



口袋题库考研数学“化繁为简”轻松学系列

线性代数

邹群 • 主编

习题精解巧析



✓ 解题水到渠成

✓ 知识查漏补缺

✓ 串联海量题型

✓ 探索逻辑共性



海量精品资源，实时答疑，与名师互动，口袋题库与瀚海考研强强联手，扫二维码，尽享无限增值服务！



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn



为简”轻松学系列

线性代数习题精解巧析

邹 群 主 编

易福侠 孟旭东 丁兆明 副主编

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书是作者 20 年教学经验的结晶。作者在广泛收集、细致筛选习题素材的基础上,用 60 个知识点将线性代数课程“庖丁解牛”,并且设法将各个知识点根据知识体系及解题方法有机地联系起来,体现了作者独创的先以思想引出方法,再以方法指导解题的“化繁为简学习法”的总构思。

本书分为 6 篇,分别是行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型,每篇均由知识网络图、章节综述、若干知识点、综合测试题及详解组成。知识网络图可使读者形成知识框架,是学习本课程及解题的思维导图;章节综述言简意赅,系统解释知识网络图,是连接各章节及各个知识点的枢纽;题目按难度系数分为 5 类,循序渐进;题目的解析,从宏观思想方法到微观的解题技巧两方面深入解剖,其中穿插的 8 大“招数”是作者在海量题目中提炼出的解题技巧的精华。

本书每个章节及知识点中均穿插“书链”二维码,内含更多免费资源。本书适合考研复习和初学本课程的学生作为强化练习使用,也适合大学教师用于教学参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题精解巧析 / 邹群主编. —北京:电子工业出版社, 2016.5

(口袋题库考研数学“化繁为简”轻松学系列)

ISBN 978-7-121-28741-1

I. ①线… II. ①邹… III. ①线性代数—研究生—入学考试—题解 IV. ①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 095245 号

策划编辑:齐 岳

责任编辑:徐 静 特约编辑:刘 凡

印 刷:三河市鑫金马印装有限公司

装 订:三河市鑫金马印装有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×1 092 1/16 印张:20.75 字数:400 千字

版 次:2016 年 5 月第 1 版

印 次:2016 年 5 月第 1 次印刷

定 价:45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:(010) 88254473、qiyyue@phei.com.cn。

前言



《高等数学习题精解巧析》、《线性代数习题精解巧析》及《概率论与数理统计习题精解巧析》是我们编写的系列习题书写任务。由于此类书多而繁杂，我们深感若不能写出特色，则很难被读者认可。因此我们殚精竭虑，力图将多年教学之精华全倾注于这套书中。

在写本套书之前，我们已经总结出了学习大学数学的“化繁为简学习法”。此方法立足于知识点的概括与联系，力图将千头万绪的知识点变得简单易懂。其特点是以“极限”等思想提炼方法，以方法指导繁杂的题型，以专题带动知识点。若运用此方法，将彻底打破数学学习枯燥刻板的印象，给学习者一种全新的体验。我们将“化繁为简学习法”贯彻到本习题书系列中，但是由于本习题书系列是按照知识点切分的，即需要和知识点串讲相结合，因此出现一个矛盾：若过分注重知识点的细分，则难免冲淡“化繁为简学习法”的思想；若要考虑知识点的联系，如何组织内容又是一个难题。若不解决这个矛盾，则难以将本习题书系列写出特色。

就线性代数课程而言，其内容相对高等数学课程而言少很多，题型的变化也不如后者。但是本课程的特点在于其学习方法与高等数学相比有较大差异。高等数学再难学，它毕竟是中学数学的延续，其内容不过是在中学数学的内容加上“极限”的思想而已，学生们接受起来相对容易。线性代数则不同，它在中学基本上没有“根”，其思维方式与中学的数学也迥然不同：概念更加抽象，更偏重概念的联系及证明。因此，能否在较短的时间内掌握本课程的中心思想与主要解题方法，就成为摆在学生面前的一个重大问题。

我们在多年教学实践的基础上，将“化繁为简学习法”的精髓加入书中，将线性代数的核心：“一个问题、两个工具”紧密地联系起来，让所有习题真正生动起来，我们不做习题的“搬运工”，不在题海中迷失，我们要引导学生在题海中畅游无阻。

