21世纪高等学校经济数学教材

常微分方程

（第二版）

张晓梅　张振宇　张立柱　主编·陈启宏　主审

复旦大学出版社

21世纪高等学校经济数学教材

常微分方程（第二版）

主编 张晓梅 张振宇 张立柱
主审 陈启宏

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/张晓梅,张振宇,张立柱主编. —2 版. —上海:复旦大学出版社,2016. 6
21 世纪高等学校经济数学教材
ISBN 978-7-309-12224-4

Ⅰ. 常… Ⅱ. ①张…②张…③张… Ⅲ. 常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ. O175. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 071677 号

常微分方程(第二版)
张晓梅 张振宇 张立柱 主编
责任编辑/范仁梅 陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
浙江省临安市曙光印务有限公司

开本 787 × 960 1/16 印张 34.75 字数 593 千
2016 年 6 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-12224-4/O · 588
定价: 69.00 元

内容提要

本书是“21世纪高等学校经济数学教材”丛书之一.全书共8章,内容分别为:绪论、初等积分法、定解问题与适定性、高阶微分方程、一阶线性微分方程组、稳定性理论简介、一阶线性偏微分方程和差分方程.书末附有习题参考答案及提示,并专门增加“常微分方程学习指导与习题解答”的内容,便于读者进一步阅读参考.全书详细介绍了常微分方程的基本理论和常用解法,理论严谨,叙述深入浅出;注重思想方法的阐述、概念实质的揭示和近代数学观念的渗透;强调微分方程的实际应用(几乎每章都有应用实例),尤其是在社会、经济、生态领域中的应用,体现了财经类专业的教育特色.

本书可作为高等院校数学与应用数学、信息与计算科学、数量经济、金融工程等专业本科生的教学用书,也可供经济类各专业的教师与研究生参考.

21 世纪高等学校经济数学教材
编 委 会

（以姓氏笔画为序）

第二版前言

本书是高等院校数学与应用数学、信息与计算科学、数量经济、金融工程等专业本科生的教学用书.

第一版在2010年出版，已经使用了五年多.在使用的过程中，我们陆续发现一些有待完善之处，为此，我们对《常微分方程》教材进行了修订.修订工作包括：

(1) 第一章补充了微分方程应用模型习题；

(2) 第二章调整和补充了例题与部分习题；

(3) 改写了第三章3.1和3.3的内容，补充了"近似计算与误差估计"的内容，调整和补充了一定数量的例题和习题；

(4) 第四章补充了4.1的内容，调整和补充了课后习题的类型；

(5) 第五章补充了课后习题的类型和数量；

(6) 改写了第六章的内容；

(7) 第七、八章 补充内容和修改一定数量的典型例题和习题.

本课程于2012年作为上海财经大学校级重点课程进行了建设，我们编写了与本教材配套的《常微分方程学习指导与习题解答》，得到了专家组和学生的一致好评.现将教材和此辅导书一起出版，作为对教材内容的补充和拓展.

该辅导书的主要特点为：

(1) 每章都给出了详细的复习指南，包括各节的基本概念、定理和计算公式、概念的内涵、外延、重点和难点等内容；

(2) 每章都配备了一定数量的"典型例题"，对各种题型，包括教材中有一定难度的习题、一些有特色的考研题目，给出了详细的解题过程；

(3) 每章都配备了综合练习题，包括一定数量的社会、经济、金融等方面的应用题，这样的辅导书一方面可以为学生提供更丰富的练习，加深学生对知识的理解，另一方面可以开阔学生的视野，培养学生良好的逻辑思维能力以及综合分析能力.

希望该辅导书能帮助大学生、研究生克服学习中的困难，更好地理解和掌握

本门课程.

教材和辅导书的内容参阅了其他有关著作,在此向这些著作的作者们深表感谢.在完成本书第二版修订时,得到了上海财经大学重点课程项目的资助以及上海财经大学数学学院的资助;陈启宏教授也为这次修订工作提供了很好的意见;复旦大学出版社范仁梅老师和陆俊杰老师的认真编辑,对保证教材的质量起到了积极的作用,一并表示衷心的感谢.

作者

2016 年 5 月

第一版前言

常微分方程是高等院校数学类专业的一门应用性较强的基础课，对训练学生的逻辑思维能力、计算推导能力、分析与解决实际问题的能力有着极其重要的作用.

