现代数学基础丛书·典藏版 61

动力系统的周期解与分支理论

韩茂安 著

科学出版社

现代数学基础丛书·典藏版 61

动力系统的周期解与分支理论

韩茂安 著

上海市研究生教育专项经费资助

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地论述由常微分方程定义的动力系统的周期解及其分支理论,介绍研究有关周期解及其各种分支现象的一般理论与方法,包括 Hopf 分支、退化 Hopf 分支,自治、周期系统周期解的局部分支,非双曲孤立闭轨及闭轨族在自治、周期扰动下的非局部分支,平面系统的 Hopf 分支、Poincaré 分支及同异宿分支等.

本书自成系统,从介绍最基本的定性理论入手,在介绍基本的定性方法与分支理论的基础上逐步深入地研究不同程度的退化分支现象.本书可作为高等院校数学专业的研究生、教师及相关科学研究工作者的教学、科研参考书.

图书在版编目(CIP)数据

现代数学基础丛书:典藏版. 第 2 辑/杨乐主编.—北京:科学出版社,2015.5

ISBN 978-7-03-044412-7

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学-丛书 Ⅳ. ①O1-51

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 111258 号

责任编辑:杨贤英/责任校对:钟 洋
责任印制:徐晓晨/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2002 年 3 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2015 年 7 月 印 刷 印张:30 3/4
字数:396 000

目　录

第一章　奇点及其局部性质

微分方程最基本的解是定常解,对自治系统而言,定常解对应着微分方程在相空间中的奇点.研究奇点的局部性质是微分方程定性理论最基本的任务.本章主要讨论自治系统的局部性质,并给出有关奇点定性分析的理论与方法.首先从线性系统开始.

§1　线性系统

1.1　常系数线性系统

常系数齐次线性系统的一般形式是

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \tag{1.1}$$

其中 A 是 n 阶矩阵,其元素为实数.

定义 1.1　如果 A 的行列式 $\det A \neq 0$,则称 $x=0$ 为(1.1)的初等奇点;如果 A 没有具零实部的特征根,则称 $x=0$ 为(1.1)的双曲奇点;如果 A 的特征值均有负(正)实部,则称 $x=0$ 为(1.1)的汇(源),如果 $x=0$ 为(1.1)的双曲奇点且不是汇和源,则称其为(1.1)的鞍点.

易见双曲奇点必是初等的,反之未必.又对 $n=2$ 的情况,如所周知,(1.1)的汇(源)是稳定(不稳定)的焦点或结点,而此时非双曲的初等奇点是中心奇点.

线性方程(1.1)的通解具有形式 $e^{At}x$,其中

$$e^{At} = \sum_{i \geqslant 0} \frac{1}{i!} A^i t^i .$$

每个解在 $R \times R^n$ 空间中表示一条曲线,该曲线在相空间 R^n 中的投影为(1.1)的轨线.

由矩阵理论,存在可逆矩阵 T,使得线性变换

$$T: y = Tx. \tag{1.2}$$

把(1.1)化为标准型

$$\dot{y} = By, \tag{1.3}$$

其中 $B = TAT^{-1}$为 A 的实 Jordan 标准型,因此它可写成下述块对角形:

$$B = \mathrm{diag}(B_+, B_-, B_0), \tag{1.4}$$

其中 $B_+(B_-, B_0)$的特征值具有正实部(负实部、零实部),于是(1.3)的基本解矩阵 e^{Bt}可写为

$$e^{Bt} = \mathrm{diag}(e^{B_+ t}, \quad e^{B_- t}, \quad e^{B_0 t}). \tag{1.5}$$

如果 $x = 0$ 为双曲奇点,则有

$$B = \mathrm{diag}(B_+, B_-), \quad e^{Bt} = \mathrm{diag}(e^{B_+ t}, e^{B_- t}),$$

且 $x = 0$ 为(1.1)的汇(源)当且仅当 $B = B_-(B = B_+)$. 由线性系统解的结构或由指数矩阵的定义知

$$\lim_{t \to +\infty} e^{B_- t} = 0, \quad \lim_{t \to -\infty} e^{B_+ t} = 0,$$

且趋于零的方式是指数式的. 若 B_-本身是一个 Jordan 块,则可设

$$B_- = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k}, \quad \lambda < 0,$$

或

$$B_- = \begin{pmatrix} C & I & & \\ & \ddots & I & \\ & & \ddots & I \\ & & & C \end{pmatrix}_{2k\times 2k}, \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a < 0,$$

此时有

$$e^{B_- t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

或

$$e^{B_- t} = \begin{pmatrix} D & Dt & \cdots & \dfrac{Dt^{k-1}}{(k-1)!} \\ & D & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & Dt \\ & & & D \end{pmatrix} e^{at},$$

$$D = e^{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

同样,若 B_+ 或 B_0 本身是一个 Jordan 块,则 $e^{B_+ t}$ 与$e^{B_0 t}$有与$e^{B_- t}$类似的表达式.