针对上面两个问题，本书的解决方案是在结构上以细分知识点为主，运用“化繁为简”的思想，在本书前面将所有知识点联系起来引出整本书的“思维导图”，同时在每章前面也各有一个框图。这些图可反映出三个方面的内容：第一，反映知识点之间的联系，不让每个知识点成为“孤岛”，让学生在各个知识点之间能够通行无阻；第二，引导学生有目的地选择题目来练习，也就是说，不一定要按部就班地沿着知识点的顺序机械地去做题，而是通过这些图可以引导学生有选择性、有重点地做题，大大提高学习的效率；第三，通过这些图让大家明白综合题的出题思路，从而顺利拆解综合题。

本书的结构是将线性代数课程精确地分为 60 个知识点，每个知识点均为一个最小的功能模块：知识点内容包含其涉及的定理、概念、结论与解题方法综述等，相关的习题按照 5 个等级的难点尽可能铺开，习题皆精心选择且比较全面，配有精细的解析，部分

习题后面还附有精彩的点评，中间插上一些“小而精”的总结。总结中有不少原创的或归纳的“独门绝技”，我们将这些独门绝技总结成8大招数：妙招、怪招、险招、绝招、奇招、趣招、无招胜有招、比招，合起来就是“妙怪险绝，奇趣无比”。

最具吸引力的是，书中每章及每个知识点均植入“口袋题库考研”开发的“书链”APP学习平台的二维码，学习者可在手机上下载“书链”APP应用，安装后扫二维码即可进入本书的资源库，资源库中将持续上传本书丰富的资源，如更多的对应知识点的习题、视频，以及化繁为简学习法思维导图、解题招数详解、精品教案等，作为本书的延伸服务。读者也可以下载“口袋题库考研”APP应用进入“邹群考研数学课堂”，体验全新的学习模式：共享海量学习资源，吸取前人的学习经验，与学长、专家零距离互动等，最大限度地提高学习数学的效率。“口袋题库考研”APP学习平台与本书联合，学习者与作者零距离互动，书中的不足将在第一时间内反馈到作者的面前，使得习题书的更新速度加快，习题书于是有了自我修复、自身造血的强大功能。最可喜的是，“口袋题库考研”作为线上平台可与书籍系列形成线上与线下互相补充、相得益彰的局面，这是其他同类书籍所不具备的优势。

总之，本习题书系列与其他同类习题书不同的特色是：解决了习题书总结大同小异、大而散和中心不突出的问题，力求做到形散而神不散、简约而不简单，既有引导又有独特的解题招数。更重要的是在形式、结构与内容上均有所突破，令人耳目一新、一目了然。

本书同时也适合初学的学生，不过初学者会感到题型略微偏难一些，它最适合中等以上基础的学生。当然对教师而言，它也是一个好的题库，因为题型十分丰富，可供教师教学研究和出卷参考使用。

本书的关联平台除“口袋题库考研”外，主编邹群老师的个人网站——瀚海网(<http://hanhai.org>)中也将有与书对应的题库内容供大家试读，题库中的题量比书籍大一倍，可供学生补充使用。其他任何个人和机构未经同意不可发布本系列书籍与题库中的内容，若需合作，必须与“口袋题库考研”及瀚海网联系。

最后，向为本书提供资料、提供建议及参与本书编辑修改工作的所有老师们致以深深的敬意和诚挚的谢意！由于水平及编写时间有限，书中错漏难免，欢迎读者批评指正！所有参与本书编写的师生列举如下。