本书是“21世纪高等学校经济数学教材”丛书之一. 全书共分8章，依次介绍了常微分方程的基本概念、初等积分法、解的存在唯一性定理、线性微分方程与方程组的一般理论和求解方法、微分方程的稳定性理论、一阶线性偏微分方程及差分方程等内容.

本书的主要特点为：

(1) 注重思想方法的梳理. 在阐述各种微分方程(组)的解法时，遵循研究的意义、求解的方法和实际的应用这种分析思路，强调基本方法的科学性、系统性，力求结构完整、叙述清晰、深入浅出.

(2) 注重微分方程的实际应用，体现财经类专业的教育特色. 选用了很多微分方程在经济、社会、生态、金融领域中的应用实例，目的是对学生加强应用意识的培养，提高学生提出、解决实际问题的能力.

(3) 注重基本理论的拓展. 在第三章中，在原有经典证明方法的基础上，又介绍了利用不动点原理证明一阶方程初值问题解的存在唯一性的方法，并讨论了边值问题解的存在唯一性条件. 通过拓展这些理论，希望对学生开阔思路有所帮助.

(4) 注重例题、习题的多样性. 本书的例题、习题可分3类. 第一类是帮助读者理解基本概念、验证基本理论、掌握基本方法的基本题；第二类是要求读者在深入理解各种方程(组)的求解方法和基本理论的基础上，灵活运用所学知识、需要一定技巧的提高题；第三类是具有丰富实际背景的应用题. 全书的计算题在书末都给出了相应的答案或提示.

本书由上海财经大学应用数学系与上海金融学院应用数学系教师合作编写. 编者分别是上海财经大学应用数学系张晓梅副教授(第一、第二、第四、第五

章)、张振宇副教授(第三、第七、第八章)、上海金融学院应用数学系迟东璇教授(第六章).上海财经大学应用数学系陈启宏教授在编写过程中,对本书的结构体系、内容安排提出了许多宝贵的意见,并主审了初稿和修改稿,在此表示衷心的感谢.本书得到了上海财经大学重点课程建设项目资助,复旦大学出版社范仁梅老师对本书的出版提供了大量帮助,在此一并表示衷心的谢意.

限于编者水平,书中难免有缺点和不妥之处,敬请读者批评指正.

编者

2010年5月

目 录

第一章 绪 论

方程对于我们来说是比较熟悉的，在初等数学中就接触过各种各样的方程，比如线性方程、二次方程、高次方程、指数方程、对数方程、三角方程和方程组，等等. 但是对更复杂的实际问题，我们常常不能直接得出上述方程，只能够得出包含变量导数或微分的关系式，这就是微分方程. 微分方程可以描述物理、化学、生物、工程、航空航天、医学、经济和金融领域中的许多原理和规律，如牛顿运动定律、能量守恒定律、人口发展规律、生态种群竞争、疾病传染、遗传基因变异、股票的涨幅趋势、利率的浮动、市场均衡价格的变化等. 因此，微分方程是解决各种实际问题的最基本的数学理论和方法. 本章首先列举导出微分方程的一些典型例子，然后结合这些例子，介绍常微分方程中所涉及的一些基本概念.

1.1 微分方程模型

例 1 **人口预测模型**. 影响人口增长的因素很多，如人口的自然出生率、人口的自然死亡率、人口的迁移、自然灾害、战争等诸多因素. 英国人口统计学家 Malthus(1766—1834)根据百余年的统计资料，于 1798 年提出了闻名于世的 Malthus 人口模型：在单位时间内人口的增长量与人口成正比. 在此假设下，试推导人口随时间变化的数学模型.

解 设时刻 t 的人口数量为 $N(t)$，r 为比例系数. 根据 Malthus 的理论，在 t 到 $t+\Delta t$ 时间段内，人口的增长量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t,$$

从而

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=rN(t).$$

令 $\Delta t\to 0$ 得到

$$\frac{dN}{dt}=rN,$$

再假设 $t=t_0$ 时刻的人口为 N_0，于是得到

$$\begin{cases}\dfrac{dN}{dt}=rN,\\ N(t_0)=N_0.\end{cases}\tag{1.1}$$

这就是 Malthus 人口模型. 实际上(1.1)式就是一个微分方程的定解问题，如果能够求出满足该方程的函数 $N(t)$，那么我们就了解了人口随时间的增长规律. ■

例 2 **市场价格模型.** 对于纯粹的市场经济来说，商品市场价格取决于市场供需之间的关系，市场价格能促使商品的供给与需求相等(这样的价格称为(静态)均衡价格). 也就是说，如果不考虑商品价格形成的动态过程，那么商品的市场价格应能保证市场的供需平衡，但是，实际的市场价格不会恰好等于均衡价格，而且价格也不会是静态的，应是随时间不断变化的动态过程. 试建立描述市场价格形成的动态过程的数学模型.

