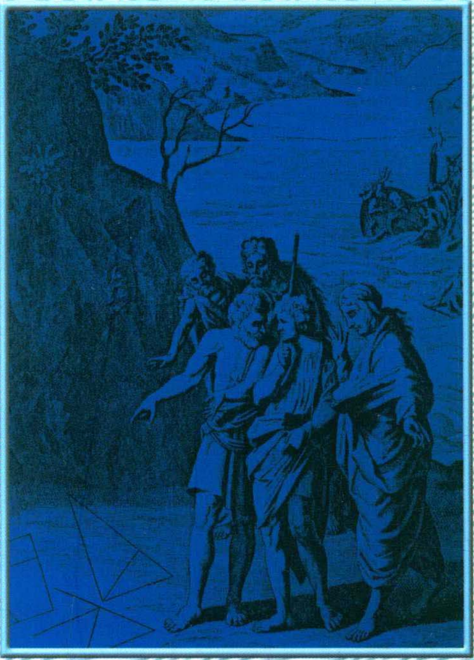
南秀全初等数学系列

极值与最值（中卷）



南秀全 编著

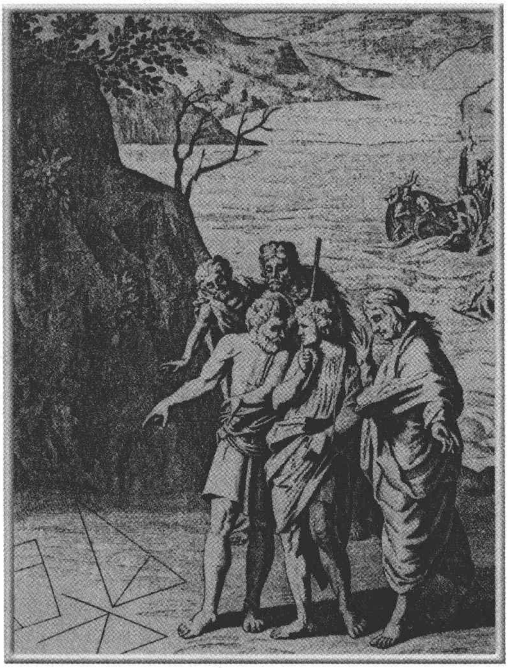
- 代数极值问题
- 三角函……题
- 平面几……
- 解析几……问题
- 复合函……题
- 离散量的最大值与最小值问题

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

南秀全初等数学系列

极值与最值

(中卷)



南秀全 编著

◎ 代数极值问题

◎ 三角函数的极值问题

◎ 平面几何极值问题

◎ 解析几何中的极值问题

◎ 复合函数的极值问题

◎ 离散量的最大值与最小值问题

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分 6 章. 分别介绍了代数、三角函数的极值问题，以及平面几何与解析几何中的极值问题. 并对复合函数的极值问题及离散量的最大值与最小值问题进行了阐述.

本书适合中学师生及广大数学爱好者阅读学习.

图书在版编目(CIP)数据

极值与最值. 中卷/南秀全编著. -- 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.6

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5409 - 5

Ⅰ. ①极… Ⅱ. ①南… Ⅲ. ①极值(数学) Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 117102 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　李　欣
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 21.75　字数 223 千字
版　　次　2015 年 6 月第 1 版　2015 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 5409 - 5
定　　价　38.00 元

◎

目录

代数极值问题

第3章

在这一章里，我们将系统地介绍初中代数中所涉及的有关极值问题的类型与解法.

3.1 一次函数的最值

一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 在其定义域（全体实数）内是无最值的，但若对 x 的取值范围加以限制（或约束）条件，一次函数就有最值了. 下面对函数

$$y=kx+b(k\neq0) \qquad (*)$$

的最值先做一般性的讨论.

1. 令 $n\leqslant x\leqslant m$，对于式（$*$）就有

当 $k>0$ 时，$y_{\max}=km+b$，$y_{\min}=kn+b$，即如图 3.1 所示.

当 $k<0$ 时，$y_{\max}=kn+b$，$y_{\min}=km+b$，即如图 3.2 所示.

2. 令 $n\leqslant x<+\infty$，对于式（$*$）就有

当 $k>0$ 时，y 无最大值，y 有最小值

$y_{\min}=kn+b$,如图 3.3 所示.

当 $k<0$ 时,y 有最大值 $y_{\max}=kn+b$,y 无最小值,即如图 3.4 所示.

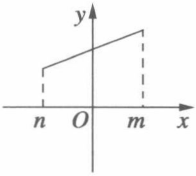


图 3.1

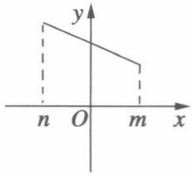


图 3.2

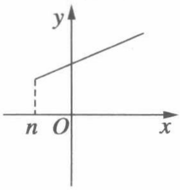


图 3.3

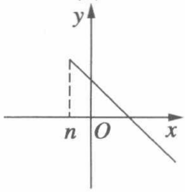


图 3.4

3. 令 $-\infty<x<m$,对于式(*)就有

当 $k>0$ 时,y 有最大值 $y_{\max}=km+b$,y 无最小值,即如图 3.5 所示.

当 $k<0$ 时,y 无最大值,y 有最小值 $y_{\min}=km+b$,即如图 3.6 所示.

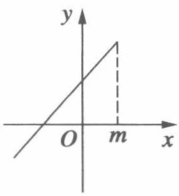


图 3.5

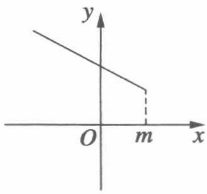


图 3.6

由 1,2,3 可知,若 x 定义在闭区间时,函数有最大值和最小值;若 x 定义在半开半闭区间时,函数有最大值或最小值;若 x 定义在开区间时,函数既无最大值又无最小值. 因此,求一次函数的最值,关键就是要找出

自变量的取值范围. 而面积的最大值或最小值，一般地，指函数图像之间或坐标轴所构成的平面区域.

例1　已知$|x+1|+|3-x|=4$，求$y=2x-1$的最值v.

解　由已知$|x+1|+|3-x|=4$可求得$-1\leqslant x\leqslant 3$. 又$k=2>0$，所以，当$x=3$时，y有最大值$y_{\max}=5$. 当$x=-1$时，y有最小值$y_{\min}=-3$.

说明　此题函数自变量的取值范围已明确给出，下面一例自变量的取值范围隐含在题给的条件中，必须首先挖掘出来.

例2　已知关于x的方程$x^2+x-t=0$有两个实数根，设方程两根的立方和为S，则S的最大值或最小值是多少？

解　设方程$x^2+x-t=0$的两根为x_1, x_2，则由韦达定理得

$$x_1+x_2=-1, x_1x_2=-t$$

所以

$$\begin{aligned} S &= x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2] \\ &= -3t-1 \end{aligned}$$

要使方程$x^2+x-t=0$有实根，则

$$\Delta=1+4t\geqslant 0$$

所以

$$t\geqslant -\frac{1}{4}$$

故当$t=-\frac{1}{4}$时，S有最大值为

$$-3\times\left(-\frac{1}{4}\right)-1=-\frac{1}{4}$$

例3（1989年上海市初三数学竞赛题）　已知三个非负数a, b, c满足条件$3a+2b+c=5$，$2a+b-3c=1$. 记$S=3a+b-7c$的最大值为M，最小值为m，则M与m之积$Mm=$________.

解 由 $3a+2b+c=5, 2a+b-3c=1$ 易解得

$$a=7c-3, b=7-11c$$

因为 $$a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0$$

所以 $$7c-3\geqslant 0, 7-11c\geqslant 0$$

则 $$\frac{3}{7}\leqslant c\leqslant \frac{7}{11}$$

因此

$$\begin{aligned} S &= 3a+b-7c \\ &= 3(7c-3)+7-11c-7c \\ &= 3c-2 \end{aligned}$$

故 $$-\frac{5}{7}\leqslant 3c-2\leqslant -\frac{1}{11}$$

即 $$-\frac{5}{7}\leqslant S\leqslant -\frac{1}{11}$$

故 $$Mm=\left(-\frac{5}{7}\right)\left(-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{77}$$

例4 对于每个实数 x,设 $f(x)$ 取 $4x+1, x+2, -\frac{4}{7}x+4$ 三个函数值中的最小值(图3.7),那么 $f(x)$ 的最大值是多少?

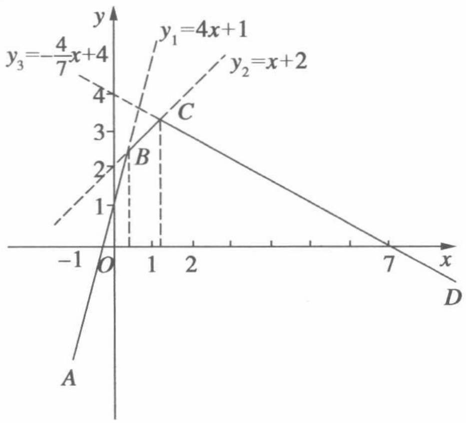


图3.7

分析　首先应理解“对于每个实数 x，设 $f(x)$ 取 $4x+1, x+2, -\frac{4}{7}x+4$ 三个函数值中的最小值”的含意. 不妨取 $x=-1$，这时 $4x+1=-3, x+2=1, -\frac{4}{7}x+4=4\frac{4}{7}$，所以取 $4x+1$ 对应的函数值，即 $f(-1)=3$，从图 3.7 来看，$x=-1$ 所对应的三点 $(-1,-3)$，$(-1,1)$，$(-1,4\frac{4}{7})$ 中应取其最低点 $(-1,-3)$ 的函数值. 由于 $y_1=4x+1, y_2=x+2, y_3=-\frac{4}{7}x+4$ 表示三条直线，因此，对每一个 x 值，应取三条直线上对应的三点中的最低点的函数值.

解　令 $y_1=4x+1, y_2=x+2, y_3=-\frac{4}{7}x+4$. 在同一直角坐标系中，作出这三个函数的图像，如图 3.7. 因此函数 $f(x)$ 的图像是实折线 $AB-BC-CD$. 显然在点 C 达到最大值. 解方程组

$$\begin{cases} y=x+2 \\ y=-\frac{4}{7}x+4 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=1\frac{3}{11} \\ y=3\frac{3}{11} \end{cases}$$

即当 $x=1\frac{3}{11}$ 时，$f(x)$ 的值最大为 $3\frac{3}{11}$.

例 5　求直线 $y=px$，$(1-p^2)y=2p(x-a)$ 与 x 轴

围成的部分,当 p 取什么值时面积最大?最大值是多少?(其中 $a>0,p\neq 0$)

解 易知直线 $y=px$ 经过原点,直线 $(1-p^2)y=2(p-a)$ 经过定点 $(a,0)$,所以,这两条直线与 x 轴所围成的区域一定是一个三角形且这个三角形的一条边长为 a,因此,只要求出 a 边上的高即可.

由于 a 边上的高即为两直线交点中的纵坐标,因此,解方程组

$$\begin{cases} y=px \\ (1-p^2)y=2p(x-a) \end{cases}$$

得

$$y=\frac{2py}{1+p^2}$$

若设三角形面积为 S,则

$$S=\frac{1}{2}a\left|\frac{2py}{1+p^2}\right|=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{2a|p|}{1+p^2}$$

即 $$(1+p^2)S=|p|a^2, Sp^2-a^2|p|+S=0$$

因为 $p\neq 0$,所以

$$\Delta=a^4-4S^2\geqslant 0$$

所以 $$(a^2-2S)(a^2+2S)\geqslant 0$$

但 $a^2+2S>0$,所以

$$a^2-2S\geqslant 0, S\leqslant\frac{a^2}{2}$$

这就是说,三角形面积 S 的最大值为$\frac{a^2}{2}$,此时可解得 $p=\pm 1$,其图像如图 3.8 所示.

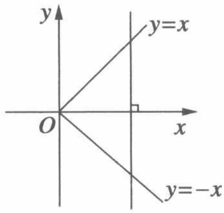


图 3.8

下面再看看几个应用方面的问题.

例 6（1990 年第 1 届希望杯数学邀请赛初一试题）　两辆汽车从同一地点同时出发，沿同一方向同速直线行驶，每车最多只能带 24 桶汽油，途中不能用别的油，每桶油可使一车前进 60 km，两车都必须返回出发地点，但是可以不同时返回，两车相互可借用对方的油. 为了使其中一辆车尽可能地远离出发地点，另一辆车应当在离出发地点多少千米的地方返回？离出发地点最远的那辆车一共行驶了多少千米？

解　设甲前行用了 x 桶油，即返回，则甲给乙 $(24-x)$ 桶汽油. 乙继续前行，携 $(24-2x)+(24-x)=48-3x$ 桶汽油. 依题意应有

$$48-3x\leqslant 24$$

所以

$$x\geqslant 8$$

甲、乙分手后，乙继续前行的路程是

$$S(x)=\frac{(24-2x)+(24-2x)}{2}\times 60$$

$$=30(48-4x)$$

故 $x=8$ 时，$S(x)$ 最大值为

$$S(8)=480(\mathrm{km})$$

因此，乙车共行路是

$$2\times[60x+480]_{x=8}=1\ 920(\mathrm{km})$$

例7 生产队要安排20个劳动力来耕种50亩土地,这些地可以种蔬菜、棉花或水稻.如果种这些农作物地所需要的劳动力和预计的产值如表1:

表1

	每亩需要劳动力/人	每亩预计产值/元
蔬菜	$\frac{1}{2}$	110
棉花	$\frac{1}{3}$	75
水稻	$\frac{1}{4}$	60

怎样安排才能使土地都种上作物,所有劳动力都有工作,而农作物的预计总产值最高.

解 设种蔬菜、棉花、水稻的土地分别为 x,y,z 亩,预计总产值为 w 元.依题意有

$$\begin{cases} x+y+z=50 & (1) \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=20 & (2) \\ w=110x+75y+60z & (3) \end{cases}$$

又 $x,y,z\geqslant 0$,由式(2)得

$$6x+4y+3z=240 \qquad (4)$$

式(4) -(1) ×3 得

$$3x+y=90$$

所以

$$y=90-3x \qquad (5)$$

(4) -(1) ×4 得

$$2x-y=40$$

所以

$$z = 2x - 40 \tag{6}$$

由 $90 - 3x \geqslant 0, 2x - 40 \geqslant 0$ 得 $20 \leqslant x \leqslant 30$.

再把式(5),(6)代入式(3)得

$$w = 5x + 4\ 350$$

所以,当 $x = 30$ 时

$$w_{\max} = 5 \times 30 + 4\ 350 = 4\ 500$$

此时 $y = 0, z = 20$.

所以,应当种 30 亩地蔬菜,20 亩的水稻,才能使所有的劳动力都有工作且总产值最高.

例 8(1960 年上海市高三数学竞赛题)　有两个面粉厂供应三个居民区面粉,第一个面粉厂月产60 t,第二个面粉厂月产 100 t;第一个居民区每月需 45 t,第二个居民区每月需 75 t,第三个居民区每月需 40 t. 第一个面粉厂与三个居民区供应站的距离依次是 10 km,5 km,6 km,第二个面粉厂与三个居民区供应站的距离依次是 4 km,8 km,15 km,问怎样分配面粉,才能使运输最经济?

解法 1　设第一个面粉厂运给第一个居民区供应站的面粉是 x t,运给第二个居民区供应站的面粉是 y t,因为供需平衡,其他的运输情况可推出如图 3.9 所示. 若以 t,km 为单位,则运输总量为

$$\begin{aligned} S &= 10x + 5y + 6(60 - x - y) + 4(45 - x) + \\ &\quad 8(75 - y) + 15(x + y - 20) \\ &= 15x + 6y + 840 \end{aligned}$$

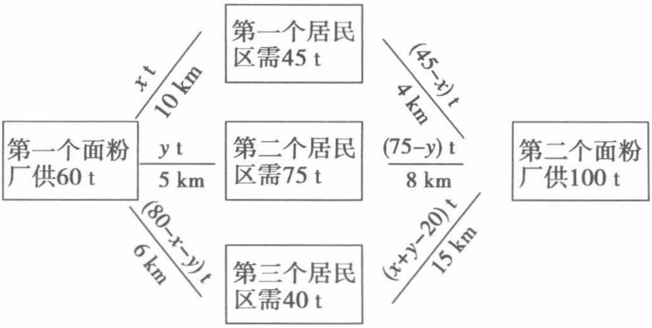


图 3.9

因 $0\leqslant x\leqslant 45$, $0\leqslant y\leqslant 60$ 及 $20\leqslant x+y\leqslant 60$. 故有

$$S=9x+6(x+y)+840\geqslant 9x+960$$

所以,当 $x=0$ 时,S 有最小值 960. 此时,再看运输总量

$$S=15x+6y+840$$

y 越小,S 越小. 但因 $x+y\geqslant 20$,现 $x=0$,所以 $y\geqslant 20$,当 $y=20$ 时,S 最小.

故所求运输总量最小的运输方案,可列表如下表 2:

表 2

需 / 供	第一个居民区	第二个居民区	第三个居民区	总供量
第一个面粉厂	0	20	40	60
第二个面粉厂	45	55	0	100
总需量	45	75	40	160

解法 2　先把题中已知条件列成一产销平衡表与

运价表(表 3):

表 3

发点	收点			
	第一个居民区	第二个居民区	第三个居民区	发量/t
第一个面粉厂	$10x_{11}$	$5x_{12}$	$6x_{13}$	60
第二个面粉厂	$4x_{21}$	$8x_{22}$	$15x_{23}$	100
收量/t	45	75	40	160

设第一个面粉厂运给三个居民区 x_{11}, x_{12}, x_{13} t 面粉. 第二个面粉厂运给三个居民区 x_{21}, x_{22}, x_{23} t 面粉. 则

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=60 & (7) \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=100 & (8) \\ x_{11}+x_{21}=45 & (9) \\ x_{12}+x_{22}=75 & (10) \\ x_{13}+x_{23}=40 & (11) \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2;j=1,2,3) & (12) \end{cases}$$

这是限制条件.

总的运费为

$$C=10x_{11}+5x_{12}+6x_{13}+4x_{21}+8x_{22}+15x_{23}$$

这是目标函数,是一个含六个变量的一次(线性)函数. 从式(9),(10)可得

$$x_{21}=45-x_{11}, x_{22}=75-x_{12}$$

从式(7),(11)可得

$$x_{13}=60-x_{11}-x_{12}$$

$$x_{23}=40-x_{13}=40-60+x_{11}+x_{12}=x_{11}+x_{12}-20$$

代入目标函数