个有序实数组 (x,y,z), 而且每一个有序实数组 (x,y,z) 也确定空间上唯一的一点 P. 我们也常常将点 P 称为点 (x,y,z), 而不加以区分. 若以 O 为起点, P 为终点, 可以唯一确定一个向量 $\overrightarrow{OP}$, 且有

$$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)\,.$$

如图 1.8 所示.

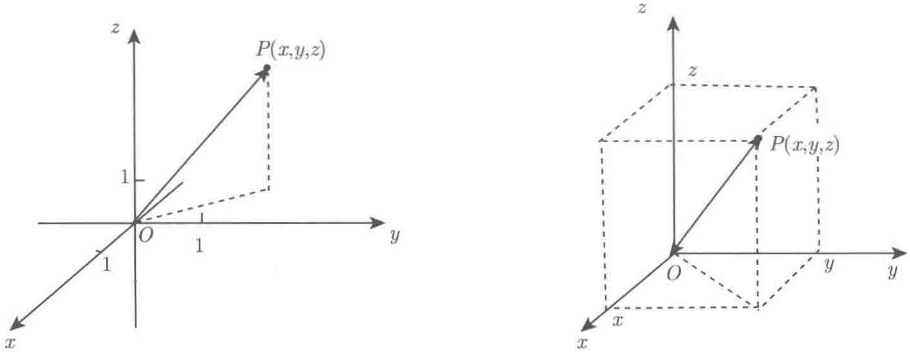

图 1.8

对应于空间上一点 P 的有序实数组 (x,y,z) 也叫做 **P点的坐标**, 三条相互垂直的数轴也称为**坐标轴**, 分别用 Ox, Oy 和 Oz 表示, 对应地分别称为 **x轴**、**y轴**和 **z轴**, 或**横轴**、**纵轴**和**竖轴**.

用数学术语, 我们可将

实数 x 称为 1 维实数组或 **1 维向量;**

有序实数对 (x,y) 称为 2 维实数组或 **2 维向量;**

有序实数组 (x,y,z) 称为 3 维实数组或 **3 维向量**.

而且

所有 1 维实数组构成的集合称为 **1 维空间**, 记为 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}^1$;

相应地,

所有 2 维实数组构成的集合称为 **2 维空间**, 记为 $\mathbf{R}^2$;

所有 3 维实数组构成的集合称为 **3 维空间**, 记为 $\mathbf{R}^3$.

在生产实践活动过程中, 因为时间对我们认识世界也很重要, 所以常常需要考虑 3 维空间中的点在不同时刻的位置, 类似地引入上述的描述方式, 在 3 维空间的基础上增加对时间度量 t 的考虑, 故可采用 4 维实数组 (x,y,z,t) 来表示, 虽然此时已经无法用几何直观来表达了, 但依旧类似上述表述方式, 定义如下:

所有 4 维实数组 (x,y,z,t) 构成的集合称为 **4 维空间**, 记为 $\mathbf{R}^4$.

更一般地, 我们有

定义 1.1.1 所有 n 维实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 构成的集合称为 **n维空间**, 记为 $\mathbf{R}^n$, 即

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\},$$

其中 n 维实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 **n维向量**, 通常用 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 或粗体的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\cdots$ 表示, $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为**向量的第i个分量**(或**第i个坐标**).

注 空间的点与向量形成了 "一一对应", 因此在以后的章节里, 只要不会引起混淆, 常常不再加以区分.

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 通常还定义以下两种运算:

设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,,\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$, c 为实数, 则

1. **加法** $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$;
2. **数乘** $c\boldsymbol{\alpha}=c\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(cx_1,cx_2,\cdots,cx_n)$.

跟空间对应的还有一个重要概念——距离. 什么是空间 $\mathbf{R}^n$ 中两点 P 与 Q 之间的距离呢? 或者说, 什么是空间 $\mathbf{R}^n$ 中两个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离呢?