解　假设在某一时刻 t，商品的价格为 $p(t)$，其变化率 $\dfrac{dp}{dt}$ 与需求和供给之差成正比. 记 $f(p, r)$ 为需求函数，$g(p)$ 为供给函数(r 为参数)，于是得到如下方程：

$$\begin{cases}\dfrac{dp}{dt}=\alpha[f(p, r)-g(p)],\\ p(0)=p_0,\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 p_0 为商品在 $t=0$ 时刻的价格，α 为正常数. (1.2)式就是描述市场价格形成的动态过程的数学模型. 如果能够求出满足该方程的函数 $p(t)$，那么我们也就了解了商品价格的动态变化规律. ■

例 3 **战争模型.** 影响战争胜负的因素有很多，兵力的多少和战斗力的强弱是两个主要的因素. 士兵的数量会随着战争的进行而减少，这种减少可能是因为阵亡、负伤与被俘，也可能是因为疾病与开小差，分别称为战斗减员与非战斗减员. 士兵的数量也可随着增援部队的到来而增加. 从某种意义上来说，当战争结束时，如果一方的士兵人数为零，那么另一方就取得了胜利. 试建立正规战中相关因素之间关系的数学模型.

解　先给出如下假设：

(1) x，y 双方士兵公开活动. x 方士兵的战斗减员仅与 y 方士兵人数有关. 记双方士兵人数分别为 $x(t)$，$y(t)$，则 x 方士兵战斗减员率为 $ay(t)$，a 表示 y

方每个士兵的杀伤率. 又 $a=r_y p_y$, r_y 为 y 方每个士兵的射击率(每个士兵单位时间的射击次数), p_y 为每次射击的命中率. 同理,用 b 表示 x 方士兵对 y 方士兵的杀伤率,即 $b=r_x p_x$.

(2) 双方的非战斗减员率仅与本方兵力成正比,减员率系数分别为 α, β.

(3) 设双方的兵力增援率为 $u(t)$, $v(t)$.

根据假设,可以得到如下方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-ay-\alpha x+u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-bx-\beta y+v(t). \end{cases} \tag{1.3}$$

这就是正规战中相关因素之间关系的数学模型. (1.3)式是由两个微分方程构成的微分方程组. 如果能够求出满足该方程组的两个函数 $x(t)$, $y(t)$,那么就可以讨论每一方的兵力随时间的变化关系,以及双方之间兵力的变化关系等. ■

例 4 **减肥模型.** 随着社会的进步和发展,人们的生活水平不断提高,“肥胖”已经成为全社会关注的一个重要的问题. 如何正确对待减肥是我们必须考虑的问题. 试建立减肥的数学模型.

解　先给出如下假设:

(1) 以人体脂肪的重量作为体重的标志. 假设脂肪的能量转换率为 100%,每 1 kg 脂肪可以转换为 D J 的能量;

(2) 假设人体的体重只是时间 t 的函数 $w(t)$,且随时间连续变化;

(3) 假设人体每天摄入的能量是一定的,记为 A;

(4) 假设在单位时间(1 日)内,人体所消耗的能量和人体活动所消耗的能量都正比于人的体重,记 C 为 1 kg 体重每天消耗的能量,B 为 1 kg 体重每天因活动所消耗的能量.

于是,体重改变的能量变化为 $D[w(t+\Delta t)-w(t)]$,摄入与消耗的能量之差为 $A\Delta t-(B+C)w(t)\Delta t$.

根据能量的平衡原理:任何时间段内由于体重的改变所引起的人体内能量的变化应该等于这段时间内摄入的能量与消耗的能量的差. 于是在时间区间 $[t, t+\Delta t]$ 内能量的改变为

$$D[w(t+\Delta t)-w(t)]=A\Delta t-(B+C)w(t)\Delta t.$$

两边同时除以 Δt 并令 $\Delta t\to 0$,得以下方程: