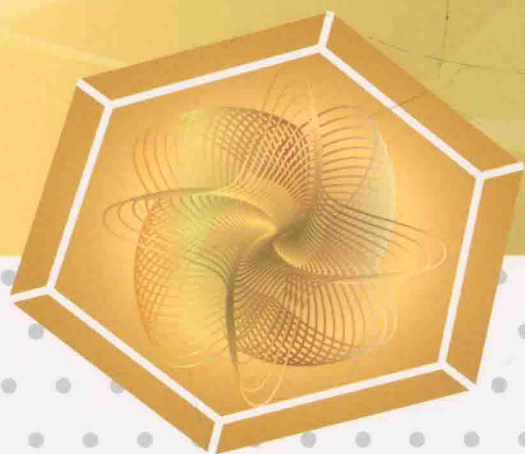


浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书

小波分析应用解析

邸继征 银俊成 编著



科学出版社

浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书

小波分析应用解析

邸继征 银俊成 编著

浙江省级重点学科应用数学建设基金资助
浙江省信号处理重点实验室建设基金资助

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书介绍了小波变换、一元小波级数、紧支集实小波、多元小波、小波包和双正交小波等小波分析内容,讲述了这些内容的基本理论和初步计算方法.在此基础上,借助 Matlab 编程和 Matlab 小波分析软件包,阐述了如何应用小波分析解决实际问题.本书深入浅出,一般不介绍结果的证明,特别关注内容的原理结构和方法.

本书不要求读者具有高深的数学基础,可作为有意了解小波分析理论和应用或直接应用小波分析解决实际问题的科技工作者的参考书,也可作为研究生与高年级本科生的小波分析教材.

图书在版编目(CIP)数据

小波分析应用解析/邸继征,银俊成编著. —北京:科学出版社,2016
(浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书)

ISBN 978-7-03-049842-7

I. ①小… II. ①邸… ②银… III. ①小波分析 IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 213796 号

责任编辑:石悦/责任校对:郭瑞芝
责任印制:徐晓晨/封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 8 月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2016 年 8 月第一次印刷 印张: 16 1/8

字数: 309 000

定价: 56.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

“浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书”

编 委 会

主任委员 邱继征 邬学军 王定江

编 委 (按姓名拼音排序)

陈剑利	成 敏	程小力	邓爱珍	狄艳媚	邱继征
丁晓冬	丁 盈	方 兴	方照琴	冯 鸣	何敏勇
胡 娟	胡晓瑞	黄纪刚	姜丽亚	金建国	金永阳
李素兰	李永琪	练晓鹏	刘 震	陆成刚	陆建芳
罗和治	马 青	孟 莉	缪永伟	潘永娟	沈守枫
寿华好	宋军全	唐 明	王定江	王金华	王理同
王 勤	王时铭	王为民	王雄伟	邬学军	吴 超
夏治南	谢聪聪	徐利光	许红娅	颜于清	杨爱军
原俊青	张冬梅	张 隽	张素红	周佳立	周明华
周 南	朱海燕	卓文新			

总 序

近年来,关于数学的各种新观点不断出现.

有一种观点认为,随着数学的发展,数学已经从自然科学中分离出来,成为独立的科学门类——数学科学.

持这种观点的学者的依据是:①从现代数学的发展情况可以看出,数学的许多内容和方法的产生,不再是基于研究自然界中存在的物质运动规律的需要,而是基于数学自身的需要.例如, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=5+5=3+7$,等等,即每一个大于等于6的偶数都可以表示为两个奇素数的和,这就是哥德巴赫猜想,至今没有证明.但是,这样一个在数学中显得十分重要的著名的猜想,其结果的对与否,不会对数学之外的任何学科产生影响,证明它不是自然科学的需要,而仅仅是数学科学的需要.②数学不仅具有应用功能,而且具有其他学科不能比拟的教育功能.数学的应用功能表现在:没有数学,现代科技无从谈起;任何一种学科,只有应用了数学,才能成为科学学科.数学的教育功能表现在:在中国,语文、数学、英语被认为是初等教育中最重要的三门课程;在世界范围内,有不学中文的学生,有不学英语的学生,但没有不学数学的学生.

我同意这种观点,希望在数学教学改革和科学研究中体现这种观点.