主 编：邹 群 南昌航空大学

副主编：易福侠 江西交通职业技术学院

孟旭东 南昌航空大学科技学院

丁兆明 江西理工大学（南昌校区）

参编（排名不分先后）：

陈艳君 南昌大学科学技术学院

李 曦 南昌航空大学

喻 璟 江西交通职业技术学院

刘 勇 南昌航空大学

陈 洁（研究生）南昌航空大学

主编 邹群

2016年3月于南昌航空大学

目 录



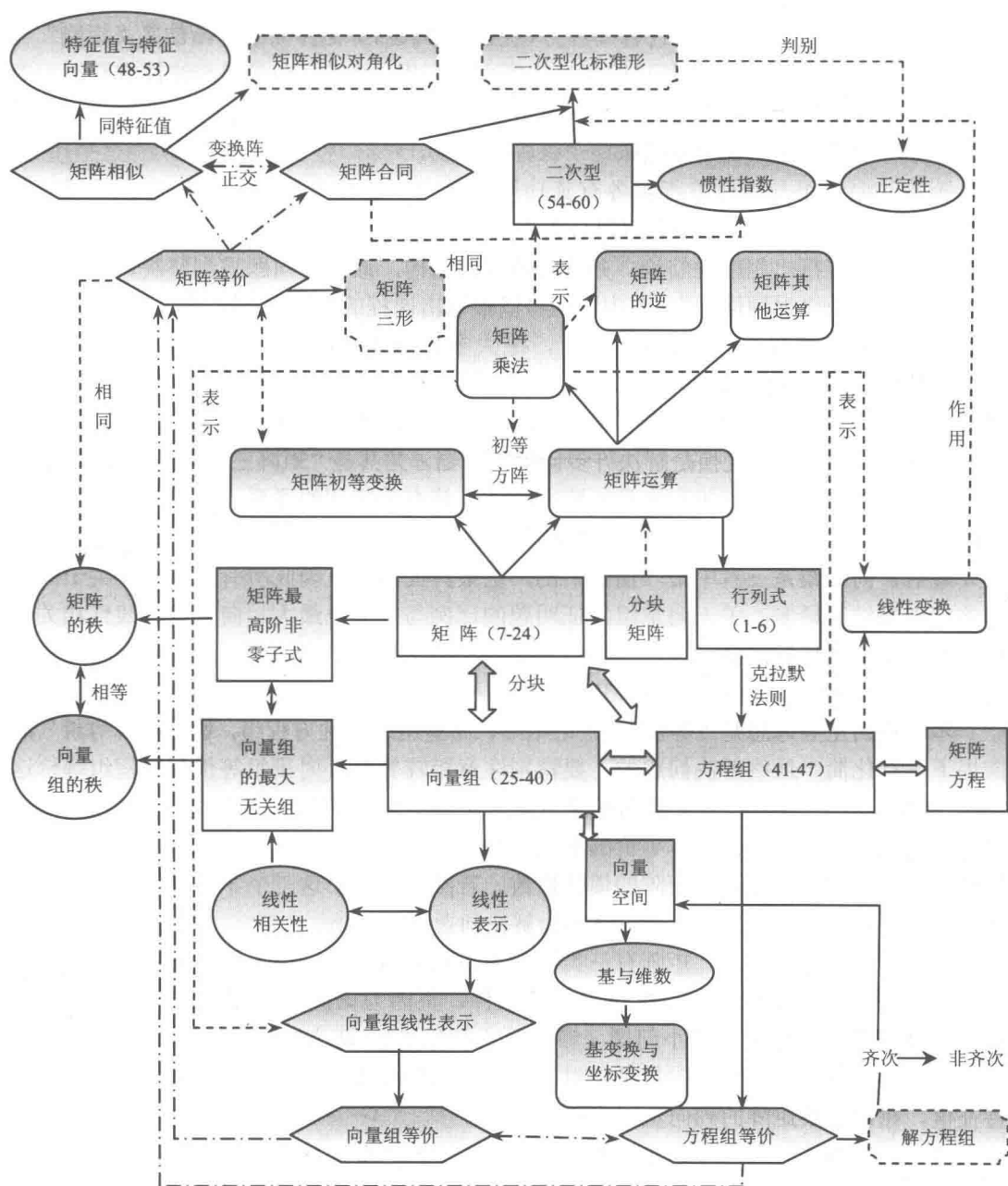
0 总框图及全课程综述	1
0.1 线性代数知识网络结构及知识点关联图	1
0.2 全课程综述	2
第 1 篇 行列式	4
知识网络结构及知识点关联图	4
综述	5
知识点 1 行列式、逆序数	6
知识点 2 行列式的性质	9
知识点 3 余子式、代数余子式	13
知识点 4 行列式按行(列)展开公式	15
知识点 5 计算行列式的方法	18
知识点 6 克拉默法则	24
第 1 篇综合测试题	28
第 1 篇综合测试题详解	31
第 2 篇 矩阵	37
知识网络结构及知识点关联图	37
综述	38
知识点 7 矩阵的概念、线性运算及运算律	40
知识点 8 矩阵的乘法运算及运算律	43
知识点 9 计算方阵的幂	45
知识点 10 转置矩阵及运算律	48
知识点 11 伴随矩阵及其性质	50
知识点 12 逆矩阵及运算律	53
知识点 13 矩阵可逆的判断	57
知识点 14 方阵的行列式及特殊类型的矩阵的运算	59
知识点 15 矩阵方程的求解	62

