应用型本科数学基础课程教材

线性代数及其应用学习指导与习题解答

主　编　咸美新　毛立新

高等教育出版社

应用型本科数学基础课程教材

线性代数及其应用学习指导与习题解答

XIANXING DAISHU JIQI YINGYONG XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEDA

主　编　咸美新　毛立新

副主编　双冠成　杨芝艳

王月明　吴业军

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与毛立新、咸美新主编的《线性代数及其应用》配套的学习指导书，主要面向使用该教材的学生，也可供有关教师参考。为了与教学进度保持同步，本书按《线性代数及其应用》教材的顺序逐章编写，每章内容包括基本概念、基本性质、公式与定理、典型例题、本章习题解答。

本书相对于上述主教材具有一定的独立性，不仅可作为主教材的学习指导书，还可作为应用型高校工科、经管类和其他非数学类专业本科生线性代数课程的学习参考书，也可作为考研复习辅导书。

图书在版编目（C I P）数据

线性代数及其应用学习指导与习题解答 / 咸美新，毛立新主编 . -- 北京 : 高等教育出版社，2016. 9
ISBN 978-7-04-046401-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①咸… ②毛… Ⅲ. ①线性代数 - 高等学校 - 教学参考资料 Ⅳ. ① O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 206342 号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 杨 帆　　封面设计 李小璐　　版式设计 马敬茹
责任校对 吕红颖　　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京京科印刷有限公司
开　　本 787 mm×960 mm 1/16
印　　张 17
字　　数 300 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2016 年 9 月第 1 版
印　　次 2016 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 28.50 元

物 料 号 46401-00

前　　言

本书是与毛立新、咸美新主编的《线性代数及其应用》教材 (高等教育出版社出版) 相配套的学习指导书, 主要面向使用该教材的学生, 也可供有关教师作教学参考, 还可作为学生期末考试及硕士研究生入学考试的复习指导书。

线性代数是高等学校普遍开设的重要数学基础课, 线性代数课程具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和工程应用的广泛性。初学者往往感到学习比较困难, 不易理解其抽象的概念和理论, 课上似乎已经听懂, 但做题却有些困难, 对于课程结束时的考试和考研的相关内容把握不准。编者根据多年从事线性代数课程教学与辅导的经验和体会, 编写了本指导书, 旨在帮助读者很好地掌握线性代数的基本内容, 正确理解相关概念, 掌握解题的基本方法与技巧, 以培养和提高分析问题、解决问题的能力。

本书共五章, 每章均由以下四个部分组成:

一、基本概念　对本章的基本概念、基本理论作简要归纳, 揭示本章与前后章内容的联系, 对某些基本概念进行归纳注释, 以帮助读者较快地理解把握。

二、基本性质、公式与定理　对本章基本性质、公式与定理进行简明扼要的叙述、归纳和总结。由于线性代数知识前后联系紧密, 相互渗透, 集中给出这些基本性质、公式与定理有利于加深读者对主要内容的理解和正确应用。

三、典型例题　本部分精选了线性代数中的部分典型例题 (包含了部分考研试题), 以本章内容为主, 按题型归类, 通过对计算方法的归纳总结、典型例题的解题分析, 揭示具有共性题目的特征和解题思路。着重分析题目的条件, 归纳解题方法。通过解题可以加深对基本概念、基本理论的理解。另外, 通过对某些例题的注释, 帮助读者更好地把握住典型例题的处理方法, 达到举一反三、触类旁通的效果。

四、本章习题解答　本部分给出了《线性代数及其应用》教材各章习题的全部解答。由于线性代数中解题方法的多样性, 对于具有多种解法的习题只给出一种解法, 未必最好, 望读者经过思索, 能有新的、更好的解题方法。

为了帮助读者了解并适应考试, 本书附录中提供了两套线性代数综合训练题与试卷。

本书编写分工如下: 第 1 章由咸美新编写, 第 2 章由杨芝艳编写, 第 3 章由

王月明编写，第 4 章由双冠成编写，第 5 章由毛立新编写，综合练习由吴业军编写。全书由咸美新和毛立新负责统稿。本书编写过程中参阅了同类书籍，受到了不少启发，在此谨向有关作者致以诚挚的谢意。

限于编者水平，本书难免有不妥之处，恳请读者提出宝贵意见，以便今后改进。

编 者

2015.12.2

目　　录

第一章　行　列　式

一、基 本 概 念

1. 二阶行列式、三阶行列式

(1) **二阶行列式** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

(2) **三阶行列式** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$,

其中

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ 为 } a_{11} \text{ 的代数余子式},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ 为 } a_{12} \text{ 的代数余子式},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ 为 } a_{13} \text{ 的代数余子式}.$$

