面向“十二五”规划教材

运筹学及其应用

YUNCHOUXUE JIQI YINGYONG

范丽亚◎编著

吉林大学出版社

运筹学及其应用

范丽亚　编著

吉 林 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学及其应用 / 范丽亚编著. — 长春：吉林大学出版社, 2015.11

面向“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5677-4991-7

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①范… Ⅲ. ①运筹学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 270182 号

书名：运筹学及其应用

作者：范丽亚 编著

责任编辑：朱进 责任校对：张文涛 封面设计：美印图文

吉林大学出版社出版、发行 北京龙跃印务有限公司 印刷

开本：787×1092 毫米 1/16 2015 年 11 月 第 1 版

印张：13.25 字数：240 千 2015 年 11 月 第 1 次印刷

ISBN 978-7-5677-4991-7 定价：46.00 元

社址：长春市明德路 501 号 邮编：130021

发行部电话：0431-89580028/29

网址：http://www.jlup.com.cn

E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前 言

运筹帷幄之中，决胜千里之外.

运筹学（Operations Research）是20世纪40年代发展起来的一门新兴学科，是多种学科的综合性学科，是最早形成的一门软科学. 运筹学研究的范围极为广泛，凡一切可以定量化的管理系统都在研究范围之内. 它通过构造模型和进行模拟，了解有关因素之间的关系，预测各种供选择的方案和可以生产的后果，从而选择可以达到既定目标的最优途径. 运筹学是一门应用性很强的学科，它已广泛应用于工农业生产、经济管理、科学研究及国防等领域，为解决诸如生产计划、资源分配、信息管理、军事对抗等问题提供帮助，并且已经产生了巨大的社会效益和经济效益. 目前，运筹学已经成为了经济管理类和部分理工类本科专业的一门核心必修课.

本书是作者在总结多年教学经验的基础上，参照自编的讲义以及相关教材而编写的. 学完本书全部内容约需64学时，其中授课48学时，上机16学时. 本书针对的主要授课对象是数学与应用数学、信息与计算科学专业的本科生. 全书共分7章，包括线性规划、线性规划的对偶理论和灵敏度分析、整数线性规划与分配问题、非线性规划、动态规划和图与网络优化. 每章末均编写了适量的习题，以便读者课后复习，巩固所学知识.

为了使读者更好地掌握运筹学的基本原理和方法，提高运用运筹学模型解决实际问题的能力，在编写本书的过程中，力图做到以下几点：

1. 以问题为导向. 本书大部分章节都是以实际问题为背景，引出相关概念并建立模型，用尽可能简洁和直观的手段阐述求解方法的基本思想，力求深入浅出，通俗易懂，以方便读者自学.

2. 以应用性为主，兼顾理论体系. 运筹学的明显特征和真正魅力在于为各个领域的决策优化问题提供切实可行的解决方法. 作为运筹学课程的教材，本书的整体设计以及选材等方面立足于应用性，突出培养学生的应用能力.

3. 注重计算机软件的使用. 尽管各种模型的求解方法是教学的基本内容，但从应用的角度出发，更强调培养学生运用计算机软件解决实际问题的能力，并把它视为学生必须掌握的技能.

4. 与国内目前流行的教材相比，本书在内容的取舍上有所不同. 由于授课对象主要是数学与应用数学、信息与计算科学专业的本科生，所以去掉了决策论、对策论和排队论等内容.

本书的编写和出版，得到了山东省应用型特色名校建设资金的资助，同时也得到了吉林大学出版社朱进先生及有关编辑的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢!

由于作者水平有限，编写时间又较仓促，书中不尽完善甚至错误之处在所难免，恳请读者批评指正.

范丽亚
2015 年 6 月于聊城大学

目 录

第一章 绪 论

运筹学是最早形成的一门软科学. 它把科学的方法、技术和工具应用到包括一个系统管理在内的各种问题上，以便为那些掌握系统的管理者提供最佳的解决问题的方法. 它用科学的方法解决最优管理问题，它能帮助决策者解决那些可以用定量的方法和有关理论来处理的问题. 因此，运筹学是一门有重要应用价值的学科.