知识点 16	初等变换的概念及其应用	66
知识点 17	初等方阵的概念	70
知识点 18	初等变换与初等方阵的关系	72
知识点 19	等价矩阵的概念与判断	75
知识点 20	矩阵的子式与最高阶非零子式	77
知识点 21	矩阵的秩的概念与判断	78
知识点 22	矩阵的秩的性质与定理	80
知识点 23	分块矩阵的概念与运算、特殊分块阵的运算	84
知识点 24	矩阵分块在解题中的技巧举例	91
第 2 篇综合测试题		99
第 2 篇综合测试题详解		105
第 3 篇 向量		122
知识网络结构及知识点关联图		122
综述		123
知识点 25	向量的概念及运算	125
知识点 26	向量组的线性组合与线性表示	126
知识点 27	向量组之间的线性表示及等价	129
知识点 28	向量组线性相关与线性无关的概念	133
知识点 29	线性表示与线性相关性的关系	136
知识点 30	线性相关性的判别法	137
知识点 31	向量组的最大线性无关组和向量组的秩的概念	141
知识点 32	矩阵的秩与向量组的秩的关系	143
知识点 33	求向量组的最大无关组	145
知识点 34	有关向量组的定理的综合运用	149
知识点 35	内积的概念及性质	153
知识点 36	正交向量组、正交阵及其性质	156
知识点 37	向量组的规范正交化、施密特正交化方法	159
知识点 38	向量空间(数一)	163
知识点 39	基变换与过渡矩阵(数一)	166
知识点 40	基变换下的坐标变换(数一)	169
第 3 篇综合测试题		173
第 3 篇综合测试题详解		178
第 4 篇 线性方程组		195
知识网络结构及知识点关联图		195
综述		196
知识点 41	齐次线性方程组解的性质及结构	198

知识点 42 非齐次线性方程组解的性质及结构	202
知识点 43 非齐次线性方程组解的各种情形	205
知识点 44 用初等行变换求解线性方程组	209
知识点 45 线性方程组的公共解、同解	215
知识点 46 方程组、矩阵方程与矩阵的乘法运算的关系	220
知识点 47 方程组、矩阵与向量之间的联系及其解题技巧举例	225
第 4 篇综合测试题	232
第 4 篇综合测试题详解	236
第 5 篇 矩阵的特征值与特征向量	247
知识网络结构及知识点关联图	247
综述	248
知识点 48 特征值与特征向量的概念与性质	250
知识点 49 特征值和特征向量的求解	253
知识点 50 相似矩阵的概念及性质	258
知识点 51 矩阵的相似对角化	261
知识点 52 实对称矩阵的相似对角化	266
知识点 53 利用相似对角化求矩阵和矩阵的幂	271
第 5 篇综合测试题	277
第 5 篇综合测试题详解	280
第 6 篇 二次型	291
知识网络结构及知识点关联图	291
综述	292
知识点 54 二次型及其矩阵表示	293
知识点 55 矩阵的合同	295
知识点 56 矩阵的等价、相似与合同的关系	297
知识点 57 二次型的标准形	300
知识点 58 用正交变换化二次型为标准形	302
知识点 59 用配方法化二次型为标准形	307
知识点 60 正定二次型的概念及判断	310
第 6 篇综合测试题	314
第 6 篇综合测试题详解	316

0 总框图及全课程综述

0.1 线性代数知识网络结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点的序号。

0.2 全课程综述

线性代数课程学时不多,其特点是内容紧凑、结构性强、内容之间的逻辑关系紧密,这与高等数学课程迥异,初学者适应它需要一个过程,对于考研学生来说,尤为重要的是如何提高学习效率。