数学教学改革,首先需要的是教材的改革,而教材的改革,涉及的只有两个方面:一是内容;二是方法.

如何在—本数学教材中以数学科学的观点选取内容、介绍方法?

我的认识是:无论是选取内容方面,还是介绍方法方面,都要关注数学的应用功能和教育功能的展现.

在内容的选取方面,既不是不管数学的教育功能,狭隘地全部以目前生产生活的实际应用为目的,打乱系统,什么“有用”就选什么,什么“没用”就跳过什么;也不是完全从数学的需要出发,一点也不考虑所选取的内容和实际应用的联系.本套丛书采取有实际应用背景的内容优先选取的原则.我们的考虑是:没有迹象表明,没有实际应用背景的内容在体现数学的教育功能时强于有实际应用背景的内容,既然如此,后者更有利于同时展现数学的应用功能和教育功能.

在方法的介绍方面,既不完全采用公理化体系的做法,让读者在接受严格数学训练的基础上自然地受到数学科学的熏陶;也不完全摒弃数学特有的推理过程,以急功近利的方式只讲结果,只讲计算公式.我们知道,公理化体系的做法是将数学的训练目的不直接说出来,而是藏起来,藏在严密的过程背后,让学生不知不觉得到严格的数学训练.这种体系在介绍内容时,不交代前因后果,一上来就是莫名其妙的定义、公理,然后一步步以极其严密的方式展开讨论.这种做法在知识门类相对少的过去是有效的,但在知识爆炸、课程门类不断增加、学生同时要有做学问和实际应用两

手准备的现在,没有时间这样做.训练要有,但训练目的不是藏起来,而是尽可能直接讲出来.例如,数学书籍中一定会用到归纳法、演绎法、反证法,这些方法不是数学特有的,但可以被数学最为有效地传授给学生,这一事实恰好可以说明数学的教育功能的强大.但是,如果我们去问一下数学系的毕业生什么是演绎法,恐怕很少有人能说周全,究其原因,是我们的教材没有明确地告诉学生演绎法的基本内容和过程.本套丛书将致力于改变这种状况.

本套丛书注意到:根据课程和授课对象的不同,数学的应用功能和教育功能的展现需分层次,两种功能的展现要有机配合.例如,有的数学分支本来就属于应用数学,对这样的课程,在选取内容和介绍方法时必须首先保证应用方面的需要,其次才考虑教育功能的融入;有的授课对象是文科学生,对这些学生,在编写教材时就要充分注意他们的基础、兴趣、思维方式和希望通过数学的学习要达到的目的,因此要首先考虑数学的教育功能,其次才考虑应用功能的融入.

现代化的标志是数字化,也就是要在所有的领域尽最大可能地使用计算机技术,因此,在数学教学中,对数字化的配合和适应是必需的.为了展现数学的应用功能,在数学教学的每个环节,都应该关注计算机技术,包括有意考虑内容的计算机实现,如算法问题,内容与几个成功的数学软件的结合问题.我们知道,介绍如何应用数学软件的最好环境,当为相应的数学课程.因此,本套丛书中的教材,特别注意介绍与主要内容配套的软件的应用,例如,介绍相应的MATLAB 软件包的使用.

科学研究成果整理成学术著作,可以总结和条理化研究问题,这对于传播研究成果、深化研究工作是有利的,这些著作还可以作为研究生教材使用.

本套丛书中学术著作的撰写遵循了如下的原则:

首先,作为介绍学术成果的学术著作要有新内容、新观点,学术系统应是明显的,不是杂乱的、拼凑的,特别是著作中作者的成果应有重要的分量.

其次,本套丛书中的学术著作特别注意内容的系统性、完备性.

再次,也是最重要的,本套丛书中的学术著作,和教材一样注意展现数学的应用功能和教育功能,在必要时,还考虑内容的计算机实现,如算法问题,内容与几个成功的数学软件的结合问题.

最后,在写作细节上,本套丛书要求作者以严格的科学态度对待自己的著作,概念和符号应明确,推导和介绍要细致,避免突然出现翻遍全书都找不到介绍的概念和符号,避免用显然、易知等词语掩盖困难的证明过程.