决策的正确性不仅依靠科学，而且凭借经验和艺术，但随着决策的难度以及决策失误所造成的损失程度的不断增大，那种仅凭经验和艺术的决策情形越来越少，即便是以往认为主要靠经验和艺术的那些非程序化的决策，也往往先要经过一系列基于科学方法的信息处理和可行性研究. 运筹学正是为决策提供科学方法的一门学科. 随着信息化时代的到来，运筹学必将在决策科学化的进程中发挥更大的作用.

1.1 运筹学的发展简史

运筹学是二十世纪新兴的一门应用学科，最早起源于第二次世界大战. 在二战期间，英国为了解决雷达站同整个防空作战系统的协调配合问题，成立了由多学科的科学家组成的研究工作小组. 工作小组卓有成效的工作使得在英军的每个作战指挥部都成立了这样的小组，随后在美国军队中也建立了类似的组织. 这些小组在确定扩建舰队规模、开展反潜艇战的侦察和组织有效的对敌轰炸等方面做了大量的研究，为取得二战的胜利及运筹学各有关分支的建立作出了贡献. 对于这些小组的研究工作，美国称之为 operations research，即我国后来译成的“运筹学”.

二战之后，运筹学的研究和应用由军方扩展到民间. 从事这项工作的许多专家由部队转移到了经济部门、民政部门、大学或研究所，继续从事决策的数学方法研究，使得运筹学作为一门学科逐步形成并得以迅速发展. 1950 年英国伯明翰大学正式开设了运筹学课程. 同年，第一本运筹学杂志《O. R. Quarterly》在英国创刊. 1951 年，美国的 P. M. Morse 和 G. E. Kimball 合著的《运筹学方法》一书正

式出版. 1952 年美国运筹学会成立，并于同年出版了运筹学杂志《Journal of ORSA》. 所有这些标志着运筹学这门学科基本形成. 我国于 1956 年成立了第一个运筹学小组，1958 年成立了第一个运筹学教研室，1980 年成立了中国运筹学会，1982 年出版了第一本运筹学杂志《运筹学杂志》，1997 年该杂志更名为《运筹学学报》. 目前，《运筹学学报》是中国运筹学会的会报.

运筹学作为一门独立的学科，至今没有统一的定义. 《大英百科全书》把运筹学定义为："运筹学是一门应用于管理的有组织系统的科学，它为掌管这类系统的人提供决策目标和数学分析工具". 《中国大百科全书》把运筹学定义为："运筹学是用数学方法研究经济、民政和国防部门在内外环境的约束条件下合理分配人力、物力、财力等资源，使实际系统有效运行的技术科学，它可以用来预测发展趋势、制订行动计划或优选可行方案". 《辞海》对运筹学的解释为："运筹学主要是研究经济活动和军事活动中能够用数量表达的有关运用、筹划和管理方面的问题，它根据问题的要求，通过数学的分析与运算，作出综合性的合理安排，以达到较经济、较有效地使用人力和物力的目的". 《中国企业管理全书》对运筹学的解释为："运筹学是运用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中的人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最佳方案，以实现最优化的管理".

运筹学经过半个多世纪的发展历程，不仅在理论上具备了相当的深度和广度，而且其方法与信息技术相结合，形成了各种商业应用软件，使其具有更加广泛的应用. 美国及许多西方国家的大学都设有运筹学系. 我国从 20 世纪 50 年代中期开始研究运筹学，目前取得了许多令世人瞩目的研究成果. 全国各高等院校的数学专业和经济管理类专业均普遍把运筹学作为主干课程列入到教学计划中. 工商管理硕士（MBA）的教学计划中也把运筹学定为核心课程. 我国还于 1999 年 8 月在北京成功地举办了第 15 届国际运筹学会联合会学术大会. 相信这门学科必将在 21 世纪的知识经济与信息时代中进一步展现其生命力，并得到不断的发展.