本课程的内容用一句话概括,即“一个问题,两个工具,一个应用”,简称“一二一”。“一个问题”指的是“如何解线性方程组”的问题,“两个工具”指的是“矩阵”与“向量组”,“一个应用”指的是它们在二次型上的应用。矩阵、向量组与线性方程组三者之间的联系非常紧密,许多定理和结论之间都是可以互相关联的,它们像渔网一样,无论站在哪一个基点上,都可以俯瞰整个课程的全貌。

矩阵、向量组与线性方程组各有其功用。首先,线性方程组可以作为本课程的基点⁽⁴¹⁾⁻⁽⁴⁷⁾,解线性方程组的问题可以分为三个小问题(参见第4篇综述),通过对应的矩阵或向量组,可得出相应的结论,并且明确解的结构,最终使问题得到解决。关于三个小问题的结论是“纲领性的”,即由它们可以推导出课程的大部分的定理!

其次,矩阵可以统领全课程⁽⁷⁾⁻⁽²⁴⁾,绝大多数问题都可以归于矩阵来解决。矩阵分为矩阵的运算与初等变换两大部分。矩阵的运算分一元和二元运算两大类,其中行列式⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾、矩阵的逆、矩阵的转置和共轭矩阵为一元运算,矩阵的加法、数乘和乘法为二元运算。矩阵的初等变换是解决许多问题的利器,尤其是“矩阵三形”,各自能对应解决一大类问题。矩阵的初等变换和矩阵的乘法运算有着密切的联系,初等矩阵是联系它们的枢纽,因此矩阵的各类运算中,以矩阵乘法最为重要,用它可以描述许多其他概念。

最后,向量组是三者中最“苗条”的,也最具灵活性,因此所有定理中,关于向量组的定理和结论最多,关于向量组的证明题的比例与难度也最大。向量组的线性相关性是本课程中最难理解的概念,也是向量组的核心概念⁽²⁵⁾⁻⁽⁴⁰⁾,随之可引出向量组的最大无关组及向量组的秩的概念。向量空间则是一种关于矩阵线性运算封闭的代数结构。

本课程的主导思想是“等价”。无论矩阵、向量组或线性方程组,都是在“等价”的前提下进行化简,最终解决问题的。要特别注意矩阵等价、向量组等价与方程组等价这“三大等价”之间的联系。在矩阵等价之下,又有矩阵相似与矩阵合同,它们的背景各异,也各有变换下的不变量:矩阵等价的不变量是矩阵的秩,矩阵相似的不变量是矩阵的特征值,矩阵合同的不变量是矩阵的惯性指数。若熟练掌握了这三个不变量,就能在各类变换中找到其中“不变”的性质,从而为解决问题带来思路。

对应矩阵的三大关系,矩阵有三类标准形,其中矩阵初等变换与合同变换化标准形是无需条件的,仅相似变换化标准形需要条件。正因为如此,大家可以将矩阵相似变换化标准形的问题分为三个小问题(参见第5篇综述),随之引出特征值与特征向量的概念⁽⁴⁸⁾⁻⁽⁵³⁾,特征值与特征向量是成对的,矩阵相似对角形对角线上的元素即为矩阵的特征值,相似变换矩阵的列向量即为特征向量。