教学改革涉及的问题很多,有些问题需要一步步解决,有的还需要根据形势的变化调整解决方案.我们仅做了初步的尝试,加之水平有限,本套丛书中的问题一定很多,迫切希望读者批评指正.

邱继征

2013年3月8日

前 言

小波分析在许多领域都有重要的应用。本书正是面向有意了解小波分析理论和应用或直接应用小波分析解决实际问题的科技工作者，介绍小波分析最基本的内容和解决实际问题的方法。

需要注意，即使是最基本的小波分析内容，要让非数学工作者明白，介绍起来也要面临巨大的困难。因为，一方面小波分析既然为新兴的数学分支，其研究方法与工具必与现代数学相关，小波分析理论体系的建立，依赖现代数学中的一些概念、结构和手段，这些元素构成小波分析的语言和表现形式，弃之而向人们介绍小波分析，如同不用语言和手势向人们表达事物，其困难程度可以想象；另一方面，如果使用现代数学元素向不熟悉现代数学的非数学工作者介绍小波分析，就像对不精通外语的人士用外语表达事物，获得接受的困难程度也是可以想象的。

为了尽可能解决这一困难，本书在不摒弃现代数学元素的基础上，尽量利用具体的初等例证对这些元素进行解释。

和其他应用数学分支一样，从小波分析基本理论到实际应用还有很长的距离。我们经常看到这样的情形：读者在基本了解了一个应用数学分支的内容以后，不知道如何将其应用于所要解决的实际问题，更不知道如何进行相关计算。因此，在讲述小波分析基本内容的基础上，明确地展示这些内容与实际问题的联系脉络，提供虽不一定优良但易于理解且便于实现的近似计算方法，从而帮助读者掌握内容的理论与应用，当为正确的选择。

本书正是努力实现这样的选择。

在掌握小波分析必要知识的基础上，要想在实际中真正应用这些知识，必须借助计算机和目前广泛而成功应用的软件。无疑，MATLAB 正是这样的软件。

使用该软件有两种方式，其一是自己进行 MATLAB 编程，其二是使用现成的软件包。

本书对这两种方式都予以呈现。第一种方式的优点在于可以根据自己的兴趣与实际问题的要求选取有效的算法，获得理想的结果，缺点在于对读者掌握软件的程度有较高的要求。第二种方式的优点在于操作简单，缺点在于软件的使用没有针对性。一般来说，许多读者完全不明白其中蕴含的数学工具是怎么运行的，对象、过程甚至结果不能对应，可以说对软件包的使用完全是盲目的，这对软件包的使用效果必然产生不利影响。

我们充分认识到，作为介绍小波分析基本内容和应用的书，要有机融合基本内

容、应用和软件三部分,需充分注意方式和技巧,不然,很可能使本书成为小波分析知识、小波分析的应用和软件包使用三部分割裂的拼凑物。我们致力于防止出现这种情况。在介绍小波分析基本内容时,考虑到 MATLAB 编程和软件包的需要;在介绍 MATLAB 编程时,一方面与基本内容取得联系,另一方面选取实际问题中常见的函数,对获得的处理结果进行仔细的评价与分析,充分展示应用过程和来龙去脉;在介绍 MATLAB 小波分析软件包时,尽量与小波分析基本内容取得联系,对得到的结果,尽量利用基本内容的知识予以分析和解释。

有一点需要指出:在计算机编程中,需考虑计算的复杂性。一些计算数学中得到的优美方法,在目前的计算机设备条件下,如果原原本本地编程使用,很可能计算上三五年也得不出结果,因而失去了使用价值。因此,无论是自己编的程序还是软件包,在算法上都有对计算数学中的公式、方法的大量简化、改进。我们注意到:对于数学,理论结果中有计算公式,但这些公式一般无法直接应用于实际问题的解决;应用计算数学方法可以得到各种计算公式,但这些公式一般附有误差估计,在建立这样的公式时,特别关注计算精度,但常常不关注实用性,这种公式不受应用人士的喜欢;实用的计算公式根据理论结果、其中的计算公式或计算数学方法得到,对于这种计算公式,强调应用效率,不进行误差讨论,比如离散 Fourier 变换的应用,小波分析中基于 Mallat 算法的抽样值算法,没有人去研究应用离散 Fourier 变换解决实际问题时的误差有多大,这种公式最显著的特点,是深受数学专业以外人士的欢迎。本书偏重于使用这种实用的计算公式,对此,本书将不进行逐一的解释与说明。

