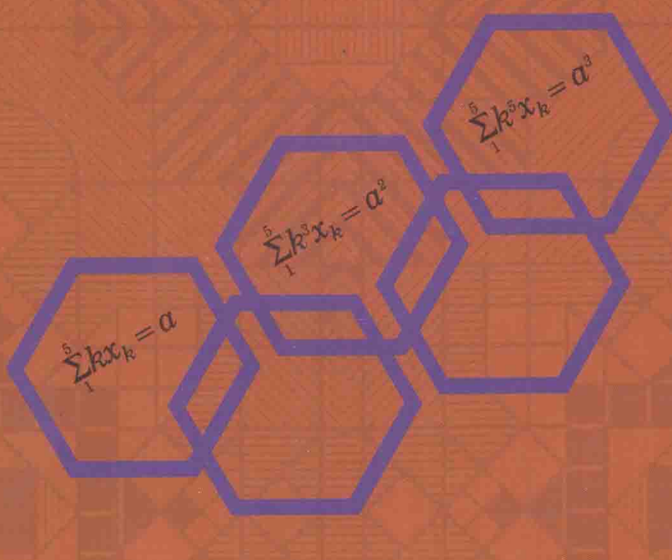
RESEARCH AND APPRECIATION OF GEOMETRIC INEQUALITY (I)

几何不等式研究与欣赏

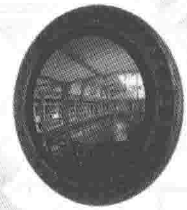
上卷

邓寿才 著



HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

RESEARCH AND APPRECIATION OF GEOMETRIC INEQUALITY (I)



几何不等式研究与欣赏 上卷

● 邓寿才 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

众所周知，函数思想与不等式方法贯穿整个数学世界，且不等式是人们最喜爱、最欣赏的数学内容，进而兴起了不等式研究的热潮．从知识内容上讲，不等式又划分为代数不等式、三角不等式、几何不等式．为了让几何不等式结构更丰满、内容更丰富，使得图文并茂、美不胜收，为了让几何不等式更具实用性、优美性、趣味性、欣赏性、收藏性，为了让几何不等式的光辉照亮人间、让几何不等式的花朵开满人间，芳香飘满人间，故作者怀着激动的心情写了此书．

本书适合高等院校师生及数学爱好者研读．

图书在版编目(CIP)数据

几何不等式研究与欣赏．上卷/邓寿才著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016．1
ISBN 978－7－5603－5556－6

Ⅰ．①几…　Ⅱ．①邓…　Ⅲ．①平面几何－研究　Ⅳ．①O123．1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 182241 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张　佳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 41.5　字数 745 千字
版　　次　2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－5556－6
定　　价　88.00 元

◎ 目录

基本方法

第1章

众所周知，许多优美的几何题目，可以用多种方法解答它们，而几何不等式是几何的部分重要内容. 因此，相应地，我们也要用多种方法去分析它、思考它、解决它，限于时间和篇幅，下面略举数例说明.

§1 复数法

有些几何不等式，如果从几何方向去思考它，往往感到不得要领，这时，我们不妨从复数方面去思考它，如：

$\boxed{\text{例 1}}$（Ptolemy 不等式）：在四边形 $ABCD$ 中，求证

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD$$

证明 视四边形 $ABCD$ 所在平面为复平面，设点 A,B,C,D 所对应的复数分别为 Z_1,Z_2,Z_3,Z_4，则有

$$\begin{aligned}
&AB \cdot CD + AD \cdot BC \\
&= |Z_2 - Z_1| \cdot |Z_4 - Z_3| + |Z_4 - Z_1| \cdot |Z_3 - Z_2| \geqslant \\
&\quad |(Z_2 - Z_1) \cdot (Z_4 - Z_3) + (Z_4 - Z_1) \cdot (Z_3 - Z_2)| \\
&= |Z_2Z_4 - Z_2Z_3 - Z_1Z_4 + Z_1Z_3 + Z_3Z_4 - Z_2Z_4 - Z_1Z_3 + Z_1Z_2| \\
&= |(Z_3 - Z_1)(Z_4 - Z_2)| = AC \cdot BD \\
&\Rightarrow AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD
\end{aligned}$$

易推得等号成立仅当 A,B,C,D 四点共圆.