1.2 运筹学的基本特征

近年来，运筹学作为一门学科，在理论和应用方面，无论就广度和深度来说都发展很快. 它的主要特点可归结为以下五个方面.

一是数学方法的大量引进. 运筹学是一门以数学为主要工具、寻求各种实际问题最优方案的学科，它"为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法". 它强调以量化为基础，主要使用数学方法.

二是系统性. 运筹学研究问题是从系统的观点出发，用科学的方法去了解和解释运行系统的现象，主要研究对象就是这些系统，研究全局性的问题和综合优化的规律.

三是实际应用性. 运筹学主要解决实际中提出的专门问题，为管理者选择最优决策提供定量依据，并根据实际情况检验这些结果，进行灵敏度分析，以便更好地应用于实际.

四是多学科交叉性. 运筹学广泛应用现有的科学技术知识和方法，为人们提供最优决策服务. 它综合运用经济学、数学、物理学、计算机科学和工程技术等学科的理论及方法，既提供量化因素，也进行定性分析.

五是理论与应用的发展相互促进. 运筹学的各个分支学科，基本都是以实际问题为背景或直接由实际问题的需要逐渐发展起来的. 因此，其理论在更广泛的应用中不断发展完善，新的理论与方法不断出现，从而就不断地开拓出新的应用领域.

运筹学的应用目前几乎涉及到社会的各个方面，除在产品的市场销售、生产计划的制订、物资的库存管理、运输问题、设备更新、工程的优化设计、城市管理、财政与会计、人事管理、计算机信息系统、军事等重要领域有广泛系统的应用外，在建筑、纺织、水利、邮电、科学研究、工农业及农林医等方面不断地得到应用. 运筹学从第二次世界大战起源到在海湾战争中的成功使用（海湾战争中美国军方为了调度庞大的多国军事力量和后勤系统，求解了一个有几百万个变量的线性规划问题），充分显示了其强大的生命力. 也说明学习、研究运筹学不但有重要的理论意义，同时也有重要的实际意义.

1.3 运筹学的主要内容

虽然运筹学发展到今天只有四五十年的历史，但其内容丰富、涉及面广、应用范围广阔，已经形成了一个相当庞大的学科. 运筹学研究的内容主要包括：

规划论：线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、目标规划和多目标规划. 规划论主要是用来解决两方面的问题，一是对于给定的人力、物力和财力，怎样安排使用才能发挥它们的最大效益；另一是对于给定的任务，怎样安排工作才能使用最少的人力、物力和财力.

网络优化：主要是用来解决生产和管理中的最短路径问题、最大流量问题、最小费用流问题及最优分派问题等.

排队论：排队现象在日常生活中屡见不鲜，例如：机器等待维修、船舶等待装

卸、顾客等待服务等. 这些问题都有一个共同的特点：等待的时间越长，造成的损失越大. 固然增加技术工人和增加服务器的台数等措施可以缓解等待时间过长的问题，但同时又要蒙受工人和服务器空闲的损失，因此，如何妥善解决等待问题是排队论主要研究的问题.

对策论：是研究具有利害冲突的各方，如何制定既对自己有利又能战胜对手的战争策略问题.

决策论：众所周知，凡是“举棋不定”的事情都需要进行决策. 人们之所以举棋不定，是因为在关于实现某个预定目标时，有多个备选方案. 决策者如何从中选择一个最佳方案，是决策论要解决的问题.

存贮论：人们在日常的生产、生活和消费中，往往需要存贮一定数量的原材料或消费品以备使用. 存贮量太小，造成停工待料，影响销售，蒙受损失；存贮量太大，造成资金积压和原材料或消费品的过期损耗，同样造成损失. 如何合理安排存贮量是存贮论要解决的问题.

可靠性理论：任何一个系统或一台设备都由多个零件组成的，每个零件的质量都直接或间接地影响着系统或设备的工作性能. 如何保证系统或设备的稳定性是可靠性理论的主要任务.