对于二次型⁽⁵⁴⁾⁻⁽⁶⁰⁾,将之化标准形是一类重要的题型,这里对应矩阵的合同变换,它与相似变换是完全不同的两种变换,但在正交变换下两者是一致的。

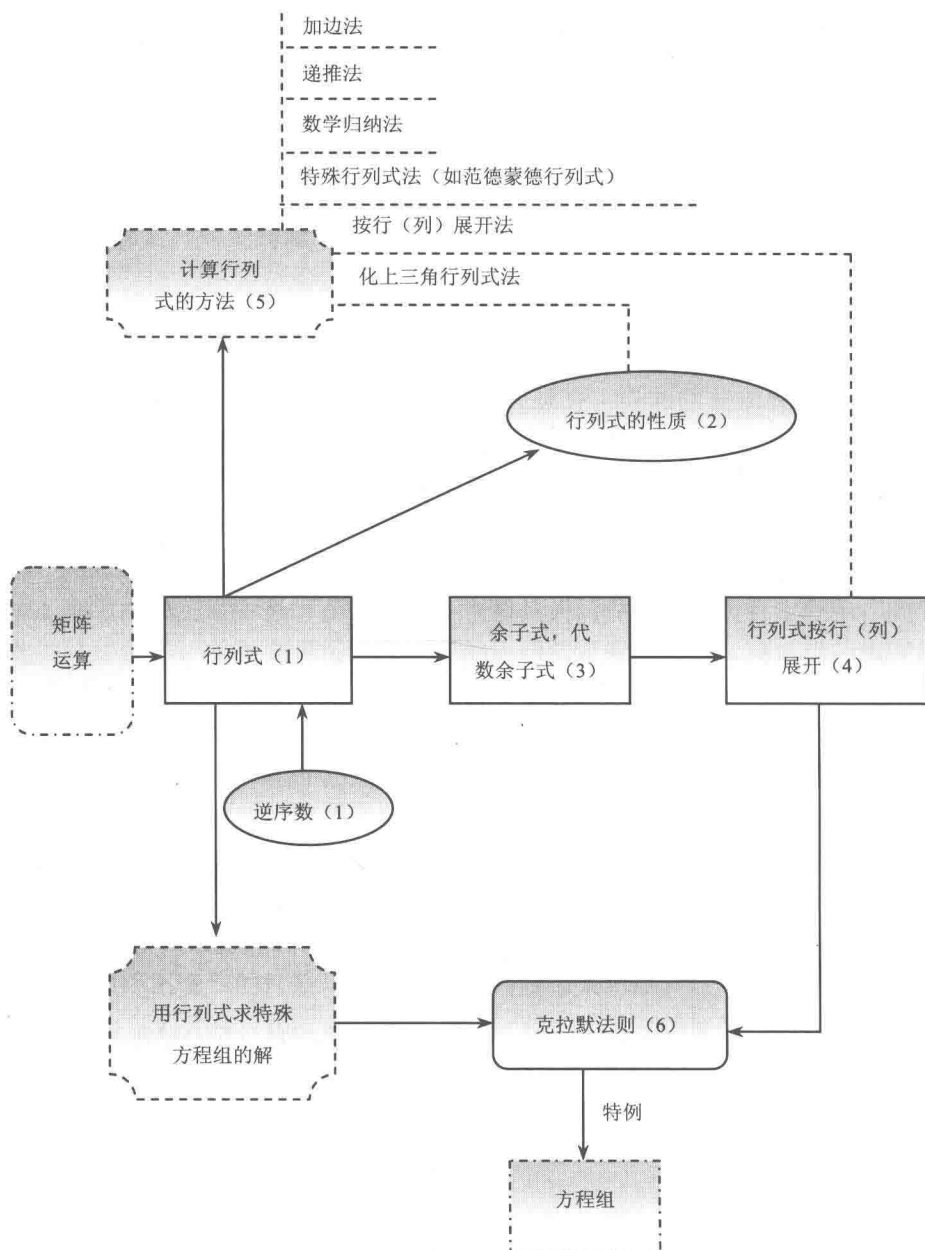
下面简述如何求解综合题。综合题涉及的都是抽象的矩阵、向量组和方程组,其中

涉及的概念很多，考研题中很常见，因此大家会感到困难，面对题目无从下手。本课程解综合题的“密钥”是通过矩阵分块，将向量组、矩阵与方程组联系起来，它们互为工具来解题。大家很容易忽视矩阵分块，实际上它是连接矩阵、向量和线性方程组的“中心枢纽”。对初学者而言，不需要太重视它，但是作为考研的学生，若不重视它则难以解好综合题。因此大家必须重视矩阵的分块，若没有矩阵分块，本课程不但松散，而且缺乏灵活性。

注：文字后面括号中的上标标号指的是知识点的序号。

第1篇 行列式

知识网络结构及知识点关联图



注: 括号内的序号为对应知识点的序号。

第 1 篇

综 述

行列式⁽¹⁾是线性代数课程的开端，它和其他章节的联系不那么紧密，比较“特立独行”。实际上，它可归类于对特殊矩阵的一种特殊的运算，即方阵的行列式运算，运算的结果是一个数。在行列式中首次涉及“序”的思想，而此思想将贯穿于线性代数课程的始终。