由于这些内容可能已经使读者感到负担不小,本书中,我们将大部分涉及的公式、定理的推导与证明省略。

本书第 1 章至第 7 章由邸继征编写,第 8 章由银俊成编写。

感谢浙江省信号处理重点实验室和浙江省重点学科应用数学提供资助,感谢科学出版社编辑石悦、胡海霞的大力帮助。本书内容曾为浙江工业大学理学院和中国计量学院理学院等院系四届研究生讲授,研究生石智慧,宋丛威,梁静,冯成祥,胡新琰,殷燕妮,汪雪芬,柴金良,康瑞芳提出过宝贵的意见,在此一并感谢。由于作者水平有限,本书结果许多是作者新给出的,不妥之处在所难免,迫切希望读者指正。

编 者

2015 年 8 月 15 日

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 相关空间概念与知识	1
1.1.1 线性空间	1
1.1.2 赋范线性空间	4
1.1.3 内积空间	8
1.1.4 空间 $L^p(R)$	13
1.2 Fourier 级数	16
1.2.1 Fourier 级数的收敛	16
1.2.2 关于 Fourier 级数收敛的说明	19
1.2.3 Fourier 级数的几种表述方式	21
1.3 Fourier 变换	23
1.4 采样定理与滤波	27
1.4.1 采样定理	28
1.4.2 根据采样值对信号进行滤波	29
1.4.3 滤波器	31
第 2 章 小波变换及其应用	34
2.1 第一类小波变换	34
2.1.1 变换公式与反演公式	34
2.1.2 意义与作用	37
2.1.3 应用与计算	40
2.2 第二类小波变换	45
2.2.1 变换公式	45
2.2.2 边界提取	46
第 3 章 一元小波级数	48
3.1 基于一元多分辨分析的小波级数理论	48
3.2 小波级数展式的意义与计算问题	52
3.2.1 小波级数展式的意义	53
3.2.2 小波级数展式中的计算问题	53
3.3 滤波器的作用 —— Mallat 算法	57
3.3.1 低通与高通	58

3.3.2	分解算法	59
3.3.3	重构算法	63
第 4 章	紧支集实小波	65
4.1	紧支集小波的相关问题	65
4.1.1	紧支集实小波对应的尺度方程形式	66
4.1.2	尺度函数与小波值的逼近计算	67
4.2	紧支集实小波的构造	69
4.2.1	ψ 为紧支集实小波的充要条件	69
4.2.2	构造紧支集实小波	72
4.2.3	具有消失矩的紧支集实小波	73
4.3	Mallat 算法及其应用	80
4.3.1	分解与重构算法	80
4.3.2	函数的分解	81
4.3.3	关于函数重构的讨论	85
4.4	采样值算法及其应用	86
4.4.1	一个函数逼近结果	87
4.4.2	c_k^{-j} 与函数值的近似	90
4.4.3	采样值形式的分解	91
4.4.4	关于函数重构的讨论	93
第 5 章	多元小波	96
5.1	小波分析处理多元问题的原理	96
5.2	二元多分辨分析与张量积小波	98
5.3	Mallat 算法	101
5.3.1	一般二元小波的 Mallat 算法	101
5.3.2	紧支集二元小波的 Mallat 算法	103
5.4	采样值算法	105
5.4.1	一个函数逼近结果	106
5.4.2	$c_{-j,k,m}$ 与函数值的近似与采样值形式的分解	107
5.4.3	垂直、水平与对角线细节的解读	111
第 6 章	小波包	115
6.1	空间的分解及算法	115
6.1.1	小波包的概念	115
6.1.2	W_j, V_j 的分解	116
6.1.3	空间 $L^2(R)$ 的分解与小波包库	119
6.1.4	算法	120