1.4 运筹学在经济管理中的应用

近年来，运筹学在理论和应用方面发展非常快，涉及到社会生活的各个方面，除了在市场销售、生产计划、库存管理、运输问题、设备更新问题、工程优化、城市管理、军事等重要领域中有广泛系统的应用外，在建筑、纺织、水利、邮电、科学研究等方面也不断得到应用. 运筹学是经济管理类专业中的一门重要的专业课，是应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中的人、财、物等有限资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效管理的一门交叉学科. 运筹学中的数学证明较少，重视应用方法来解决经济管理中的实际问题. 运筹学在经济管理中大致有以下几方面的应用：

1. 生产计划问题. 运用运筹学的方法确定适合于需求的生产、存贮和劳动力安排等计划，以求达到最大利润或最小成本. 常用的方法有线性规划、整数规划和模拟方法等.

2. 库存管理问题. 运用存贮论的知识进行库存管理.

3. 运输问题. 应用运筹学的知识确定成本最小的运输路径，对运输工具进行合理调拨及选择最佳建厂地址等.

4. 人事管理问题. 利用运筹学的方法预测人员的需求量和获得量，以期确定出合理的人员编制. 用指派问题的方法可以对人员进行合理分配，用层次分析法可以建立个人评价体系等.

5. 市场营销问题. 利用运筹学中的规划论和决策论可以确定广告的预算、媒介的选择、竞争性定价等.

6. 财务问题. 利用运筹学中的统计分析、规划论和决策论可以进行财务预算、成本分析、现金管理和证券管理等.

第二章 线性规划

线性规划是运筹学的一个基本而重要的分支，它是现代科学管理的重要手段之一，是帮助管理者做出决策的一个有效方法. 线性规划的应用极其广泛，可以用来求解运输问题、生产计划问题、下料问题、混合配料问题等，其作用越来越受到人们的重视. 本章先通过几个实际案例归纳出线性规划模型的一般形式，然后着重介绍线性规划的一些基本概念、基本理论和求解线性规划问题的一些基本方法.

2.1 线性规划问题

在生产和经营过程中，经常会遇到一些这样的问题：在生产条件不变的情况下，如何通过统筹安排，改进生产计划，合理安排人力和物力资源等，使总的经济效益最好. 这样的问题常常可以转化成所谓的“线性规划”问题.

问题 2.1.1 生产计划问题. 某工厂计划生产 A,B 两种产品，生产每吨产品的用煤量、用电量、工作日和所带来的利润见表 2.1.1.

表 2.1.1 原材料用量表

	用煤量（吨）	用电量（kW）	工作日（天）	利润（元）
A	9	4	3	7000
B	5	5	10	12000

由于条件限制，该厂现有煤 360 吨，电 200kW，工作日 300 个. 问 A,B 两种产品各生产多少吨才能使工厂获利最大.

问题分析

设生产 A 产品 x_1 吨，生产 B 产品 x_2 吨（称 x_1,x_2 为决策变量），则产生的利润为：

$$7000x_1 + 12000x_2 \qquad \text{（目标函数）}$$

同时受到的限制为：

$9x_1+5x_2\leqslant 360$（煤资源限制）

$4x_1+5x_2\leqslant 200$（电资源限制）

$3x_1+10x_2\leqslant 300$（工作日限制）

$x_1,x_2\geqslant 0$（非负限制）

为了让获利最大，可用如下数学模型进行描述：

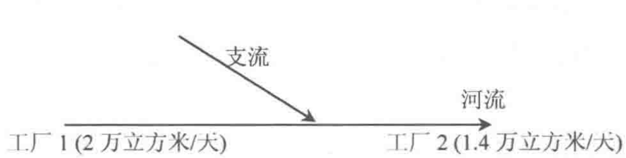
$$
\begin{aligned}
\max\ & 7000x_1+12000x_2 \\
s.\,t.\ & 9x_1+5x_2\leqslant 360, \\
& 4x_1+5x_2\leqslant 200, \\
& 3x_1+10x_2\leqslant 300, \\
& x_1,x_2\geqslant 0,
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

其中 max 和 *s. t.* 分别是 maximize（最大化）和 subject to（约束于）的简写. 称不等式组

$$
\begin{cases}
9x_1+5x_2\leqslant 360 \\
4x_1+5x_2\leqslant 200 \\
3x_1+10x_2\leqslant 300 \\
x_1,x_2\geqslant 0
\end{cases}
$$

为约束条件，称每个不等式为一个约束.