本篇分为两部分，第一部分为行列式的概念及计算，其主要计算方法有两种，即通过行列式的性质⁽²⁾而得的化上三角行列式法，以及通过代数余子式而得的⁽³⁾行列式按行或列展开法⁽⁴⁾，而数学归纳法、递推法、特殊行列式法、加边法等考研题中较少见⁽⁵⁾；第二部分为克拉默法则⁽⁶⁾，它解决了 n 元 n 个线性方程组成的线性方程组何时有一解的问题。实际上，在第 4 篇有更简便且适合所有方程组的解法，克拉默法则的主要意义在理论方面，在一些抽象的矩阵或行列式的证明题中偶尔会用到它。

大家在复习本篇时请注意它和后面内容的联系。联系之一是在线性方程组解的结构中，克拉默法则默默扮演了一个“隐藏”的角色：对于一般的方程组，除去“多余”的方程及自由未知量之后，剩下的变量数目与方程的数目是相同的，这才符合克拉默法则的条件！因此克拉默法则是解线性方程组的基础。它给出了一个解方程组的原则：一个独立方程解一个未知量（这里所谓“解一个未知量”，指的是未知量有唯一解）。联系之二是行列式的值非零当且仅当它对应的矩阵可逆，它是判断矩阵可逆的一种常用的方法。联系之三是行列式的性质中有几个性质与矩阵的初等变换很相似，大家需要特别注意，虽然它们之间有联系，但是属于完全不同的运算。

行列式与矩阵的其他运算结合起来会出现很多巧妙的题型，比较精彩的是利用矩阵乘法的行列式的性质： $|AB| = |A||B|$ 来解题，它在许多技巧性强的题目中扮演了“魔术师”的角色，用了它之后常常会有许多令人惊喜的结论出现，关于这一点将在第 2 篇中举出具体实例。

注：文字后面括号中的标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握，并根据自己的实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

更多资源请扫二维码：



知识点1 行列式、逆序数

更多资源请扫二维码:



1.1 概念、定理

1. 概念

定义 1.1.1 二阶行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

定义 1.1.2 三阶行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

定义 1.1.3 主对角线 从左上角元素到右下角元素的连线称为主对角线。

定义 1.1.4 副对角线 从右上角元素到左下角元素的连线称为副对角线。

定义 1.1.5 全排列 n 个不同的元素排成一列, 叫做这 n 个元素的全排列 (简称排列)。 n 个不同元素的所有排列的种数通常用 P_n 表示。

定义 1.1.6 标准排列 在 n 个自然数的全排列中, 排列 $123\cdots n$ 称为标准排列或自然排列。

定义 1.1.7 逆序数 在一个排列中, 当某两个元素的先后次序与标准排列的次序不同时, 就称为有一个逆序。一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。

定义 1.1.8 奇排列 逆序数为奇数的排列叫做奇排列。

定义 1.1.9 偶排列 逆序数为偶数的排列叫做偶排列。

定义 1.1.10 n 阶行列式 设有 n^2 个数构成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix} \quad (1.1)$$

其代数数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

(其中, $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列; t 为这个排列的逆序数; Σ 表示对所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 取和) 称为 n 阶行列式, 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为 $\det(a_{ij})$, 其中数 a_{ij} 称为行列式的元素, 下标 i 与 j 分别称为行标与列标。另有一种记法是 $|A|$, 其中的 A 即为数表 (1.1), 即方阵。

定义 1.1.11 上(下)三角行列式 主对角线(不包括主对角线)以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角行列式。

定义 1.1.12 对换 在排列中, 将任意两个元素对调, 其余元素不动, 这种作出新排列的变换叫做对换。将相邻两个元素对换, 叫做相邻对换。

2. 定理

定理 1.1.1 一个排列中的任意两个元素对换, 排列改变奇偶性。

推论 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列变成标准排列的对换次数为偶数。

定理 1.1.2 n 阶行列式的等价定义 数表同式 (1.1), n 阶行列式也可定义为

$$\sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

其中, t 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数。

1.2 知识点及解题方法综述

● 知识点考频: 1

● 最关联知识点: 知识点 3, 知识点 4

● 综述: 本知识点从二、三阶行列式的概念引出 n 阶行列式的定义, 行列式是方阵的运算, 其值是一个数。引出行列式之前须提出排列的逆序数的概念。本知识点的题型分为两类, 一类是求逆序数; 另一类是低阶行列式的求解及根据定义计算行列式的方法, 根据定义一般只能求一些特殊行列式的值, 如含元素“0”较多的行列式。