6.2 小波包的应用	124
6.2.1 W_j 中元小波包分解的等伸缩性	124
6.2.2 代价函数	125
6.2.3 最优小波包基的选取	131
6.2.4 信号的小波包分解解读	133
第 7 章 双正交小波简介	136
7.1 基本理论	136
7.2 算法	138
第 8 章 MATLAB 小波分析应用	142
8.1 MATLAB 小波分析工具箱简介	142
8.1.1 小波和小波包显示	142
8.1.2 一维小波分析	145
8.1.3 二维小波分析	169
8.1.4 小波分析函数简介	180
8.2 应用 MATLAB 内置函数实现小波变换	184
8.2.1 一维连续小波变换	185
8.2.2 一维离散小波变换	188
8.2.3 二维离散小波变换	211
8.2.4 小波分析在数字图像处理中的应用	228
参考文献	239
索引	241

第 1 章 绪 论

本章介绍本书涉及的部分概念与知识. 其中, Fourier 级数理论可以看作小波级数理论的先导, Fourier 变换理论可以看作小波变换理论的先导. 采样定理与滤波器的介绍, 有助于理解利用小波可以进行滤波的原理.

1.1 相关空间概念与知识

数学被认为是研究空间形式与数量关系的科学, 因此在讨论数学问题、建立数学关系时, 往往一开始就要介绍空间, 以表明这些问题与关系是在什么环境下展开讨论与建立的. 无疑, 问题与关系不同, 相应空间也不同, 本节介绍与本书内容相关的空间.

1.1.1 线性空间

本书中, 为方便计, 记实数集为

$$R = (-\infty, \infty),$$

复数集为

$$C = \{c = x + iy : x, y \in R\},$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, 整数集为

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

非负整数集为

$$Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\},$$

从整数 N_1 起到大于 N_1 的整数 N_2 止, 其间连续排列的整数构成的集合为

$$Z_{N_1, N_2} = \{N_1, N_1 + 1, \dots, N_2 - 1, N_2\}.$$

空间应该是一个集合, 其中有一些结构. 数学离不开一些运算, 所述结构应该保证这些运算能够进行. 数学中最简单的运算是加法和数字与元素的乘法, 这些运算之间还应有协调性, 比如, 两个一样的元素相加, 其结果应该是这个元素的二倍: $a+a=2a$. 其中注意 $a+a$ 是元素的加法, $2a$ 却是数字与元素的乘法, 二者本来是完全不同的东西, 现在按道理要相等, 离开运算之间的某种协调性是不行的.

线性空间就是定义了元素加法和数字与元素的乘法 (即数乘) 的集合.

设 E 为一个集合, 即由某些具有共同性质的元素组成的集体. 又设 F 是一个数域, 即由一些数 (实数或复数) 构成的集合, 而这些数的有限四则运算 (0 不做除数) 结果仍属于 F . 例如, F 为实数域、复数域、有理数域等. 整数集 Z 不是一个数域, 因为两个整数相除结果不一定仍是整数.

假定集合 E 不是一个空集, 即 E 至少含有一个元素, 对 E 中任意两个元素 a, b , 定义了和 $a+b$, 而 $a+b$ 仍属于 E , 对 E 中任意一个元素 a 和 F 中任意一个元素 k , 定义了积 ka , 而 ka 仍属于 E . 这样就在 E 上定义了两个运算: 加法和数乘. 假定加法和数乘满足我们熟知的运算规律, 比如结合律:

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

分配律:

$$k(a+b)=ka+kb.$$

E 中必有 0 元素, E 中任一元素 a 必有负元素 $-a$, 使得

$$a+(-a)=0,$$

而

$$-a=(-1)a,$$

等等, 则称 E 为 F 上的线性空间.

线性空间有时又称为向量空间, 线性空间的元素称为向量.

规定空集也是一个线性空间.

需要强调: 任何线性空间 E 必然伴随一个数域 F , 任何非空线性空间 E 中必有 0 元素.

实数直线 R 按照通常数字的加法和数乘成为一线性空间.

令

$$R^2=R\times R=\{(x,y):x,y\in R\},$$

称之为实数直线 R 与自身的笛卡儿乘积. 对任意 $a=(x_1,y_1), b=(x_2,y_2)\in R^2$, 定义加法

$$a+b=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2),$$

又对任意 $k\in F=R$, 定义数乘

$$ka=k(x_1,y_1)=(kx_1,ky_1),$$

则 R^2 成为一线性空间, 伴随 R^2 的数域 F 仍为 R .