注 Ptolemy 不等式是一个用途广泛的经典的重要不等式. 上述复数方法倍显简洁漂亮. 此外，还可将平面四边形 $ABCD$ 拓展为空间四边形 $ABCD$.

$\boxed{\text{例 2}}$（Tweedie）：设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是同一个平面上的两个正三角形，且顶点排列方向相同. 那么：三条线 AA'，BB'，CC' 中任何两个之和大于或等于第三个.

证明 如图 1 所示，对顶点排列方向相同的两个相似三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，总有一个恒等式

$$(Z_1' - Z_1)(Z_2 - Z_3) + (Z_2' - Z_2) \cdot$$

$$(Z_3-Z_1)+(Z_3'-Z_3)(Z_1-Z_2)=0 \tag{1}$$

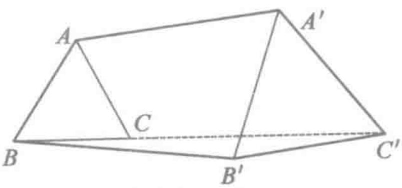


图 1

其中 Z_1,Z_2,Z_3 分别是 A,B,C 对应的复数;Z_1',Z_2',Z_3'分别是 A',B',C'对应的复数.

由复数模的性质从式(1)可得

$$|Z_1'-Z_1|\cdot|Z_2-Z_3|+|Z_2'-Z_2|\cdot|Z_3-Z_1|\geqslant|(Z_3'-Z_3)(Z_1-Z_2)|$$

因为$\triangle ABC$ 为正三角形,即

$$|Z_2-Z_3|=|Z_3-Z_1|=|Z_1-Z_2|$$

$$\Rightarrow|Z_1'-Z_1|+|Z_2'-Z_2|\geqslant|Z_3'-Z_3|$$

$$\Rightarrow AA'+BB'\geqslant CC'$$

同理可证另外两个不等式. 故命题证毕.

$\boxed{\text{例 3}}$(M. S. Klamkin):设 P 是$\triangle ABC$ 所在平面上任意一点,求证

$$a\cdot PB\cdot PC+b\cdot PC\cdot PA+c\cdot PA\cdot PB\geqslant abc \tag{1}$$

证明 视$\triangle ABC$ 所在平面为复平面. 设点 P,A,B,C 分别对应着复数 Z, Z_1,Z_2,Z_3. 令

$$f(Z)=\frac{(Z-Z_2)(Z-Z_3)}{(Z_1-Z_2)(Z_1-Z_3)}+\frac{(Z-Z_3)(Z-Z_1)}{(Z_2-Z_3)(Z_2-Z_1)}+\frac{(Z-Z_1)(Z-Z_2)}{(Z_3-Z_1)(Z_3-Z_2)}$$

则$f(Z)$是关于 Z 的二次多项式,且$f(Z)$最多有两个根,但易知

$$f(Z_1)=f(Z_2)=f(Z_3)=1$$

故

$$f(Z)\equiv 1$$

因此

$$\frac{PB\cdot PC}{bc}+\frac{PC\cdot PA}{ca}+\frac{PA\cdot PB}{ab}$$

$$=\left|\frac{(Z-Z_2)(Z-Z_3)}{(Z_1-Z_2)(Z_1-Z_3)}\right|+\left|\frac{(Z-Z_3)(Z-Z_1)}{(Z_2-Z_3)(Z_2-Z_1)}\right|+\left|\frac{(Z-Z_1)(Z-Z_2)}{(Z_3-Z_1)(Z_3-Z_2)}\right|\geqslant |f(Z)|=1$$

$$\Rightarrow a\cdot PB\cdot PC+b\cdot PC\cdot PA+c\cdot PA\cdot PB\geqslant abc$$

评注 上述证法简洁优美,其巧妙之处在于先将所证不等式变成分式和不等式,然后构造关于 Z 的二次函数表达式(利用复数原理构造,再利用多项式根的理论证明),利用这种行之有效的巧妙方法,我们不难将本题推广为:

$\boxed{\text{推广}}$:设 P 是多边形 $A_1A_2\cdots A_n(n\geqslant 3)$ 所在平面上任意一点,记 $A_iA_{i+1}=a_i$ $(i=1,2,\cdots,n$;约是 $A_{n+1}=A_1)$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{PA_i}\geqslant\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{PA_i} \tag{2}$$

当 $n=3$ 时,式(2)化为

$$\frac{a_1}{PA_1}+\frac{a_2}{PA_2}+\frac{a_3}{PA_3}+\geqslant\frac{a_1a_2a_3}{PA_1\cdot PA_2\cdot PA_3}$$

$$\Rightarrow a_1\cdot PA_2\cdot PA_3+a_2\cdot PA_3\cdot PA_1+a_3\cdot PA_1\cdot PA_2\geqslant a_1a_2a_3$$

此式与式(1)等价.

可见,数学是多么趣味神奇啊!

§2 三角法

因为数学的起源发展顺序是:代数⟶几何⟶三角. 而三角是代数与几何天然结合而绽放出的艳丽花朵,芳香飘逸. 因此,有时也可用三角方法求解几何不等式的问题.

$\boxed{\text{例 4}}$(1978 年北京市赛题):设 A,B 为直角 $\angle xOy$ 边上的两个动点,且 $PA+PB=l$ 是定长. 求四边形 $PAOB$ 的面积 S 的最大值.

解 如图 2 所示,设 AO,BO,PA,PB 的长依次为 y,x,n,m,则

$$m+n=l$$

再设 $\angle APB=\theta\in(0,\pi]$,则

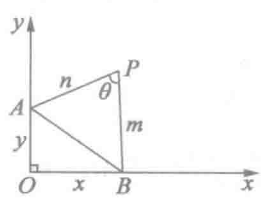


图 2

$$\begin{aligned}S&=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle APB}\\&=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}mn\sin\theta\leqslant\\&\quad\frac{1}{4}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}mn\sin\theta\\&=\frac{1}{4}AB^2+\frac{1}{2}mn\sin\theta\\&=\frac{1}{4}(m^2+n^2-2mn\cos\theta)+\frac{1}{2}mn\sin\theta\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}[(m+n)^2-2mn(1+\cos\theta)]+\frac{1}{2}mn\sin\theta$$

$$=\frac{1}{4}l^2+\frac{1}{2}mnf(\theta) \tag{1}$$

其中

$$f(\theta)=\sin\theta-\cos\theta-1=\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})-1 \tag{2}$$

因为当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时,$f(\theta)<0$, $S<\frac{1}{4}l^2$,所以:

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,$f(\theta)=0$, $S=\frac{1}{4}l^2$;

当 $\theta=\pi$ 时,$f(\theta)=0$, $S=\frac{1}{4}l^2$;

当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时,$f(\theta)>0$,则

$$f(\theta)=\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{3}{4}\pi)-1\leqslant\sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow S\leqslant\frac{1}{4}l^2+\frac{\sqrt{2}-1}{2}mn\leqslant$$

$$\frac{1}{4}l^2+\frac{\sqrt{2}-1}{2}(\frac{m+n}{2})^2$$

$$=\frac{1}{4}l^2+\frac{\sqrt{2}-1}{8}l^2=\frac{\sqrt{2}+1}{8}l^2$$

$$\Rightarrow S_{\max}=\frac{\sqrt{2}+1}{8}l^2$$

综上所述,S 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{8}l^2$,当 $AO=BO$,且 $PA=PB$,$\angle P=\theta=\frac{3}{4}\pi$ 时达到.

注 此题具有一定的趣味性.上述三角解法不失优美性,其实,应用等周定理解答此题更加简洁!

另解 视 xOy 为直角坐标,依次作出 APB 在另外三个象限的对称折线,就构成一个周长为 $4l$ 的八边形.由于 $4l$ 为定值,根据等周定理,此八边形的面积在当它是正八边形时达到,即为

$$\frac{8}{4}(4l)^2\cot\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}l^2$$

故四边形 $PAOB$ 的最大面积为

$$S_{\max} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}l^2\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{8}l^2$$

此时

$$PA = PB = \frac{1}{2}l$$

$$\angle APB = \frac{(8-2)\pi}{8} = \frac{3}{4}\pi$$

$\boxed{\text{例 5}}$(Fermat):如图 3 所示,设$\triangle ABC$的内角均小于 120°,P 为其内部的 Fermat 点,即满足$\angle BPC = \angle CPA = \angle APB = 120°$,$M$ 为$\triangle ABC$内任意一点,求证

$$MA + MB + MC \geqslant PA + PB + PC \tag{1}$$

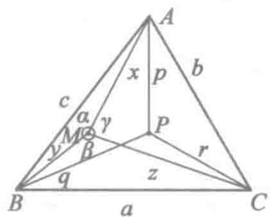


图 3

证明 设$\triangle ABC$的三边长依次为 a,b,c,面积为$\triangle$,$\angle AMB = \alpha$,$\angle BMC = \beta$,$\angle CMA = \gamma$. PA,PB,PC,MA,MB,MC 依次为 p,q,r,x,y,z. 因

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$$

所以在$\triangle PAB$中,应用余弦定理有

$$c^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos 120° \Rightarrow c^2 = p^2 + q^2 + pq$$

同理可得

$$a^2 = q^2 + r^2 + qr$$

$$b^2 = r^2 + p^2 + rp$$

以上三式相加得

$$\sum a^2 = 2\sum p^2 + \sum qr \tag{2}$$

又

$$\begin{aligned}\triangle &= S_{\triangle APB} + S_{\triangle BPC} + S_{\triangle CPA} \\ &= \sum \frac{1}{2}pq\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}\sum pq\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3}\triangle = 3(qr + rp + pq) \tag{3}$$

[(1)+(2)]÷2 得

$$\frac{1}{2}\sum a^2 + 2\sqrt{3}\triangle = \left(\sum p\right)^2 \tag{4}$$

又
$$\frac{1}{2}\sum a^2=\frac{1}{2}\sum(y^2+z^2-2yz\cos\beta)$$
$$=\sum x^2-\sum yz\cos\beta \tag{5}$$
且
$$\triangle=\frac{1}{2}\sum yz\sin\beta$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{3}\triangle=\sqrt{3}\sum yz\sin\beta \tag{6}$$
(4)+(5)得
$$\frac{1}{2}\sum a^2+2\sqrt{3}\triangle=\sum x^2-2\sum yz(-\frac{1}{2}\cos\beta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta)$$
$$=\sum x^2+2\sum yz\cos(\beta-120°)\leqslant$$
$$\sum x^2+2\sum yz=(\sum x)^2$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}\sum a^2+2\sqrt{3}\triangle\leqslant(\sum x)^2 \tag{6}$$
由式(4),(6)得
$$(\sum x)^2\geqslant(\sum p)^2=\frac{1}{2}\sum a^2+2\sqrt{3}\triangle$$
$$\Rightarrow x+y+z\geqslant p+q+r$$
即式(1)成立,等号成立仅当
$$\alpha=\beta=\gamma=120°\Rightarrow M\equiv P(\text{重合})$$

例6:设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,I 在三边上的投影依次为 D,E,F,求证
$$IA+IB+IC\geqslant 2(ID+IE+IF) \tag{1}$$
证明 设 $ID=IE=IF=r$($\triangle ABC$ 内切圆半径),则易得
$$IA+IB+IC=r(\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2})\geqslant \quad (\text{应用 Cauchy 不等式})$$
$$9r(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})^{-1}\geqslant$$
$$9r\left[3\sin\left(\frac{A+B+C}{6}\right)\right]^{-1}=3r\csc\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow IA+IB+IC\geqslant 6r=2(ID+IE+IF)$$
等号成立仅当
$$\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}$$
$$\Rightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$$

注 对于前一题中的 Fermat 不等式,它本身是一个几何不等式,传统方法

是添加几条辅助线进行几何证明. 但前述三角证法却未添辅助线，只用配方和三角化简就漂亮地完成了证明.

至于例 6 中的式(1)，应用三角方法证明显得简洁轻松. 其实，如果设 λ,μ,υ 为系数，且满足 $\lambda+\mu+\upsilon=3$，那么应用 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}\lambda IA+\mu IB+\upsilon IC&=\left(\frac{\lambda}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\mu}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\upsilon}{\sin\frac{C}{2}}\right)r\geqslant\\&\frac{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{\upsilon})^2}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}r\geqslant\\&\frac{2}{3}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{\upsilon})^2r\\&=\frac{2}{9}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{\upsilon})^2(\lambda ID+\mu IE+\upsilon IC)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\lambda IA+\mu IB+\upsilon IC\geqslant K(\lambda ID+\mu IE+\upsilon IC)\tag{2}$$

其中

$$K=\frac{2}{9}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{\upsilon})^2\leqslant 2$$

因此式(2)是式(1)的系数推广（又可称为加权推广）. 它美化了式(1)，让式(1)锦上添花.

§3 解析法

我们知道，将代数、几何、三角巧妙结合，就产生了解析几何，即解析几何是用代数方法研究或计算几何性质与几何量，因此有许多几何问题可以用解析法解答. 自然，有部分几何不等式可以用解析法进行证明. 如：

例 7：设 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3;x_1<x_2<x_3)$ 是坐标平面上的点，用 R 表示 $\triangle P_1P_2P_3$ 的外接圆半径. 求证

$$\left|\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right|>\frac{1}{2R}\tag{1}$$

证明（向振）　当沿 x 轴方向平移 $\triangle P_1P_2P_3$ 时，x_1-x_2,x_2-x_3,x_3-x_1 均不变，所以式(1)两边的值不变.

当沿 y 轴方向平移 $\triangle P_1P_2P_3$ 时，由于有恒等式

$$\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=0$$

所以原不等式两边的值也不改变.

因此，不妨设 P_1 为原点，即 $x_1=y_1=0$. 这样式(1)化为

$$\frac{1}{|x_2-x_3|}\cdot\left|\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_2}{x_2}\right|>\frac{1}{2R} \tag{2}$$

如图 4 所示，设直线 OP_2，OP_3 的倾斜角为 θ_2,θ_3，$\angle P_2P_1P_3=\alpha$，则

$$|\theta_3-\theta_2|=\alpha$$

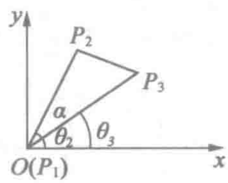


图 4

从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{|x_2-x_3|}\cdot\left|\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_2}{x_2}\right| &= \left|\frac{\tan\theta_3-\tan\theta_2}{x_2-x_3}\right| \\ &= \frac{1}{|x_2-x_3|}\cdot\left|\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\cos\theta_3\cos\theta_2}\right|> \\ &\frac{\sin\alpha}{|x_2-x_3|}\geqslant\frac{\sin\alpha}{P_2P_3}=\frac{1}{2R}\end{aligned}$$

即式(2)成立，因此式(1)成立.

评注　将坐标轴进行平移或旋转，是解析几何中常用的基本方法. 如上述解法将坐标平移，使问题获得转机，得到简化.

在上面的证明中，若 $y_1=y_3=x_1=0$，并且 $y_2\to 0$，则 $\cos\theta_3=1$，$\cos\theta_2\to 1$. 此时式(1)的左边$\to\frac{1}{2R}$，故数字 2 是最优的.

$\boxed{\text{例 8}}$：设 P 是锐角 $\triangle ABC$(面积为$\triangle$)所在平面上任意一点，求证

$$PA^2\cdot\tan A+PB^2\cdot\tan B+PC^2\cdot\tan C\geqslant 4\triangle \tag{1}$$

分析　观察式(1)的外形与结构，它简洁对称而又优美，故用三角法或其他方法肯定不得要领. 因此我们不妨应用解析法进行尝试.

证明　我们取 BC 所在的直线为 x 轴，过点 A 的高线所在的直线为 y 轴. 建立平面直角坐标系，如图 5 所示.

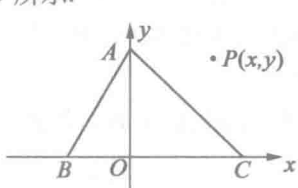


图 5

设坐标 $A(0,a),B(-b,0),C(c,0)$（这里 $a,b,c>0$）. 于是

$$\tan B=\frac{a}{b},\ \tan C=\frac{a}{c}$$

$$\tan A=-\tan(B+C)=\frac{a(b+c)}{a^2-bc}$$

由角 A 为锐角，知

$$a^2-bc>0$$

现设点 P 的坐标为 $P(x,y)$，则

$$\begin{aligned}
&PA^2\cdot\tan B+PB^2\cdot\tan B+PC^2\cdot\tan C\\
&=[x^2+(y-a)^2]\cdot\frac{a(b+c)}{a^2-bc}+\frac{a}{b}[(x+b)^2+y^2]+\frac{a}{c}[(x-c)^2+y^2]\\
&=(x^2+y^2+a^2-2ay)\frac{a(b+c)}{a^2-bc}+\frac{a(b+c)}{bc}(x^2+y^2+bc)\\
&=\frac{a(b+c)}{bc(a^2-bc)}[a^2x^2+(ay-bc)^2+2bc(a^2-bc)]\geqslant\\
&\quad\frac{a(b+c)}{bc(a^2-bc)}\cdot 2bc(a^2-bc)\\
&=2a(b+c)=4\triangle
\end{aligned}$$

即式(1)成立. 等号成立仅当

$$\begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{bc}{a}\end{cases}\Rightarrow P\left(0,\frac{bc}{a}\right)$$

即 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

评注 此方法建立好坐标系后，设好点 A,B,C,P 的坐标，使 $\tan A,\tan B$，$\tan C$ 及 PA^2,PB^2,PC^2 均得到了代数表示，然后进行化简配方，轻松地证明了问题. 其解答的关键是怎样建立坐标系，然后设坐标，使问题“绝处逢生”获得转机. 往下化简运算就“一帆顺风驾金舟”了！

例9：证明：过三角形重心的直线所分三角形两部分的面积之差的绝对值，不大于三角形面积的$\frac{1}{9}$.

分析 这是一个非常趣味的几何问题，不妨以 $\triangle ABC$ 的重心 G 为原点，以过点 G 且与 BC 平行的直线为 x 轴建立直角坐标系，如图 6 所示. 设坐标 $B(-p,-q)$，$A(p-r,2q)$，$C(r,-q)$（这里$p,q,r>0$），则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}q(q+r)\tag{1}$$

$$\text{直线 } AB: y+q=\frac{3q}{2p-r}(x+p)\tag{2}$$

$$\text{直线 } AC: y+q=\frac{3q}{p-2r}(x-r) \tag{3}$$

$$\text{直线 } EF: y=kx,\ k\neq 0 \tag{4}$$

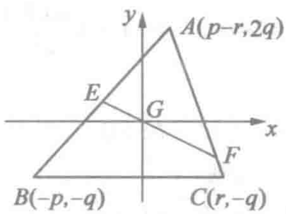


图 6

然后求出交点 E,F 的坐标,再求出点 A 到 EF 的距离,即

$$h_x=\frac{|k(p-r)-2q|}{\sqrt{1+k^2}} \tag{5}$$

这样往下只需证明

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}h_x|EF|\geqslant\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}(q+r)q \tag{6}$$

即可.

§4 向量法

由于向量与复数、解析几何的关系千丝万缕,密不可分,许多几何问题都可以应用向量方法去思考、去解决、去研究,因此,我们也可以用向量方法去解决部分几何不等式问题.

$\boxed{\text{例 10}}$:设 x,y,z 为任意实数,则对任意 $\triangle ABC$,有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2(yz\cos A+zx\cos B+xy\cos C) \tag{1}$$

说明 从表面上,式(1)是一个三角不等式,但三角不等式与几何不等式没有严格的区别,却有密切的联系. 其实,式(1)就是著名的三角不等式,它应用广泛. 利用它可以推导出许多漂亮的几何不等式来. 比如,利用余弦定理,式(1)就等价于 $\sum yza(b^2+c^2-a^2)\leqslant abc(x^2+y^2+z^2)$ 且等号成立仅当 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

证明 如图 7 所示,以 O 为起始点,在平面内作 $|\overrightarrow{OA}|=x$, $|\overrightarrow{OB}|=y$, $|\overrightarrow{OC}|=z$,使 $\angle B'OC'=\alpha=\pi-A$, $\angle C'OA'=\beta=\pi-B$, $\angle A'OB'=\gamma=\pi-C$,则有

$$\alpha+\beta+\gamma=3\pi-(A+B+C)=3\pi-\pi=2\pi=360^\circ$$

由于

$$\begin{aligned}&(|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|)\geqslant 0\\ \Rightarrow&\sum\overrightarrow{OA}^2+2\sum\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\geqslant 0\\ \Rightarrow&\sum x^2+2\sum yz\cos\alpha\geqslant 0\\ \Rightarrow&\sum x^2+2\sum yz\cos(\pi-A)\geqslant 0\\ \Rightarrow&\sum x^2\geqslant 2\sum yz\cos A\end{aligned}$$

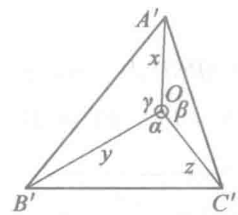


图 7

$\boxed{例 11}$:设$\triangle ABC$的三边长分别为a,b,c,P为$\triangle ABC$所在平面上的任意一点,x,y,z为任意实数,则有

$$(x+y+z)(xPA^2+yPB^2+zPC^2)\geqslant yza^2+zxb^2+xyc^2 \tag{1}$$

证明 我们令

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\sum x\overrightarrow{PA}}{\sum x}=\frac{x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}}{x+y+z}$$

则

$$\begin{aligned}0&\leqslant\left(\sum x\right)^2\cdot|\overrightarrow{PQ}|^2=\left(\sum x\overrightarrow{PA}\right)^2\\ &=\sum x^2|\overrightarrow{PA}|^2+2\sum yz\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\\ &=\sum x^2|\overrightarrow{PA}|^2+2\sum yz|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{PC}|\cos\theta\\ &=\sum x^2|\overrightarrow{PA}|^2+\sum yz(|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2)\\ &=\left(\sum x\right)\left(\sum x|\overrightarrow{PA}|^2\right)-\sum yz|\overrightarrow{BC}|^2\\ &=\left(\sum x\right)\left(\sum x|\overrightarrow{PA}|^2\right)-\sum yza^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\left(\sum x\right)\left(\sum xPA^2\right)\geqslant\sum yza^2$$

即式(1)成立,易推得等号成立仅当

$$\frac{\sin\angle BPC}{xPA}=\frac{\sin\angle CPA}{yPB}=\frac{\sin\angle APB}{zPC}$$

注 如果$x+y+z=1$,那么式(1)简化为

$$xPA^2+yPB^2+zPC^2 \geqslant yza^2+zxb^2+xyc^2 \tag{2}$$

可见，这一外形与结构多么娟秀美丽，而且我们以后还将式(2)推广到春风山水间！

§5 应用 Ptolemy 不等式

我们在前面的例 1 中用复数法证明了 Ptolemy(托勒密)不等式. 当不等式取等号时，就是 Ptolemy 定理. 而在涉及关于四边形的几何问题时，有时可以利用 Ptolemy 定理；在涉及关于四边形的不等式时，有时可以利用 Ptolemy 不等式.