在 $\mathbf{R}^1$ 中, 若点 P 的坐标为 x, 点 Q 的坐标为 y, 则由绝对值的几何意义知: 点 P 与 Q 之间的距离为

$$|y-x| \text{ 或 } \sqrt{(y-x)^2}.$$

在 $\mathbf{R}^2$ 中, 若点 P 的坐标为 (x_1, y_1), 点 Q 的坐标为 (x_2, y_2), 如图 1.9 所示, 则由平面几何中勾股定理可知: 点 P 与 Q 之间的距离为

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

在 $\mathbf{R}^3$ 中, 若点 P 的坐标为 (x_1, y_1, z_1), 点 Q 的坐标为 (x_2, y_2, z_2), 如图 1.10 所示, 则由立体几何中长方体对角线长度的计算公式知: 点 P 与 Q 之间的距离为

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

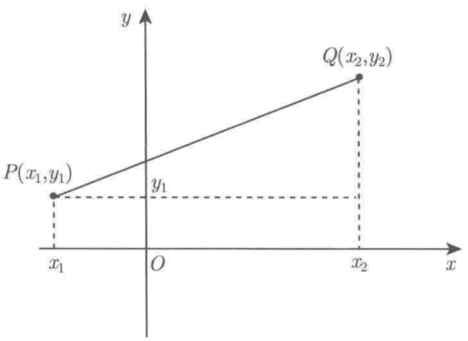

图 1.9

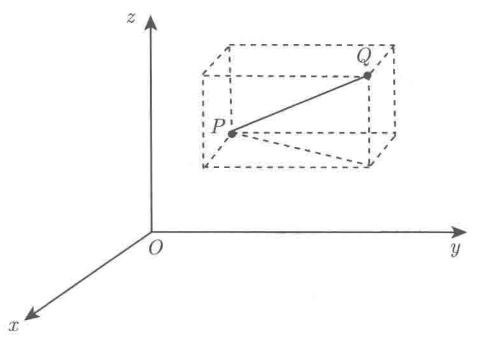

图 1.10

根据中学的几何知识, 不难看出上述两点之间的距离公式的实质是: 连接两点 P 与 Q 的线段的长度.

一般地, 在 $\mathbf{R}^n$ 中, 若点 P 的坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 点 Q 的坐标为 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 定义点 P 与 Q 之间的距离为

$$\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

记为 $|PQ|$, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 或 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, 即

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

特别地, 当点 Q 与原点 O 重合时, 或者说 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)=(0, 0, \cdots, 0)$ 时, 有

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

我们称 $|\boldsymbol{x}|$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的**模**或**长度**.

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量, c 为实数, 可以验证向量的模具有下列性质:

(1) $|\boldsymbol{x}|\geqslant 0$, $|\boldsymbol{x}|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$;

(2) $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$;

(3) $|c\boldsymbol{x}|=|c||\boldsymbol{x}|$.

1.1.2 邻域

邻域是一个在高等数学中经常用到的概念, 同时也是一个极其重要的概念. 直观地说, **点$\boldsymbol{x}_0$的δ邻域**是指位于定点 $\boldsymbol{x}_0$ 周围的点的集合, 其中每个点 $\boldsymbol{x}$ 与定点 $\boldsymbol{x}_0$ 的距离小于定长 δ, δ 通常是很小的正数. 换而言之, 一个点的邻域是包含这个点的集合, 可以稍微 "抖动" 一下这个点而不会离开这个集合.

在 $\mathbf{R}^n$中点$\boldsymbol{x}_0$的δ邻域 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta\}$.

从图形上看, 邻域可以看作是 $\mathbf{R}^1$(数轴) 中开区间概念的推广.

考虑 $\mathbf{R}^1$ 中开区间 (a,b), 若记

$$x_0=\frac{a+b}{2},\quad \delta=\frac{b-a}{2},$$

则有

$$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=(a,b),$$

如图 1.11 所示.

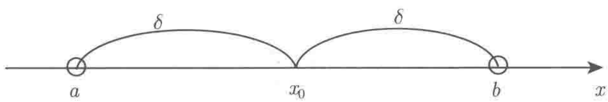

图 1.11

$\mathbf{R}^1$ 中点 x_0 的 δ 邻域就是到定点 x_0 的距离小于定长 $\delta>0$ 的所有点 x 的集合.

如图 1.12 所示, 在 $\mathbf{R}^2$ 中有

$$U(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2\middle||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta\right\}$$

表示的是以点 $\boldsymbol{x}_0$ 为圆心, $\delta>0$ 为半径的圆盘, 其中不包含边界圆

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2\middle||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\delta\right\}.$$

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com