高等学校公共基础课“十三五”规划教材

高等数学同步辅导(下册)

——配合同济七版高等数学

杨有龙　吴 艳　陈慧婵　编◎

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校公共基础课“十三五”规划教材

高等数学同步辅导(下册)

——配合同济七版高等数学

杨有龙　吴　艳　陈慧婵　编

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是与同济大学数学系编写的第七版《高等数学》下册(高等教育出版社出版)相配套的同步辅导教材，书中各章均包括教学要求、答疑解惑、典型例题、习题选解和培优提升五个部分.

"教学要求"部分表明了施教的基本要求和教学目的；"答疑解惑"部分针对学生在学习过程中产生的疑难问题，采用问答的形式予以解答，可达到厘清概念、释疑解惑的目的；"典型例题"部分通过对具体例题的分析和求解，引导学生产生联想，从中领悟求解的基本方法和途径，从而掌握一定的解题技巧和了解各种基本题型；"习题选解"部分通过对教材中有代表性的习题进行解答，为学生自我测试和检查对比提供方便；"培优提升"部分选取了近几年具有代表性的数学竞赛和考研试题并给出解答过程，为学生参加竞赛和考研预热.

本书可作为理工科大学生学习"高等数学"课程的同步辅导教材或参加数学竞赛和报考硕士研究生的理想复习资料，也可作为"高等数学"任课教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导：配合同济七版高等数学. 下册/杨有龙，吴艳，陈慧婵编.
—西安：西安电子科技大学出版社，2016.11
高等学校公共基础课"十三五"规划教材
ISBN 978-7-5606-4342-7

Ⅰ. ① 高…　Ⅱ. ① 杨…　② 吴…　③ 陈…　Ⅲ. ① 高等数学—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. ① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 274522 号

策划编辑　刘小莉
责任编辑　王　瑛
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印　　刷　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2016 年 11 月第 1 版　2016 年 11 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张　15
字　　数　356 千字
印　　数　1～6000 册
定　　价　28.00 元
ISBN 978-7-5606-4342-7/O

XDUP 4634001-1

前　言

高等数学以微积分为核心，具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性. 它包含了处理连续变量的基本理论和科学思维方法，不仅是学习其他自然科学和工程技术的重要基础和工具，而且也是培养和训练学生逻辑推理和理性思维的重要载体. 牢固掌握高等数学蕴含的基础知识，从中发掘和领会科学的思维方法，对大学生全面素质的提高、分析能力的加强和创新意识的启迪都至关重要.

本书与同济大学数学系编写的第七版《高等数学》教材（高等教育出版社出版）相配套，全书共十二章，分上、下两册出版. 上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用与微分方程；下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分以及无穷级数. 本书力求帮助学生加深对高等数学基本概念的理解，引导学生掌握高等数学的解题方法和技巧，培养学生的学习兴趣，启发学生举一反三，达到事半功倍的效果. 本书旨在巩固和提升高等数学的教学效果和质量，为理工科大学生的高等数学自主学习提供同步辅导.

本书第一、二、三、四章由陈慧婵副教授执笔，第五、六、七、八章由杨有龙教授执笔，第九、十、十一、十二章由吴艳副教授执笔，各章都经过反复讨论、修改后定稿.

本书在编写过程中得到了西安电子科技大学数学与统计学院领导和广大高等数学教师的热情支持，他们对本书的编写提出了许多宝贵的建议和修改意见，长期致力于高等数学教学和研究的老教师们给予了鼓励和支持，编者在此致以深深的谢意.

本书的出版得到了西安电子科技大学本科教材立项资助，以及西安电子科技大学出版社领导及编辑的大力支持，策划编辑刘小莉和责任编辑王瑛为本书的出版付出了辛勤的劳动，编者在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在不足和疏漏之处，恳请读者批评指正.

编　者

2016 年 9 月

目　录

第十二章 无穷级数 …… 174

第八章　向量代数与空间解析几何

一、教学要求

1. 理解空间直角坐标系、向量的概念及其表示. 掌握向量的线性运算. 理解向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标的概念. 掌握向量、单位向量、方向余弦的坐标表示法以及用坐标表达式进行向量运算的方法. 掌握向量的数量积、向量积、混合积. 掌握两个向量垂直、平行的条件.

2. 掌握平面方程(点法式、一般式、截距式)的求法. 掌握直线方程(对称式、参数式、一般式)的求法. 会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交)解决有关问题.

3. 理解曲面方程的概念. 了解球面、母线平行于坐标轴的柱面、以坐标轴为轴的旋转曲面(主要是锥面、抛物面)方程的求法. 了解空间曲线的参数方程和一般方程，会求空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

二、答疑解惑

问题 1　已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为非零向量，λ、μ 为实数，那么下列向量等式的几何意义是什么?

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$;

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$;

(3) $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

答　(1) 表示向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 依次首尾相接时，第一个向量的起点与第三个向量的终点相重合. 这在几何上表示以三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为边构成的三角形，或者三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面.

(2) 由混合积的几何意义知，$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 表示以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为邻边构成的平行六面体的体积. 因此，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ 表示平行六面体的体积等于零，即三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面.

(3) 表示向量 $\boldsymbol{c}$ 是由向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的线性组合而得到的，因此向量 $\boldsymbol{c}$ 平行于由向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 确定的平面，即三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面.

问题 2　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，试问:

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，能否推知 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，能否推知 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

(3) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，能否推知 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

答 (1) 不能. 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 知 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 垂直，但 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 未必是零向量，即 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 未必相等.

例如，$\boldsymbol{a}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{b}=(2,3,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,1,-1)$，则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

(2) 不能. 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 知 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 平行，但 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 未必是零向量，即 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 未必相等.

例如，$\boldsymbol{a}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{c}=(2,1,0)$，则有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(0,0,1)$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=(0,0,1)$，但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

(3) 能. 事实上，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 知 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，即 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$；又由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 知 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{a}/\!/(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$. 故向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 既垂直又平行，只有 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

注 由(1)、(2)知，向量的数量积与向量积均不满足消去律.

问题 3 如何判别空间中三点共线，四点共面?

答 (1) 判别空间中三点 A、B、C 共线，等价于判定两个向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 平行. 因此，若 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$，则三点 A、B、C 共线，否则三点不共线.

(2) 判别空间中四点 A、B、C、D 共面，等价于判定三个向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 共面. 因此，若 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$，则四点 A、B、C、D 共面，否则四点不共面.

问题 4 怎样将直线的一般方程化为对称式方程?

答 设直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}\quad(\text{其中 }A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2)$$

将方程组化为对称式的关键是：找出直线 L 上的一个固定点以及确定直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$.

求直线 L 上一个固定点，可先取定 x、y、z 中的某一个值，如先取 $x=x_0$，代入方程组，得到二元方程组

$$\begin{cases}B_1y+C_1z=-D_1-A_1x_0,\\B_2y+C_2z=-D_2-A_2x_0.\end{cases}$$

解该方程组(这里要求方程组有解，否则，可先取 $y=y_0$ 或 $z=z_0$)，得到直线 L 上的固定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$. 直线 L 的方向向量可取为 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}=(m,n,p)$. 求得 L 的对称式方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

问题 5 二次项系数不全为零的三元二次方程的几何图形一定是二次曲面吗?

答 不一定. 二次曲面是指以二次平面曲线为准线的柱面、旋转曲面、锥面、球面、椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面及双曲抛物面等曲面. 例如，下列各二次方程均不表示二次曲面：

(1) 方程 $x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx-4x-8y-12z+3=0$ 可化为

$$(x+2y+3z-3)(x+2y+3z-1)=0,$$

故知它表示两个平行平面：

$$x+2y+3z-3=0 \text{ 与 } x+2y+3z-1=0.$$

(2) 方程 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$ 可化为

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0,$$

故知它表示一条直线：

$$x=y=z.$$

(3) 方程 $x^2+y^2+4z^2-2x-4y-8z+9=0$ 可化为

$$(x-1)^2+(y-2)^2+4(z-1)^2=0,$$

故知它表示一个点(1，2，1).

(4) 方程 $x^2+y^2+z^2+1=0$ 在实数范围内无解，故无图像.

由上可知，三元二次方程在某些情况下，可能表示平面、直线、点，甚至没有图像，这与平面解析几何中二元二次方程不一定都表示二次曲线的情况类似.

问题 6　如何求曲面块或立体在坐标面上的投影区域？

答　通常求一张曲面在某个坐标面上的投影区域总是用曲面的边界曲线在坐标面上的投影曲线来确定的，但这种做法是有条件的，那就是曲面在该坐标面上的投影为“单层投影”. 所谓单层投影，是指曲面上的点与其坐标面上的投影点是一一对应的，称此曲面对该坐标面为单层投影曲面.

反之，若曲面上有不同的点在坐标面上的投影点相同，则曲面在该坐标面上的投影为非单层投影或者为不完全单层投影. 若曲面上总是两个(或两个以上)不同的点在某坐标面上的投影为同一点，则称此曲面在该坐标面上的投影为双层(或多层)投影，也称此曲面对该坐标面为双层(或多层)投影曲面.

单层投影曲面在对应坐标面上的投影区域可以由其边界曲线的投影来确定；双层(或多层)投影曲面可以分割成两个(或多个)单层投影曲面. 当然，判断是单层还是多层投影曲面最直观的方法是画出曲面的草图，当作图有困难时，可通过函数关系式来判断.

投影曲面是单层还是多层，是对某一坐标面而言的. 一个曲面对某个坐标面投影是单层的，对另一个坐标面投影可以是多层的.

例　求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 所截部分在三个坐标面上的投影区域.

解　因为所截得的锥面块 S 满足 $x\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，所以 S 在 xOy 面与 yOz 面的投影是单层的.

由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ x^2+y^2+z^2=4x \end{cases}$ 消去 z，得在 xOy 面的投影曲线为 $x^2+y^2=2x$，故 S 在 xOy 面的投影区域为圆域 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$.

由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ x^2+y^2+z^2=4x \end{cases}$ 消去 x，得在 yOz 面的投影曲线为 $4y^2+(z^2-2)^2=4\ (z\geqslant 0)$，故 S 在 yOz 面的投影区域为圆域 $4y^2+(z^2-2)^2\leqslant 4\ (z\geqslant 0)$.

S 在 xOz 面的投影是双层的，平面 $y=0$ 将 S 分割成对称的两块，一块方程为 $y=\sqrt{z^2-x^2}$，另一块方程为 $y=-\sqrt{z^2-x^2}$，这两块在 xOz 面的投影都是单层的，并且有

相同的投影域.该投影域由 xOz 面内的直线 $z=x$($y=\sqrt{z^2-x^2}$ 与 $y=0$ 的交线)与抛物线 $z^2=2x$($y=\sqrt{z^2-x^2}$ 与 $x^2+y^2+z^2=4x$ 的交线在 xOz 面的投影)所围成，可表示为
$\begin{cases}x\leqslant z\leqslant\sqrt{2x},\\0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}z^2\leqslant x\leqslant z,\\0\leqslant z\leqslant 2.\end{cases}$

三、典型例题

例 1　向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，下列式子成立：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

解　由向量的加(减)法运算知，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 是以向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形两对角线之长，故几何上显然有：

(1) 当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(2) 当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(3) 当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})>\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

注　(1)这里比较的是向量模的大小.由本题可知，两向量之和的模有可能大于、等于或小于两向量之差的模.这是因为向量既有大小，又有方向，其和、差由平行四边形法则决定.不要认为只有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，而无其他可能.

(2) 向量本身是不能比较大小的，因为向量还有方向，例如说 $2\boldsymbol{i}>\boldsymbol{j}$ 是没有意义的.

例 2　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解　已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，故 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$，即

$$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0.$$

因此

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\frac{3}{2}.$$

例 3　试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且其长度等于第三边长度的一半.

证　如图 8－1 所示，设 D、E 分别为 AB、AC 的中点，则有

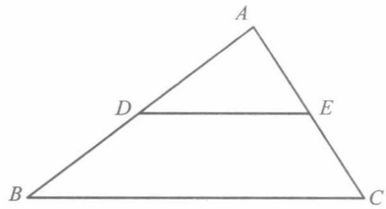

图 8－1

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}),\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

所以$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，从而$\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{BC}$，且$|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$. 即三角形两边中点的连线平行于第三边，且其长度等于第三边长度的一半.

注　利用向量证明一些初等几何问题是向量的应用之一，通常会更简便一些.

例 4　已知点 $P_1(1,2,3)$、$P_2(2,4,1)$、$P_3(1,-3,5)$、$P_4(4,-2,3)$，求：

(1) $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积 $S_{\triangle P_1P_2P_3}$；

(2) 四面体 $P_1P_2P_3P_4$ 的体积 $V_{P_1P_2P_3P_4}$.

解　(1) $S_{\triangle P_1P_2P_3}$是以$\overrightarrow{P_1P_2}$和$\overrightarrow{P_1P_3}$为边的平行四边形面积的$\frac{1}{2}$，由向量积的几何意义有

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}|,$$

其中$\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{P_1P_3}=-5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，故

$$\begin{aligned}S_{\triangle P_1P_2P_3}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}|\\&=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-2\\0&-5&2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}|=\frac{\sqrt{65}}{2}.\end{aligned}$$

(2) $V_{P_1P_2P_3P_4}$是以$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$、$\overrightarrow{P_1P_4}$为边的平行六面体体积的$\frac{1}{6}$，根据三向量混合积的几何意义有$V_{P_1P_2P_3P_4}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3})\cdot\overrightarrow{P_1P_4}|$，其中$\overrightarrow{P_1P_4}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$，故

$$V_{P_1P_2P_3P_4}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3})\cdot\overrightarrow{P_1P_4}|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1&2&-2\\0&-5&2\\3&-4&0\end{vmatrix}\right|=\frac{5}{3}.$$

例 5　已知点 $A(1,0,0)$及点 $B(0,2,1)$，试在 z 轴上求一点 C，使$\triangle ABC$ 的面积最小.

解　所求点位于 z 轴，设其坐标为 $C(0,0,z)$，则$\overrightarrow{AC}=(-1,0,z)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-2,z-1)$. 因为

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&0&z\\0&-2&z-1\end{vmatrix}=2z\boldsymbol{i}+(z-1)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

所以$\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}=\frac{1}{2}\sqrt{5z^2-2z+5}=\frac{1}{2}\sqrt{5\left(z-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{24}{5}}.$$

故当 $z=\frac{1}{5}$时，$\triangle ABC$ 的面积取最小值，即点 C 的坐标为$\left(0,0,\frac{1}{5}\right)$时，$\triangle ABC$ 的面积最小.

例 6 设 M_0 是直线 L 外一点，M 是直线 L 上任意一点，且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，试证：点 M_0 到直线 L 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

证 如图 8-2 所示，设 M_0 到直线 L 的距离为 d，根据向量积的几何意义知 $|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|$ 表示以 $\overrightarrow{M_0M}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 为邻边的平行四边形的面积，而 $\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$ 表示以 $|\boldsymbol{s}|$ 为边长的该平行四边形的高，即为点 M_0 到直线 L 的距离. 因此

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

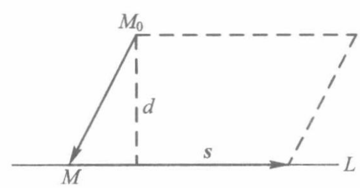

图 8-2

例 7 求与已知平面 $8x+y+2z+5=0$ 平行，且与三坐标面所构成的四面体体积为 $\dfrac{2}{3}$ 的平面方程.

解 方法一：建立平面的一般方程.

设所求平面方程为 $8x+y+2z-D=0$，化为截距式

$$\frac{x}{\frac{D}{8}}+\frac{y}{D}+\frac{z}{\frac{D}{2}}=1.$$

由题意知 $\dfrac{1}{6}\left|\dfrac{D}{8}\cdot D\cdot\dfrac{D}{2}\right|=\dfrac{2}{3}$，解得 $D=4$ 或 $D=-4$. 故所求平面方程为

$$8x+y+2z-4=0 \text{ 或 } 8x+y+2z+4=0.$$

方法二：建立平面的截距式方程.