2. n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

其中

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j},$$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3(j-1)} & a_{3(j+1)} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

M_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的**余子式**, A_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的**代数余子式.**

一般地, M_{ij} 为行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式, A_{ij} 为行列式 D 的元素 a_{ij} 的代数余子式. 其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 (1) 计算代数余子式时, 不能忘记加 $(-1)^{i+j}$;

(2) 元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 与 a_{ij} 的取值无关;

(3) 改变行列式的元素 a_{ij} 所在行或列中元素的值并不影响其代数余子式 A_{ij}.

例如, 两个行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix}$ 与 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix}$ 的 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 并不相同, 但它们的代数余子式 $A_{1j}(j=1,2,3)$ 是完全相同的.

3. 几种特殊行列式

(1) n 阶三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1(n-1)}&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2(n-1)}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&0&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2(n-1)}&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n(n-1)}&a_{nn}\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

(2) n **阶对角行列式**

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$D_n=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2(n-1)}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

(3) 分块三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}&0&\cdots&0\\c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&c_{11}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}&c_{k1}&\cdots&c_{kn}\\0&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}.$$

【注】 一般地, 1. $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$;

2. $\begin{vmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{kn}\,|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,

其中 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别是 k 阶与 n 阶方阵.

(4) n 阶范德蒙德 (Vandermonde) **行列式**

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\cdots(a_n-a_1) \\
&\qquad\qquad (a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (a_n-a_{n-1}) \\
&= \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).
\end{aligned}
$$

其中记号 "$\prod$" 表示全体同类因子的乘积.

二、基本性质、公式与定理

1. 行列式的性质及推论

性质 1　行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

性质 2　互换行列式中两行 (列), 行列式变号.

推论 1　如果行列式中有两行 (列) 元素对应相等, 则此行列式为零.

性质 3　行列式中的某一行 (列) 所有的元素都乘同一数 k, 等于用数 k 乘此行列式, 即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

推论 2　行列式中某一行 (列) 所有元素的公因子, 可以提到行列式的外面.

推论 3　如果行列式中某行 (列) 的元素全为零, 则此行列式为零.

推论 4　如果一个行列式的两行 (列) 元素对应成比例, 则此行列式为零.

性质 4 如果行列式中某行 (列) 的各元素都是两项之和, 则这个行列式等于两个行列式之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$, 由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{n\times n}$, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 每行元素都是两个数的和, 根据性质 4, 行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 应拆成 2^n 个行列式之和, 故一般地 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

性质 5 把行列式的某一行 (列) 的元素的 k 倍加到另一行 (列) 上去, 行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

【注】 在行列式的计算中, 经常先用此性质恒等变形, 以便简化计算.

性质 6 行列式 D 的某一行 (列) 的元素与另一行 (列) 对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

2. 行列式按行 (列) 展开

定理 1 (拉普拉斯定理) n 阶行列式 D 等于它的任一行 (列) 元素与它们所对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n);$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

3. 克拉默法则

定理 2 (克拉默法则)　如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$, 则方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}.$$

定理 3　如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$, 则方程组一定有解, 且有惟一解. 如果该线性方程组无解或有多个不同的解, 则它的系数行列式 $D=0$.

定理 4　如果齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$, 则齐次线性方程组有惟一解, 即只有零解. 如果齐次线性方程组有无穷多解, 即有非零解, 则系数行列式 $D=0$.

4. 方阵行列式的性质

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, λ 为数, 则

(1) $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=|\boldsymbol{A}|$;

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$;

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

(4) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}|$;

(5) $|\boldsymbol{A}^m|=|\boldsymbol{A}|^m$, m 为正整数;

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆方阵, 则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$;

(7) 若 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$;

(8) 若 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

三、典型例题

1. 代数余子式的求和计算

常见的方法有: 根据行列式按行 (列) 展开定理与性质 6 进行计算.

例 1 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&2&2\\3&0&2&6\\4&2&7&8\end{vmatrix}$, 求

(1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$; (2) $A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}$;

(3) $A_{31}+2A_{32}+A_{34}$, 其中 A_{ij} 为元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ 的代数余子式.