1.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引: 例 2.3.2

例 1.3.1 (难度系数 0.2) 排列 356124 的逆序数为_____； n 个元素组成的排列 $23 \cdots n1$ 的逆序数为_____； $2n$ 个元素组成的排列 $24 \cdots (2n)13 \cdots (2n-1)$ 的逆序数为_____。

解析: 此题考查逆序数的概念。在计算逆序数时, 可以打个比方: 将每个数看成一个人, 可以让大家从左往右看齐, 每个人数出右边比自己矮(即比自己数字小)的人的个数, 最后将所有数出的数加起来即为此排列的逆序数。同理, 也可以从右往左看齐。

解: $8; n-1; \frac{n(n+1)}{2}$ 。

例 1.3.2 (难度系数 0.6) 如果 n 个元素组成的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数是 k , 则排列 $j_n \cdots j_2 j_1$ 的逆序数是 ()。

- (A) k (B) $n-k$ (C) $\frac{n!}{2}-k$ (D) $\frac{n(n-1)}{2}-k$

解析: 此题比较抽象。仔细观察排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 和 $j_n \cdots j_2 j_1$ 的位置关系, 发现它们的元素顺序正好完全颠倒, 即原来为逆序的成了顺序, 原来为顺序的成了逆序。又因为所有排列中可能的最大逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$, 而排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为 k , 所以 $j_n \cdots j_2 j_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}-k$ 。

解: (D)。

例 1.3.3 (难度系数 0.4) 证明: 如果一个 3 阶行列式 D 的所有元素均等于 ± 1 , 则该行列式的值是偶数。

解析: 本题考查行列式的概念, 可将行列式的定义式列出来进行分析。注意正项与负项的一一对应。

证明: 因为 $D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$, 注意到 3 阶行列式的展开式有 6 项, 可将行列式自带符号 $(-1)^t$ 相异的两项作一一对应, 成为 3 对数, 而等式中每一项的值只能为 1 或 -1, 所以每一对数之和只可能是 2、0、-2, 它们均为偶数, 且偶数的和为偶数, 所以原行列式的值也必为偶数。

例 1.3.4 (难度系数 0.4) 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

解析: 利用行列式的概念来计算行列式。 n 阶行列式的概念式为

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

由于此行列式中有许多的“0”, 且展开式某项中只要含有“0”元素, 此项的值即为 0, 因此展开项中可能非 0 的只有 $a_{12} a_{23} a_{34} \cdots a_{(n-1)n} a_{n1}$ 一项, 且此项中列标排列的逆序数为 $n-1$, 故原行列式的值为 $(-1)^{n-1} n!$ 。

解: $(-1)^{n-1} n!$ 。

例 1.3.5 (难度系数 0.6) $f(x) = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为_____。

解析: 此题直接计算行列式太复杂。根据行列式的定义, 行列式每一项中的元素必须来自不同的行与列。现在从第一列开始选元素: 若第一列选 $a_{11} = 5x$, 那么此项不能再选第一行的元素, 又因为此项后面 3 个因子不可能仅选到 $a_{22} = x$, $a_{33} = x$, $a_{44} = 2x$ 中的两个 (若选到两个, 则必选到第 3 个), 所以此种选法得不到含 x^3 的项; 若第一列选 $a_{31} = 1$, 那么此项第三行不能再选, 显然, 此选法得不到含 x^3 的项; 若第一列选 $a_{21} = x$, 那么此项不能再选第二行的元素, 剩下的为了得到含 x^3 的项, 对应第三、四列只能选 $a_{33} = x$, $a_{44} = 2x$, 于是此项对应第二列只能选 $a_{12} = 1$, 故得到一个含 x^3 的项: $-a_{21}a_{12}a_{33}a_{44} = -2x^3$; 同理, 第一列选 $a_{41} = x$ 时, 得到另一个含 x^3 的项: $-a_{41}a_{22}a_{33}a_{14} = -3x^3$ 。加起来可得 x^3 的系数为 -5 。

解: -5 。

知识点 2 行列式的性质

更多资源请扫二维码:



2.1 概念、性质与规定

1. 概念

定义 2.1.1 转置行列式 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式。

2. 性质

性质 2.1.1 行列式的性质

- (1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等。
- (2) 互换行列式的两行 (列), 行列式变号。