设所求平面方程为 $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}+\dfrac{z}{r}=1$. 因它与已知平面平行，故有

$$\frac{\frac{1}{p}}{8}=\frac{\frac{1}{q}}{1}=\frac{\frac{1}{r}}{2}.$$

由题意知 $\dfrac{1}{6}|pqr|=\dfrac{2}{3}$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$，$q=4$，$r=2$ 或 $p=-\dfrac{1}{2}$，$q=-4$，$r=-2$.

所以，所求平面方程为

$$8x+y+2z-4=0 \quad \text{或} \quad 8x+y+2z+4=0.$$

例 8 求过点(1, 2, 1)且与两直线

$$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\x-y+z-1=0\end{cases} \text{和} \begin{cases}2x-y+z=0,\\x-y+z=0\end{cases}$$

平行的平面方程.

解　直线$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\x-y+z-1=0\end{cases}$的方向向量为

$$s_1=(1,2,-1)\times(1,-1,1)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & 2 & -1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

直线$\begin{cases}2x-y+z=0,\\x-y+z=0\end{cases}$的方向向量为

$$s_2=(2,-1,1)\times(1,-1,1)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\2 & -1 & 1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

所求平面的法线向量为

$$\boldsymbol{n}=s_1\times s_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -2 & -3\\0 & -1 & -1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

故所求平面方程为$-(x-1)+(y-2)-(z-1)=0$，即

$$x-y+z=0.$$

例 9　设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点$(1,-1,1)$到直线$\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$的垂线，求此平面方程.

解　直线$\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$的方向向量为

$$s=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

作过点$(1,-1,1)$且以 $s=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 为法线向量的平面：

$$-1\cdot(y+1)-(z-1)=0,$$

即

$$y+z=0.$$

联立$\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0,\\y+z=0,\end{cases}$　得垂足$\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

由于所求平面垂直于平面 $z=0$，故可设平面方程为 $Ax+By+D=0$. 因平面过点$(1,-1,1)$及$\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，故有

$$\begin{cases}A-B+D=0,\\-\dfrac{1}{2}B+D=0,\end{cases}$$

由此解得 $B=2D$，$A=D$，因此所求平面方程为 $Dx+2Dy+D=0$，又 $D\neq0$，故有

$$x+2y+1=0.$$

例 10 求一条过点 $M(-1,0,4)$ 的直线 L，使它平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，且与直线 L_1：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交.

分析 要确定直线 L 的方程，只需求出直线 L 的方向向量，或求出直线 L 与 L_1 的交点. 因此将直线、平面的位置关系用直线的方向向量、平面的法线向量及相关向量的关系来描述，就会找到问题的解决方法，并且会有多种不同的解法.

解 方法一：求直线 L 的方向向量.

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$. 已知平面的法线向量 $\boldsymbol{n}=(3,-4,1)$，又直线 L 与平面平行，则有

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=3m-4n+p=0. \qquad (1)$$

由题意知，直线 L_1 过点 $M_1(-1,3,0)$，方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(3,1,2)$，直线 L 与 L_1 共面，故 $\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{s}_1$ 与 $\overrightarrow{MM_1}$ 共面，从而有

$$|(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{s}_1)\cdot\overrightarrow{MM_1}|=\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$-10m+12n+9p=0. \qquad (2)$$

联立方程(1)与(2)，解得 $m=12p$，$n=\frac{37}{4}p$. 可取 $\boldsymbol{s}=(48,37,4)$，得直线 L 的方程为

$$\frac{x+1}{48}=\frac{y}{37}=\frac{z-4}{4}.$$

方法二：设直线 L 的方程为 $\begin{cases} x=-1+mt, \\ y=nt, \\ z=4+pt. \end{cases}$ 已知直线 L 与 L_1 相交，则有

$$\frac{-1+mt+1}{3}=\frac{nt-3}{1}=\frac{4+pt}{2}. \qquad (3)$$

联立方程(1)与(3)，解得 $m=\frac{48}{7t}$，$n=\frac{37}{7t}$，$p=\frac{4}{7t}$. 取 $t=\frac{1}{7}$ 代入直线 L 的方程，得直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(48,37,4)$，所以直线 L 的方程为

$$\frac{x+1}{48}=\frac{y}{37}=\frac{z-4}{4}.$$

方法三：求直线 L 与 L_1 的交点.