例 12：设 P 为平行四边形 $ABCD$ 内一点(如图 8)，求证

$$PA \cdot PC + PB \cdot PD \geqslant AB \cdot BC \tag{1}$$

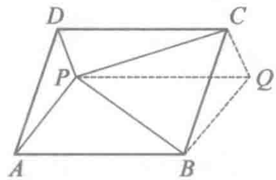


图 8

分析 根据 Ptolemy 定理的条件，我们应将线段 PA,PB,PC,PD,AB,BC 组成一个四边形，并使得该四边形的两条对角线之长分别等 BA,BC，四条边之长分别等于 PA,PB,PC,PD. 因此需作辅助线，于是产生了如下漂亮的证法：

证明 作 $PQ \mathrel{\underline{\parallel}} CD \mathrel{\underline{\parallel}} AB$. 连 CQ,BQ，则 $CDPQ$ 与 $ABQP$ 均是平行四边形. 所以有

$$CQ=PD,\ BQ=PA,\ PQ=AB$$

在四边形 $PBQC$ 中应用 Ptolemy 不等式，有

$$BQ \cdot PC+PB \cdot CQ \geqslant PQ \cdot BC \Rightarrow PA \cdot PC+PB \cdot PD \geqslant AB \cdot BC$$

等号成立仅当 P,B,Q,C 四点共圆，即

$$\left.\begin{aligned}\angle CPB+\angle CQB=\pi\\ \angle CQB=\angle APD\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \angle APD+\angle CPB=\pi$$

评注 解答几何问题，常常通过添加辅助线帮助我们解题，它(辅助线)起到桥梁的作用，让我们顺利到达了希望的彼岸！

例 13：设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a,b,c，三边上的中线分别为 m_a,m_b,m_c，则对任意正数 x,y,z，有

$$(yc+zb-2xa)m_2+(za+xc-2yb)m_b+(xb+ya-2zc)m_c \geqslant 0 \tag{1}$$

分析 利用好三角形重心和中线的性质,再结合 Ptolemy 不等式的巧妙应用.

证明 如图 9 所示,设$\triangle ABC$的三条中线分别为AD,BE,CF,重心为G,则有

$$BG=\frac{2}{3}m_b,\ DG=\frac{1}{3}m_a,\ GF=\frac{1}{3}m_c$$

连DF,则

$$DF=\frac{1}{2}b$$

在四边形$BDFG$中利用 Ptolemy 不等式,有

$$BG\cdot DF\leqslant GF\cdot BD+DG\cdot BF$$
$$\Rightarrow 2bm_b\leqslant am_c+cm_a$$
$$\Rightarrow 2ybm_b\leqslant y(am_c+cm_a)$$

同理可得

$$2xam_a\leqslant x(bm_c+cm_b)$$
$$2zcm_c\leqslant z(am_b+bm_a)$$

将以上三式相加,得

$$2(ybm_b+xam_a+zcm_c)\leqslant(zb+yc)m_a+(xc+za)m_b+(ya+xb)m_c$$
$$\Rightarrow(yc+zb-2xa)m_a+(za+xc-2yb)m_b+(xb+ya-2zc)m_c\geqslant 0$$

即式(1)成立,易知式(1)等号成立仅当$AFGE,BDFG,CDGE$均为圆内接四边形,即$\triangle ABC$为正三角形.

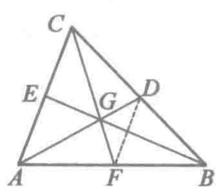


图 9

注 式(1)是一个奇趣优美的几何不等式,特别地,当取$x=y=z$时,得到

$$(b+c-2a)m_a+(c+a-2b)m_b+(a+b-2c)m_c\geqslant 0 \tag{2}$$

当取$(x,y,z)=(a,b,c)$时,得到

$$(bc-a^2)m_a+(ca-b^2)m_b+(c^2-ab)m_c\geqslant 0 \tag{3}$$

$\boxed{例\ 14}$:设$\triangle ABC$的三边长分别为a,b,c,且a,b,c边上的中线长分别为m_a,m_b,m_c.若$m_am_bm_c=1$,求证

$$3(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2\geqslant 8(\sqrt{m_a}+\sqrt{m_b}+\sqrt{m_c}) \tag{1}$$

分析 我们只需将上题的方法"故伎重演"即可.

证明 作平行四边形$ABCD$和平行四边形$ACBE$,连BD,CE(如图 10).注意到