一般地, 对任意正整数 n , 令

$$R^n = R \times R \times \cdots \times R = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

对任意 $a = (x_1, x_2, \cdots, x_n), b = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in R^n$, 定义加法

$$a + b = (x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

对任意 $k \in F = R$, 定义数乘

$$ka = k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (kx_1, kx_2, \cdots, kx_n),$$

则 R^n 成为一线性空间, 伴随 R^n 的数域 F 为 R .

R^2 为通常的坐标平面. 如果对任意实数 x, y , 将 (x, y) 与以原点 $(0, 0)$ 为起点, 点 (x, y) 为终点的平面向量等同, 并用 (x, y) 表示该向量, 则 R^2 可以看作平面向量构成的线性空间; 将 (x, y) 与复数 $z = x + iy, i = \sqrt{-1}$ 等同, 则 R^2 可以看作复数平面 C .

R^3 为通常的三维空间.

我们以前接触过的一些函数可以构成线性空间. 例如, 若 F 为实数域, 则 $E = \{f : f \text{ 为定义于 } R \text{ 的实函数}\}$ 为一个线性空间, 其中对 $f, g \in E$, $f+g$ 的定义为: $f+g$ 在点 $x \in R$ 的值为 $f(x) + g(x)$, 即有 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, 对 $f \in E, k \in F$, kf 的定义为: kf 在点 $x \in R$ 的值为 $kf(x)$, 即有 $(kf)(x) = kf(x)$.

设 E 为 F 上的线性空间, n 为正整数, $a_i \in E, i = 1, 2, \cdots, n$, 若存在不全为 0 的 $k_i \in F, i = 1, 2, \cdots, n$, 使

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n = 0,$$

则称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性相关, 否则, 若 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n = 0$ 必推出 $k_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关.

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关, 而 E 中任何 $n+1$ 个元素皆线性相关, 则称 E 为 n 维线性空间, 此时, 对 E 中任何元 a , 必有 $k_i \in F, i = 1, 2, \cdots, n$, 使

$$a = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n,$$

即 E 中任何元都可通过 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性表示, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为 E 的一组基.

存在正整数 n , 使 n 为维数的线性空间 E 称为有限维的线性空间, 不是有限维的线性空间称为无限维的线性空间. 在无限维的线性空间中, 不存在由有限个元素构成的基. 关于这类空间基的讨论, 与有限维的情形完全不同, 需要更多的数学知识. 比如 1.1.2 小节在线性空间中引入范数, 便可以讨论无限维的线性空间中基的问题.

注: 如果按照数学专业的做法, 集合元素的和、数与集合元素的积以及线性空间这些概念的描述, 比上述描述要复杂很多. 为使读者不致陷入复杂的数学环境而影响对本质结构的理解, 本书不采用严格的数学方法与手段处理所述内容, 这种做法可能引发许多漏洞.

1.1.2 赋范线性空间

我们最常见的数学分支, 多属分析系统、代数系统、几何系统、不确定性数学系统几大类. 分析系统的一个特点是, 要在相应空间中引入极限、连续的概念. 小波分析属于分析系统, 需要引入抽象的极限、连续的概念.

回顾数值函数 (自变量和函数值都是数字) 极限, 例如,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a,$$

其定义为: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

时,

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

如果自变量 x 和函数值 $f(x)$ 不再是数, 绝对值 $|x - x_0|, |f(x) - a|$ 便不再有意义, 要将极限概念引过来, 就必须用什么东西取代绝对值.

在许多情况下, 范数可以代替绝对值, 是绝对值的推广.

设 E 为一个线性空间, 伴随 E 的数域为 F , 若存在定义于 E 的数值函数, 记为 $\|\cdot\|$, 满足:

(1) 对任意 $x \in E$, $\|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$, 其中前两个 0 为数字 0, 后一个 0 为 E 中的 0 元素;

(2) 对任意 $x \in E, k \in F$,

$$\|kx\| = |k|\|x\|;$$

(3) 对任意 $x, y \in E$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

则称 $\|\cdot\|$ 为 E 上定义的范数, $(E, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 即赋予范数的线性空间. 在范数 $\|\cdot\|$ 明确时, 简记 $(E, \|\cdot\|)$ 为 E .