过点 $M(-1,0,4)$ 作平面 Π_1 与已知平面平行，则已知平面的法线向量 $\boldsymbol{n}=(3,-4,1)$ 也就是平面 Π_1 的法线向量，从而有

$$\Pi_1: 3(x+1)-4y+(z-4)=0.$$

联立平面 Π_1 的方程与直线 L_1 的方程，求得交点 $N\left(\frac{41}{7},\frac{37}{7},\frac{32}{7}\right)$，则直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{MN}=\left(\frac{48}{7},\frac{37}{7},\frac{4}{7}\right)$，所以直线 L 的方程为

$$\frac{x+1}{48}=\frac{y}{37}=\frac{z-4}{4}.$$

例 11 求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

解 过直线$\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

整理得$(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$. 由

$$(2+3\lambda)\cdot 4+(-4-\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot 1=0$$

得 $\lambda=-\dfrac{13}{11}$. 将 $\lambda=-\dfrac{13}{11}$代入平面束方程中，得

$$17x+31y-37z-117=0.$$

因此，所求投影直线的方程为

$$\begin{cases}4x-y+z=1,\\17x+31y-37z-117=0.\end{cases}$$

例 12 求直线 L_1：$\dfrac{x+5}{6}=1-y=z+3$ 与直线 L_2：$\begin{cases}x+5y+z=0,\\x+y-z+4=0\end{cases}$之间的最短距离 d.

解 方法一：过直线 L_2 的平面束方程可设为

$$\Pi:\ x+5y+z+\lambda(x+y-z+4)=0.$$

令 $L_1 /\!/ \Pi$，则有

$$(6,\ -1,\ 1)\cdot(1+\lambda,\ 5+\lambda,\ 1-\lambda)=0,$$

即

$$\lambda=-\frac{1}{2}.$$

这时平面方程为

$$\Pi_1:\ x+9y+3z-4=0.$$

又$(-5,\ 1,\ -3)$是 L_1 上的点，故这点到平面 Π_1 的距离即为所求的 d，所以

$$d=\frac{|-5+9+3(-3)-4|}{\sqrt{1^2+9^2+3^2}}=\frac{9\sqrt{91}}{91}.$$

方法二：直线 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{a}_1=(6,\ -1,\ 1)$，直线 L_2 的方向向量为

$$\boldsymbol{a}_2=(1,\ 5,\ 1)\times(1,\ 1,\ -1)=(-6,\ 2,\ -4).$$

又$(-5,\ 1,\ -3)$是 L_1 上的点，$(1,\ -1,\ 4)$是 L_2 上的点，故所求距离为

$$d=\frac{|(6,\ -2,\ 7)\cdot(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)|}{|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|}=\frac{|(6,\ -2,\ 7)\cdot(2,\ 18,\ 6)|}{|(2,\ 18,\ 6)|}=\frac{9\sqrt{91}}{91}.$$

例 13 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$的柱面方程.

解 在$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$中消去 x，得 $3y^2-z^2=16$，即母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

在$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$中消去 y，得 $3x^2+2z^2=16$，即母线平行于 y 轴且通过已知曲线

的柱面方程.

例 14 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$ 的公共部分在 xOy 面和 zOx 面上的投影.

解 圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$ 在 xOy 面上的投影为 $x^2+y^2\leqslant ax$，它含在半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在 xOy 面上的投影 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 内，所以半球与圆柱体的公共部分在 xOy 面上的投影为 $x^2+y^2\leqslant ax$.

上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$ 的公共部分在 zOx 面上的投影为

$$x^2+z^2\leqslant a^2,\ x\geqslant 0,\ z\geqslant 0.$$

例 15 求过点 $A(0,3,3)$ 和点 $B(-1,3,4)$ 且球心在直线 $L:\begin{cases}2x+4y-z-7=0,\\4x+5y+z-14=0\end{cases}$ 上的球面方程.