问题 2.1.2 处理水污染问题. 靠近某河流有两个化工厂：工厂 1 和工厂 2，流经工厂 1 的水量是 500 万立方米/天. 在两个工厂之间有一条流量为 200 万立方米/天的支流，流向工厂 2. 工厂 1 每天排放的工业污水是 2 万立方米，工厂 2 每天排放的工业污水是 1.4 万立方米. 从工厂 1 排出的污水到工厂 2 之前，有 20% 可自然净化. 根据环保要求，河流中工业污水的含量应不大于 0.2%. 若两个工厂都各自处理一部分污水，工厂 1 处理污水的成本是 1000 元/万立方米，工厂 2 处理污水的成本是 800 元/万立方米. 问：在满足环保要求的条件下，两工厂各应处理多少污水才能使总处理费最少？



问题分析

设工厂 1 每天处理 x_1 万立方米的污水，工厂 2 每天处理 x_2 万立方米的污水，

则目标函数为 $1000x_1 + 800x_2$．工厂 1 排出的污水到支流汇入处应满足约束：

$$\frac{2 - x_1}{500} \leqslant \frac{2}{1000 - 2}.$$

两工厂的污水总排量应满足约束：

$$\frac{0.8(2 - x_1) + (1.4 - x_2)}{700 + 0.2(2 - x_1)} \leqslant \frac{2}{1000 - 2}.$$

决策变量 x_1, x_2 还应满足非负约束 $0 \leqslant x_1 \leqslant 2$，$0 \leqslant x_2 \leqslant 1.4$．为了在满足环保要求的条件下，让总处理费最少，可用如下数学模型进行描述：

$$\begin{aligned} &\min\ 1000x_1 + 800x_2 \\ &s.t.\ \frac{2 - x_1}{500} \leqslant \frac{2}{1000 - 2}, \\ &\frac{0.8(2 - x_1) + (1.4 - x_2)}{700 + 0.2(2 - x_1)} \leqslant \frac{2}{1000 - 2}, \\ &0 \leqslant x_1 \leqslant 2,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1.4, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

其中 min 是 minimize（最小化）的简写.

问题 2.1.3 运输问题．现从两个仓库 A_1, A_2 运输某种物资到三个部队 B_1, B_2, B_3．各仓库的存贮量、各部队的需要量及每吨物资的运输费（百元）见表 2.1.2. 问如何调运可使总运费最少？

表 2.1.2 存贮量、需要量和单位运费

	部队 B_1	部队 B_2	部队 B_3	存贮量（吨）
仓库 A_1	2	1	3	50
仓库 A_2	2	2	4	30
需求量（吨）	40	15	25	

问题分析

设从仓库 A_1 运往各部队 B_1, B_2, B_3 的运量分别为 x_1, x_2, x_3 吨，从仓库 A_2 运往各部队 B_1, B_2, B_3 的运量分别为 y_1, y_2, y_3 吨，则总费用为：

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2y_1 + 2y_2 + 4y_3.$$

仓库 A_1, A_2 受到的约束为：$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 50$，$y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 30$.

部队 B_1, B_2, B_3 受到的约束为：$x_1 + y_1 \geqslant 40$，$x_2 + y_2 \geqslant 15$，$x_3 + y_3 \geqslant 25$.

