

JHUXUE

方昌武 陈鸿侠 编写

# 中学数学选择题

吉林教育出版社



# 中学数学选择题

方昌武 陈鸿侠 编写

吉林教育出版社

# 中学数学选择题

方昌武 陈鸿侠 编写

※

吉林教育出版社出版 吉林省新华书店发行  
长春市盲哑学校印刷厂印刷

※

787×1092毫米32开本 8.印张178.000字  
1986年10月第1版 1986年10月第1次印刷  
印数：1—29,300册  
统一书号：7375·426 定价：1.25元

# 前 言

由于近年来数学教学研究的进展,培养学生的思维能力和考察能力的方法,在不断改进和创新,数学选择题就是在这种形势下产生的一种新型的数学题。它具有题型短小精练、结构新颖、解法灵活多样、费时较少而且题量大、概念性强、内容覆盖面宽等特点。它既可以考察学生的基础知识、基本技能的理解深度和广度,又可以考察学生的分析能力、运算能力、推理判断能力。鉴于数学选择题具有如上的特点,现在国内外的数学竞赛和各种考试中,经常大量出现。

本书仅就数学选择题的常用解法,作一梳理,并就各种解法作出分析范例,可供参考演习,其中部分练习题选自近年来各期刊或有经验教师的论述中,在此深表谢意。又由于数学选择题在国内仅是近几年采用,在教学与应考中如何编写出更佳题目,总结出更好解法以便在教与学中发挥更好的作用,还有待进一步不断探讨,在此仅作引玉之砖,不妥之处请批评指正。

编 者

1985年11月

# 目 录

|                            |         |
|----------------------------|---------|
| <b>第一篇 数学选择题</b> .....     | ( 1 )   |
| 一、数学题的形式与作用.....           | ( 1 )   |
| 二、选择题及其解法.....             | ( 2 )   |
| <b>第二篇 解选择题的常用方法</b> ..... | ( 10 )  |
| 一、直接推算法.....               | ( 10 )  |
| 二、挑选法.....                 | ( 14 )  |
| 三、筛选法.....                 | ( 16 )  |
| 四、特殊值法.....                | ( 20 )  |
| 五、条件转化法.....               | ( 23 )  |
| 六、数形互辅法.....               | ( 25 )  |
| 七、突出重点法.....               | ( 31 )  |
| 八、综合法.....                 | ( 33 )  |
| <b>第三篇 数学选择题练习</b> .....   | ( 38 )  |
| 一、代数部分.....                | ( 38 )  |
| 二、三角部分.....                | ( 107 ) |
| 三、平面几何部分.....              | ( 149 ) |
| 四、立体几何部分.....              | ( 166 ) |
| 五、平面解析几何部分.....            | ( 197 ) |
| <b>第四篇 答案与略解</b> .....     | ( 238 ) |

# 第一篇 数学选择题

## 一、数学题的形式与作用

我们在数学教学中，经常要编选一些例题、习题或试题；学生在学习过程中为了复习巩固和深入理解所学的知识，也随时需要演算不少数学题；即使在日常生活，生产实践或科研工作中也会遇到不少的数学题。

应用学过的知识解决数学问题，既是检验学习中对知识理解和掌握的一种手段，也是锻炼思维能力的准确性、灵活性和创造性的一种重要方法。

数学题就结构来看，一般有条件与结论，如果明确地给出结论，要我们去论证这个结论是正确的或是不正确的，称为证明题；而另一类问题的结论，则需要我们去推求或探寻，称为计算题。

近年来随着数学教学的研究、改革的不断发展和深入，在学习和考试中，除了仍采用上例的正规的命题外，目前常采用的还有：

1. 根据所学知识进行鉴别的判断是非题；
2. 只要数字、字母或结论的填充题；
3. 逐句检查推理或运算过程正误的改错题；
4. 给出多种答案待确定的选择题。

近年来国内外多次举行的数学竞赛和学校在阶段复习或

各类考试中，经常采用以上列举的各种新型数学题，本书仅就关于数学选择题的构造及其解法作初步探讨。

## 二、选择题及其解法

### 1. 什么叫数学选择题

数学选择题是指在一个数学题中给出若干个不同的答案，供试者经判断选取其中一个。例如：

(1) 给出长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，下列 12 条直线： $AB_1$ 、 $BA_1$ 、 $CD_1$ 、 $DC_1$ 、 $AD_1$ 、 $DA_1$ 、 $BC_1$ 、 $CB_1$ 、 $AC_1$ 、 $BD_1$ 、 $A_1C_1$ 、 $B_1D_1$  中有多少对异面直线？

A. 30对； B. 60对； C. 24对； D. 48对。

答：(A)

(2) 若  $a \geq 1$ ，那么方程  $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$  的实根的和等于：

A.  $\sqrt{a} - 1$ ； B.  $\sqrt{a-1}$ ；

C.  $\frac{\sqrt{a-1}}{2}$ ； D.  $\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$ 。

答：(D)

(32届美国中学数学竞赛题)

也就是说，选择题中的条件是由一个问句或一个不完整的句子和若干个不同的答案组成的，位于答案前的命题部分，即“一个问句或一个不完整的句子”称为题干。“若干个不同的答案”中每一个答案称为选择支，其中不被选择的

答案，称为迷惑答案。

从选择题的形式来看，如果给出少量的条件而导出多个结论的选择题，称为发散型选择题。例如：

(1) 若  $b > 1, x > 0$ ，且  $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$ ，那么  $x$  是

- A.  $\frac{1}{216}$ ； B.  $\frac{1}{6}$ ； C. 1； D. 6。

答：(B)

(2) 已知  $\bar{Z}$  是复数  $Z$  的共轭复数，且  $|Z| + \bar{Z} = 8 - 4i$ ，那么复数  $Z$  等于

- A.  $4 + 3i$ ； B.  $3 + 4i$ ；  
C.  $4 - 3i$ ； D.  $3 - 4i$ 。

答：(B)

如果给出多个条件而导出少量结论的选择题，称为收敛型选择题。例如：

(1) 下面几个图形中，哪一个面积最大？

- A.  $\triangle ABC$ ：  $\angle A = 60^\circ$ ，  $\angle B = 45^\circ$ ，  $AC = \sqrt{2}$ ；  
B. 梯形：两对角线长度分别为  $\sqrt{2}$  和  $\sqrt{3}$ ，夹角为  $75^\circ$ ；  
C. 圆：半径为 1；  
D. 正方形：对角线的长度为 2.5。

答：(C)

(2) 设  $0 < a < b$ ，  $a + b = 1$ ，那么下列五个数：

- ①  $\frac{1}{2}$ ； ②  $a$ ； ③  $b$ ； ④  $2ab$ ； ⑤  $a^2 + b^2$  中，最大的

一个必定是：

- A. ①； B. ②； C. ③； D. ④； E. ⑤。

答: (C)

如果给出多个条件与多个结论, 由试者选出两者之间的对应关系的选择题, 称为平行型选择题。例如:

(1) 下列三个方程中

$$x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0;$$

$$x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0;$$

$$x^2 + 2ax - 2a = 0$$

如果至少有一个方程有实数解, 那么实数  $a$  取值范围是

A.  $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$ ; B.  $a < -1$  或  $a > \frac{1}{3}$ ;

C.  $-2 < a < 0$ ; D.  $a < \frac{3}{2}$  或  $a \geq -1$ .

答: (D)

(2) 当  $a, b$  是两个不相等的正数时, 下列三个代数式:

甲:  $(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b})$ ; 乙:  $(\sqrt{ab} + \frac{1}{\sqrt{ab}})^2$ ;

丙:  $(\frac{a+b}{2} + \frac{2}{a+b})^2$ . 它们中间, 值最大的一个

A. 必定是甲;

B. 必定是乙;

C. 必定是丙;

D. 一般并不能确定, 而与  $a, b$  的

取值有关.

答: (D)

(3)  $\arcsin \frac{1}{3}, \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$  与  $\arctg \frac{\sqrt{2}}{4}$  三者之

间的关系如何?

$$A. \arcsin \frac{1}{3} < \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{4} < \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$B. \arcsin \frac{1}{3} < \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3} < \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$C. \arcsin \frac{1}{3} = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$D. \arccos \frac{2\sqrt{3}}{3} < \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{4} < \arcsin \frac{1}{3}.$$

答: (C)

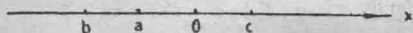
数学选择题常见的是发散型题目,一般给出若干个条件和 4—5 个选择支,并且约定在这些选择支中,有且仅有一支是正确答案,这就要求应试者在提供的所有选择支中判定哪一个是对的。

## 2. 选择题分类

从数学选择题的性质分类,可分为定性型选择题、定量型选择题和综合型三种。

定性型选择题,是指那些要求从题目中给出的条件,用以判定所述数学元素间可具有的性质或关系。例如:

(1) 已知  $a, b, c$  在数轴上的位置如下



代数式  $\sqrt{a^2} - |a+b| + \sqrt{(c-a)^2} + |b+c|$  的值等于

$$A. 2c-a; \quad B. 2a-2b; \quad C. -a; \quad D. a.$$

答: (C)

(2) 关于  $x$  的不等式  $ax < -2$  的解集不是空集的必要

条件是

A.  $a = 0$ ; B.  $a < 0$ ; C.  $a \neq 0$ ; D.  $a \leq 0$ .

答: (C)

定量型选择题是指偏重于运用公式、法则, 计算由这些数字元素间可得出的数量关系。例如:

(1) 已知集合  $x = \{a_1, a_2, a_3 \dots, a_{10}\}$ , 那么集合  $x$  的所有子集的个数是

A. 128个; B. 256个; C. 512个; D. 1024个.

答: (D)

(2) 已知一个数列的前  $n$  项的和为  $S_n = n^2 + 3n$ , 那么这数列的通项公式是

A.  $n + 1$ ;

B.  $2(n + 1)$ ;

C.  $3(n + 1)$ ;

D.  $\frac{1}{2}(n + 1)$ .

答: (B)

综合型选择题具有对上列两种类型选择题的要求, 在推理运算中涉及的知识较广。例如:

(1) 曲线  $y = |x|^2 - |x| - 12$  与  $x$  轴相交, 则两交点间的距离为

A. 8; B. 0; C. 7; D. 1; E. 不能确定.

答: (A)

(2) 如果  $\log_2 [\log_{\frac{1}{2}} (\log_2 x)]$

$$= \log_3 [\log_{\frac{1}{3}} (\log_3 y)]$$

$$= \log_5 [\log_{\frac{1}{5}} (\log_5 z)]$$

$$= 0$$

那么, A.  $z < x < y$ ; B.  $x < y < z$ ;  
C.  $y < z < x$ ; D.  $z < y < x$ .

答: (A)

### 3. 解选择题应注意事项

我们知道, 解数学题一般思路是“由因索果”或“执果索因”, 不断探索命题中条件与结论的关系。因此解题是运用知识、巩固知识和深入理解知识的过程, 也是训练分析问题和解决问题能力的过程。数学选择题虽然也是由条件与结论两部分组成, 但是因为它具体给出了若干个答案供试者选择, 所以在探索它的解法时, 有其自身特点而需重视以下几点:

#### (1) 认真审题

审题就是要正确地、全面地、细致地了解题意, 把题目中可能提供的条件(包括已知的和隐含的条件)合起来, 看作解决这个题目的信息。然后把这些信息通过思维进行归纳、转化、编组, 结合学过的知识和积累的经验进行加工变换, 也就是说把题目中的事, 由文字、字母或数转变到数(式)或数学符号的形式, 审题的时间是简短的, 一次完成的, 有时遇到比较生疏、复杂而困难的问题, 就要反复与题中各个环节或有关知识交错地思考与探索, 才能有所启发。事实证明, 在解答习题中发生错误或解题中无从下手, 常常是由于审题方面的原因造成的。比如, 对题意还未弄清前就急于猜测或盲目尝试, 或由于疏漏题目中某些条件, 尤其是隐蔽的重要条件, 常常造成选择不够准确, 因此我们在解题时首先要重视审题。

为探索题目里主干与选择支之间的联系, 有时也要搭桥

引线创造条件。

## (2) 仔细观察

由于数学选择题具有不需要写出推证和计算的过程，而且题型小，内容比较简单，编配的题目数量有时过大过多，这些特点都要求应试者具备快速和准确的解题能力。

在认真审题的同时，应对题目仔细观察，注意题中条件与结论间明显的或隐含的联系，以便从中探寻信息，促进思维，从而作出正确判断。

数学家欧拉曾说过：“数的性质，大多数是通过观察发现的”，实践也证明数学中许多结论往往是由观察才发现的，进而诱导出猜想、判断，然后加以验证而得到的。观察与猜想的思维活动，一般也可以从以下几个方面进行：

- ①由少量条件推创出大量条件；
- ②由特殊的情况猜想到一般情况；
- ③由某一个性质猜想出类似的另一个性质；
- ④由熟知的结论猜想出本题的可能结论。

因此解数学选择题的思考过程可概括为：

观察——猜想——判断——验证。

所以可见，观察是解选择题的基础。我们在决定解数学选择题的解法时，首先要考虑解题前这些必须注意的因素。

## 4. 评分办法

数学选择题通常编在各类考试中，由若干个不同内容的选择题组成一个大题，国内近年来这种选择题所分配的分数，约占全部试题总分的  $\frac{1}{7}$  到  $\frac{1}{6}$ 。目前对于这种类型试题的评分办法，尚无统一标准，国内外在各类考试中也颇不一

致。根据我国近年来举行的全国性数学竞赛与全国高考统一试题中，编选的选择題数目、给分数及评分情况，列表如下：

|           | 题 数 | 小 题<br>满分数 | 满分总数 | 不 做<br>得分数 | 做 错<br>扣分数 |
|-----------|-----|------------|------|------------|------------|
| 1981年数学竞赛 | 7   | 5          | 35   | 0          | 2          |
| 1982年数学竞赛 | 8   | 6          | 48   | 0          | 0          |
| 1983年数学竞赛 | 8   | 4          | 32   | 1          | 0          |
| 1983年高考   | 5   | 2          | 10   | 0          | 0          |
| 1984年高考   | 5   | 3          | 15   | 0          | 1          |

目前我国考试中对选择题的评分可以分为三种：

第一种是做对一题的给满分，不做的不给分，做错的也不扣分；

第二种是做对一题的给满分，不做的给1分，做错的不扣分；

第三种是做对一题的给满分，不做不给分，做错的扣一分。

以1984年全国高考统一试题中的选择题评分来看，是采用了“奖真罚错”的原则，以便使应试者树立严肃认真的态度。

## 第二篇 解选择题的常用方法

由于数学选择题是近年来出现的一种特殊形式的题目，所以解这类题时既要注意常规的解题规律和技巧，也要联系选择题本身的思路，这就要求应试者对所学知识融汇贯通，运用自如，下面是解选作题常用的几种方法。

### 一、直接推算法

对于常规题目，可直接通过观察，根据选择题中给出的已知条件，借助于学过的定义、定理、性质（或公理）、法则直接推证、运算，从而得出正确的结果，再与题中各选择支进行对比，即可作出判断，选出正确的答案。

例1 若  $2x = \log_2 3$  那么  $\frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}}$  的值是

A.  $\frac{13}{12}$ ;    B.  $\frac{13}{6}$ ;    C.  $\frac{13}{3}$ ;    D.  $\frac{13}{2}$ .

答: (B)

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \left( \frac{2^{6x} - 1}{2^{3x}} \right) \bigg/ \left( \frac{2^{2x} + 1}{2^x} \right) \\ &= \frac{[(2^{2x})^3 - 1] 2^x}{2^{3x}(2^{2x} + 1)} \\ &= \frac{[(2^{2x})^3 - 1]}{2^{2x}(2^{2x} + 1)}\end{aligned}$$

把  $2^{2x} = 3$  代入上式, 得

原式  $= \frac{27-1}{3 \times 4} = \frac{13}{6}$ , 对照选择支, 所以选 B.

例 2  $x = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}}$  的值是属于区间

A.  $(-2, -1)$ ; B.  $(1, 2)$ ;

C.  $[2, 3]$ ; D.  $(2, 3)$ .

答: (D)

解:  $x = \frac{1}{\lg \frac{1}{3} / \lg \frac{1}{2}} + \frac{1}{\lg \frac{1}{3} / \lg \frac{1}{5}} = \frac{1}{\lg 3} (\lg 2 + \lg 5)$

$$= \frac{1}{\lg 3} = \log_3 10$$

因为函数  $y = \log_3 t$  ( $t > 0$ ) 是单调增函数, 而当  $t = 9$  时,  $y = 2$ ;  $t = 27$  时,  $y = 3$ ; 当  $t = 10$  时, 有  $y \in (2, 3)$ , 对照选择支, 所以选 D.

例 3 设  $M = \{(x, y) : |xy| = 1, x > 0\}$

$N = \{(x, y) : \arctan x + \operatorname{arccot} y = \pi\}$ , 那么

A.  $M \cup N = \{(x, y) : |xy| = 1\}$ ;

B.  $M \cup N = M$ ;

C.  $M \cup N = N$ ;

D.  $M \cup N = \{(x, y) : |xy| = 1, \text{且 } x, y \text{ 不同时为负数}\}$ .

答: (B)

解: 设  $(x, y) \in N$ , 依题设条件, 有

$$\arctg x = \pi - \operatorname{arctg} y, \text{ 即 } x = -\frac{1}{y},$$

$$\therefore xy = -1 \quad (1)$$

依反正切, 反余切定义, 有

$$\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 和 } \operatorname{arctg} y \in (0, \pi) \text{ 又结}$$

$$\text{合给出条件, 可得 } \arctg x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore x > 0 \quad (2)$$

由 (1) 和 (2) 可知

$$N = \{(x, y) : \arctg x + \operatorname{arctg} y = \pi\} \subset M,$$

$\therefore M \cup N = M$ . 所以选 B 正确.

**例 4** 方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两根  $r, s$ , 而方程  $x^2 + px + 8 = 0$  的两根若为  $r^2$  和  $s^2$ , 那么  $p$  等于

$$A. b^2 - 4ac; \quad B. \frac{b^2 - 2ac}{a^2};$$

$$C. \frac{-b^2 + 2ac}{a^2}; \quad D. \frac{4ac - b^2}{a^2}.$$

答: (C)

$$\text{解: } \because r + s = -\frac{b}{a}, rs = \frac{c}{a},$$

$$r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2rs = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},$$

$$\begin{aligned} \text{但 } p &= -(r^2 + s^2) \\ &= -\frac{b^2 - 2ac}{a^2}, \text{ 所以选 C 正确.} \end{aligned}$$

**例 5** 已知等腰三角形  $ABC$  的底边  $BC$  及高  $AD$  的