将任意实数 $x \in R = (-\infty, \infty)$ 的范数定义为其绝对值 $|x|$, 则 $(R, |\cdot|)$ 即为赋范线性空间. 对任意 $a = (x, y) \in R^2$, 定义范数

$$\|a\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

则 $(R^n, \|\cdot\|)$ 为一赋范线性空间. 一般地, 对任意 $a = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ (n 为正整数), 定义范数

$$\|a\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

则 $(R^n, \|\cdot\|)$ 为一赋范线性空间, 称为 n 维欧几里得空间或 n 维欧氏空间.

在 R^n 上可以定义无穷多种范数, 但只有对如上定义的范数, 才称 $(R^n, \|\cdot\|)$ 为 n 维欧氏空间. 许多情况下, 我们将 n 维欧氏空间简记为 R^n .

对于 2 维欧氏空间 R^2 , 若将其看作通常的坐标平面, 则对任意 $a = (x, y) \in R^2$, 其范数

$$\|a\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

为点 (x, y) 到原点 $(0, 0)$ 的距离; 若将其看作平面向量构成的线性空间, 则 $\|a\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为向量 (x, y) 的模; 若将其看作复数平面 C , 则 $\|a\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为复数 $z = x + iy$ 的模.

有了范数, 就可以在赋范线性空间中给出序列收敛的定义. 设 E 为一赋范线性空间, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 为 E 中元构成的序列, $a \in E$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时,

$$\|a_n - a\| < \varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛, a 为 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 这一事实记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

可以看出, 赋范线性空间中序列收敛的定义与数列 (实数列或复数列) 收敛的定义比较, 绝对值符号换为范数符号, 其余没有区别, 但其包含的意义却往往很复杂, 只有数学基础扎实的人士才能彻底明白. 今后在必要的场合, 将对具体情况加以解释.

序列收敛与级数收敛是相辅相成的. 设 E 为一赋范线性空间, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 为 E 中元构成的序列, 形式地记

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

称其为级数. 令

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

称其为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项部分和. 如果序列 $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 此时 $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ 的极限 S 为 E 中元, 称其为级数的和, 或称级数收敛于 S , 这一事实记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

有了如上准备,便可以讨论赋范线性空间中基的问题. 设 E 为一赋范线性空间, F 为伴随的数域, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 中元构成的序列, 其中任意有限个元皆线性无关, 若对任意 $a \in E$, 存在 F 中元构成的序列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k_n a_n$ 收敛于 a , 即有

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} k_n a_n,$$

则称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 的一个基.

$a = \sum_{n=1}^{\infty} k_n a_n$ 与如下陈述等价. 其一为: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时,

$$\left\| \sum_{l=1}^n k_l a_l - a \right\| < \varepsilon.$$

其二为

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n k_l a_l.$$

我们以前见过的函数、定义域和值域都是数集, 如果将函数定义中的定义域和值域都改为抽象的点集, 其余语句不变, 则可得到映射的定义. 因此映射概念是函数概念的推广, 有人称映射为抽象函数.

有了范数, 就可以给出映射极限和连续的定义. 设 X, Y 为两个赋范线性空间, f 为定义于 X 取值于 Y 的映射, $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in X$ 且 $0 < \|x - x_0\| < \delta$ 时,

$$\|f(x) - y_0\| < \varepsilon,$$

则称映射 f 当 x 趋于 x_0 时存在极限 y_0 , 这一事实记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0.$$

特别, 若 $y_0 = f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 连续.

可以看出, 映射的极限与连续的定义与一般函数的极限与连续的定义比较, 绝对值符号换为范数符号, 其余没有区别, 但其包含的意义却往往很复杂, 只有数学基础扎实的人士才能彻底明白.

注 1: 函数或映射表示方式中的一个问题需要说明. 在以前接触过的数学资料中, 可能常见这样的表述: 函数 $f(x)$ 如何. 这种对函数的表述是有一点问题的, 因为实际上 $f(x)$ 是函数 f 在点 x 处的值, 和函数 f 本身是不同的. 对函数的正确表述应该是: 函数 f 如何. 但这样一来, 新的问题又产生了. 例如, 我们说正弦函数 $\sin x$ 如何, 稍有数学知识的人都可理解, 但若说正弦函数 $\sin$ 如何, 却使人产生怪异的感觉, 再如见到 $\sin e^{x^3}$, 立即知道这是一个初等函数, 但却无法用一个字母 f 将其表达清