决策变量还有非负约束：$x_i \geqslant 0$，$y_j \geqslant 0$，$i, j = 1,2,3$．为了使总运费最少，可用如下数学模型进行描述：

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\
s.t.\ & x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 50, \\
& y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 30, \\
& x_1 + y_1 \geqslant 40, \\
& x_2 + y_2 \geqslant 15, \\
& x_3 + y_3 \geqslant 25, \\
& x_i \geqslant 0,\ y_j \geqslant 0,\ i,j = 1,2,3.
\end{aligned} \tag{2.1.3}
$$

利用 Lindo 软件求解模型（2. 1. 3），得

$$x_1 = 10, x_2 = 15, x_3 = 25, y_1 = 30, y_2 = 0, y_3 = 0,$$

即从仓库 A_1 分别运往部队 B_1, B_2, B_3 10 吨、15 吨和 25 吨，从仓库 A_2 只运给部队 B_1 30 吨，可使总运费最少.

问题 2. 1. 4 配料问题. 用 n 种原料 $B_1,\cdots,B_n$ 制成含有 m 种成分 $A_1,\cdots,A_m$ 的某一产品. 产品中所含各成分的需求量分别不低于 $a_1,\cdots,a_m$. 各原料的单价（含生产成本）及各单位原料中所含成分的数量见表 2. 1. 3. 问如何配料才能使产品成本最低?

表 2. 1. 3 单价、需求量与成分含量

成分 \ 原料	B_1	$\cdots$	B_n	最低需求量
A_1	c_{11}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
$\vdots$				$\vdots$
A_m	c_{m1}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
原料单价	b_1	$\cdots$	b_n	

问题分析

设第 j 种原料 B_j 的需求量为 $x_j, j = 1,\cdots,n$, 则产品成本为 $\sum_{j=1}^{n} b_j x_j$. 产品中第 i 种成分的约束为 $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a$, $i = 1,\cdots,m$. 决策变量有非负约束: $x_j \geqslant 0$, $j = 1,\cdots,n$. 为了使产品成本最低，可用如下数学模型进行描述:

$$
\begin{aligned}
\min\ & \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \\
s.t.\ & \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i,\ i = 1,\cdots,m, \\
& x_j \geqslant 0,\ j = 1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{2.1.4}
$$

问题 2.1.5 人力资源的分配问题. 某昼夜服务的公交线路每天各时段内所需要的司机和乘务员数见表 2.1.4. 设司机和乘务员分别在各时段初开始上班，并连续工作 8 小时. 问该公交线路应怎样安排司机和乘务员的人数，使得既能满足工作需要，又能使总人数达到最少？

表 2.1.4 时间段所需人数表

时段	时间	所需人数
1	6：00—10：00	60
2	10：00—14：00	70
3	14：00—18：00	60
4	18：00—22：00	50
5	22：00—2：00	20
6	2：00—6：00	30

问题分析

设 x_i 为第 i 时段开始上班的司机和乘务员数，$i=1,\cdots,6$，则一个昼夜所需的司机和乘务员总数为 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$. 因为每个时段中工作的总人数是前一个时段开始上班的人数和本时段开始上班的人数之和，故每个时段的上班人数应满足约束：

$$x_6+x_1\geqslant 60,\ x_1+x_2\geqslant 70,\ x_2+x_3\geqslant 60,$$
$$x_3+x_4\geqslant 50,\ x_4+x_5\geqslant 20,\ x_5+x_6\geqslant 30.$$

决策变量有非负约束：$x_i\geqslant 0$，$i=1,\cdots,6$. 为了既满足工作需要，又能使总人数最少，可用如下数学模型进行描述：

$$\begin{aligned}
&\min\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\\
&s.t.\ \ x_6+x_1\geqslant 60,\ x_1+x_2\geqslant 70,\\
&\qquad x_2+x_3\geqslant 60,\ x_3+x_4\geqslant 50,\\
&\qquad x_4+x_5\geqslant 20,\ x_5+x_6\geqslant 30,\\
&\qquad x_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,6.
\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

利用 Lindo 软件求解模型（2.1.5），得

$$x_1=60, x_2=10, x_3=50, x_4=0, x_5=30, x_6=0,$$

或者

$$x_1=40, x_2=30, x_3=30, x_4=20, x_5=0, x_6=30;$$