解 因为所求球面过 A、B 两点，所以球心在线段 AB 的中垂面上. A、B 两点的中点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},3,\frac{7}{2}\right)$，中垂面的法线向量为 $\overrightarrow{AB}=(-1,0,1)$，故中垂面方程为

$$-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(z-\frac{7}{2}\right)=0,$$

即

$$x-z+4=0.$$

又因为球心在直线 L 上，所以球心为 L 与 AB 中垂面的交点，其坐标满足方程组

$$\begin{cases}x-z+4=0,\\2x+4y-z-7=0,\\4x+5y+z-14=0,\end{cases}$$

解得 $x=-1$，$y=3$，$z=3$. 即球心为 $C(-1,3,3)$，球的半径为 $R=|AC|=1$，故所求球面方程为

$$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1.$$

例 16 已知点 A 与点 B 的直角坐标分别为 $(2,0,0)$ 与 $(0,1,2)$，线段 AB 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面为 S，求由 S 及两平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的立体体积.

分析 只需求出此旋转体被垂直于 z 轴的平面所截的截面(是一个圆形区域)的面积 $A(z)$，利用平行截面面积为已知的立体的体积公式计算即可. 而为了求出 $A(z)$，只需求出该圆的半径.

解 线段 AB 在直线 $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ 上，若以 z 为参数，则线段 AB 上点 M 的直角坐标 (x,y,z) 满足:

$$x=2-z,\ y=\frac{z}{2},\ z=z\ (0\leqslant z\leqslant 2).$$

过点 M 垂直于 z 轴的平面截旋转体的截面半径为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2-z)^2+\frac{z^2}{4}},$$

故旋转体的体积为

$$V=\int_0^2 \pi r^2 \mathrm{d}z=\pi\int_0^2\left[(2-z)^2+\frac{z^2}{4}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^2\left(4-4z+\frac{5}{4}z^2\right)\mathrm{d}z=\pi\left[4z-2z^2+\frac{5}{12}z^3\right]_0^2=\frac{10}{3}\pi.$$

例 17　设曲线 C 的参数方程为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$，试求曲线 C 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程. 应用本题的结果求直线 L：$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程.

解　曲面上任一点 $M(x, y, z)$均由曲线 C 上某一点 $M(x_1, y_1, z_1)$旋转得到，在旋转过程中，竖坐标 z 不变，即 $z=z_1$；该点到 z 轴的距离不变，即 $x^2+y^2=x_1^2+y_1^2$. 又因 x_1、y_1、z_1 满足给定的曲线 C 的方程，因此所求曲面方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2=\varphi^2(t)+\psi^2(t),\\ z=\omega(t).\end{cases}$$

若消去参数 t，可得旋转曲面的一般方程.

直线 L 的参数方程为 $x=1$，$y=t$，$z=t$，$t\in(-\infty, +\infty)$. 直线 L 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2=1+t^2,\\ z=t\end{cases}\quad t\in(-\infty, +\infty).$$

消去参数 t，得 $x^2+y^2-z^2=1$，即为单叶双曲面.

例 18　将直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$绕 z 轴旋转一周，求所得的旋转曲面的方程，并求此旋转曲面与 $z=0$，$z=3$ 所围立体的体积.

解　将直线方程可写成参数方程，有

$$x=1+2t,\ y=2+t,\ z=3-t.$$

应用例 17 的方法得，绕 z 轴的旋转曲面方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2=(1+2t)^2+(2+t)^2,\\ z=3-t.\end{cases}$$

消去参数 t，得 $x^2+y^2=74-38z+5z^2$，即

$$x^2+y^2-5z^2+38z-74=0\text{(单叶双曲面)}.$$

又曲面上的点 $P(x, y, z)$到 z 轴的距离为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{74-38z+5z^2},$$

应用平行截面面积为已知的立体的体积公式可得旋转体体积为

$$V=\pi\int_0^3 r^2\mathrm{d}z=\pi\int_0^3(74-38z+5z^2)\mathrm{d}z=96\pi.$$

四、习题选解

习题 8-1

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.