解 (1) 由题意可先分别计算 4 个代数余子式, 然后再求和, 但这比较繁琐. 由于行列式的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 与元素 a_{ij} 无关, 可构造一个行列式 (用 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 的系数置换 D 的第 4 行元素), 所以

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1\times A_{41}+1\times A_{42}+1\times A_{43}+1\times A_{44}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&2&2\\3&0&2&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0;$$

(2) 同理 $A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}=\begin{vmatrix}1&1&3&4\\2&2&2&2\\3&3&2&6\\4&4&7&8\end{vmatrix}=0$;

或应用行列式性质 6, 且观察到本题中

$$a_{11}=1,a_{21}=2,a_{31}=3,a_{41}=4,$$

则

$$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}=a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}+a_{41}A_{42}=0;$$

$$(3)\ A_{31}+2A_{32}+A_{34}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&2&2\\1&2&0&1\\4&2&7&8\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1&3&4\\2&1&2&2\\1&1&0&1\\4&1&7&8\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}1&0&3&3\\2&-1&2&0\\1&0&0&0\\4&-3&7&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&3&3\\-1&2&0\\-3&7&4\end{vmatrix}=18.$$

例 2 (2001 考研)　设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix},$$

则第 4 行各元素的余子式之和的值为______.

解　本题即求 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$, 其中 M_{ij} 为元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ 的余子式. 由于第 i 行元素的代数余子式 (余子式) 与第 i 行的元素无关, 又 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 或 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$, 所以

$$\begin{aligned}&M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}\\=&(-1)^{4+1}A_{41}+(-1)^{4+2}A_{42}+(-1)^{4+3}A_{43}+(-1)^{4+4}A_{44}\\=&-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}\\=&-7\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.\end{aligned}$$

例 3　设 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&3&4\\3&2&2\end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{A}|$ 中所有元素的余子式之和是 (　　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) 24

解 选 B.

由 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=1$, 得 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|}=1$, 又 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$, 则 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

从而 $|\boldsymbol{A}|$ 中所有元素的余子式之和是

$$\begin{aligned} & M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{31}+M_{32}+M_{33} \\ = & A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{21}+A_{22}-A_{23}+A_{31}-A_{32}+A_{33}=0. \end{aligned}$$

【评注】 此类题型主要考查行列式元素的代数余子式 (余子式) 的概念及行列式的计算. 另外, 在计算有关代数余子式求和时, 应注意到行列式元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 与 a_{ij} 的取值无关.

2. 一般行列式的计算

常见的方法有:

(1) 直接利用行列式的定义计算;

(2) 利用行列式的性质化为三角形行列式计算;

(3) 降阶法: 使用行列式的性质将行列式的某行 (列) 化为只有一个非零元素然后按该行 (列) 展开, 这样行列式的阶数可降低一阶, 如此继续化行列式为较低阶行列式来计算;

(4) 利用已知行列式进行计算, 其中最重要的行列式是范德蒙德行列式;

(5) 数学归纳法: 当已知一个 n 阶行列式结果, 要证明其等式对于任意的自然数都成立, 常使用数学归纳法证明. 如果未知 n 阶行列式的结果, 也可先计算当 $n=1,2,3$ 时的行列式值, 推导出 n 阶行列式的结果, 然后使用数学归纳法证明结论的正确性, 这种方法通常用来证明关于 n 阶行列式等于某个值的题目;

(6) 递推公式法: 应用行列式的性质, 把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的线性关系式, 再根据此关系式递推求得所给 n 阶行列式的值.

【注】 (1) 以上六种方法中的前三种是基本的算法, 应该熟练掌握. 需要指出的是, 一个行列式的计算方法往往不是惟一的, 有时需要多种方法交叉使用.

(2) 由于行列式的计算是本章的重点, 行列式的计算方法又很多, 具体到某个题用何种方法求解往往不是一件简单的事. 故计算行列式时, 应抓住所求行列式的某些特点, 且充分利用这些特点, 选取合适的方法计算行列式.

例 4 (2012 考研) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

解 由于该行列式的元素中零比较多, 可以按行 (列) 展开, 按第 1 列展开求行列式, 得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$$

例 5 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}$.

【分析】 行列式恒等变形时, 根据行列式的特点, 逐行 (列) 相加 (减) 是一个重要的方法.

解 从第 1 行开始, 依次把每行加至下一行, 得

$$\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

例 6 计算行列式 $\begin{vmatrix}a_1&1&1&1\\1&a_2&0&0\\1&0&a_3&0\\1&0&0&a_4\end{vmatrix}$, 其中 $a_i\neq 0(i=2,3,4)$.