对任意常向量 $y \in R^n$,与(1.4)的分块相应地可作分解 $y = (y_+, y_-, y_0)^T$,使 $By = (B_+ y_+, B_- y_-, B_0 y_0)^T$,其中上标“$T$”表示转置. 令 E^u,E^s 与E^c 表示R^n 的线性子空间,且满足

$$TE^u = \{y \in R^n \mid y_- = y_0 = 0\},$$

$$TE^s = \{y \in R^n \mid y_+ = y_0 = 0\},$$

$$TE^c = \{y \in R^n \mid y_- = y_+ = 0\}.$$

由(1.5)易知集合 TE^u, TE^s 与 TE^c 是(1.3)的不变集,换句话说,这三个集合各由(1.3)的整条轨线组成.不变集 TE^u(TE^s)的特征是:对(1.3)的任一解 $e^{Bt}y$,当且仅当 $y \in TE^u$($y \in TE^s$)时有 $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{Bt}y=0$($\lim\limits_{t\to+\infty} e^{Bt}y=0$).分别称 TE^u, TE^s 与 TE^c 为(1.3)的不稳定集、稳定集与中心集.注意到

$$e^{At} = T^{-1}e^{Bt}T,$$

可知不变集 TE^u, TE^s 与 TE^c 在变换(1.2)下的原像 E^u, E^s 与 E^c 即为原系统(1.1)的不稳定集、稳定集、中心集.

定义 1.2 如果存在同胚 $h: R^n \to R^n$,使

$$h(e^{At}x) = e^{Lt}h(x),$$

其中 L 为 n 阶实矩阵,则称 n 维线性系统(1.1)与下述 n 维线性系统

$$\dot{z} = Lz, \quad z \in R^n \tag{1.6}$$

为拓扑共轭的.

可证(见[3]).

定理 1.1 设原点为(1.1)与(1.6)的双曲奇点,则(1.1)与(1.6)为拓扑共轭的当且仅当矩阵 A 与 L 有相同个数的具正实部的特征根.

例 1.1 考虑三维线性系统

$$\dot{x} = ax - y, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = -z, \tag{1.7}$$

易知其基本解矩阵为

$$\begin{pmatrix} e^{at}\cos t & -e^{at}\sin t & 0 \\ e^{at}\sin t & e^{at}\cos t & \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

设 $a>0$,则 E^u 为(x,y)坐标面,E^s 为 z 轴,(1.7)的相图如图 1.1 所示,图中箭头表示 t 增加时轨线上动点的运动方向.请读者画出当 $a<0$ 或 $a=0$ 时(1.7)的相图.

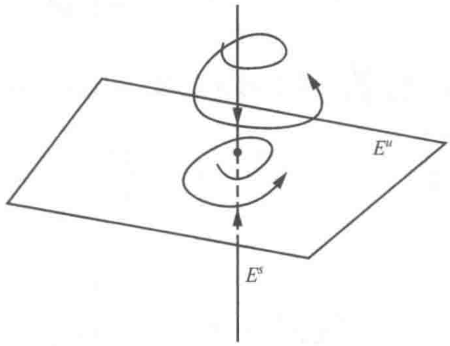

图 1.1 (1.7)的相图($a>0$)

1.2 周期线性系统

考虑非自治线性系统

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \tag{1.8}$$

其中 $A(t)$为 n 阶连续实矩阵,且存在 $T>0$ 使 $A(t+T)=A(t)$ 对一切 $t\in R$ 成立.称(1.8)为齐次周期线性系统.设 $X(t)$表示(1.8)的基本解矩阵,且满足 $X(0)=I_n$,此处 I_n 为 n 阶单位矩阵.利用解的存在惟一性知

$$X(t+T) = X(t)X(T).$$

引理 1.1 存在矩阵 B 与 S,且 S 为实的,使

$$X(T) = e^{BT}, \quad X^2(T) = e^{2ST}.$$

证明 不妨设 $X(T)$为 Jordan 标准型且只含一个 Jordan 块 C,即设

$$X(T) = C = \lambda I_n + R, R = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 λ 为复数,由 R 的形式知存在自然数 m,使对 $k>m$ 有 $R^k=0$.令

$$BT=(\ln\lambda)I_n+Q,\quad Q=-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j\lambda^j}(-R)^j,$$

则 $e^{BT}=\lambda e^Q=\lambda\sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{Q^k}{k!}$.由于对 $x\in R,|x|<1$,有

$$\ln(1+x)=\sum_{j\geqslant 1}(-1)^{j+1}\frac{x^j}{j}\equiv q(x),$$

因此

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{q^k(x)}{k!}=e^{q(x)}=1+x.$$

形式上利用上式,并注意到 $q\left(\frac{R}{\lambda}\right)=Q$ 且当 $k>m$ 时 $Q^k=0$, 可得

$$I_n+\frac{R}{\lambda}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{Q^k}{k!}=\sum_{k=0}^{m}\frac{Q^k}{k!},$$

故有 $e^{BT}=\lambda\left(I_n+\frac{R}{\lambda}\right)=C=X(T)$.

由 $e^{BT}=X(T)$,取共轭得 $e^{\bar{B}T}=X(T)$,于是 $e^{BT}\cdot e^{\bar{B}T}=e^{(B+\bar{B})T}=X^2(T)$,令 $S=\frac{1}{2}(B+\bar{B})$,则 S 为实矩阵.证毕.

引理 1.2(Floquet 定理) 存在非奇异的连续 T 周期矩阵 $P(t)$与 $2T$ 周期实矩阵 $R(t)$使

$$X(t)=P(t)e^{Bt},\quad X(t)=R(t)e^{St}.$$

此外,周期变换 $x=P(t)y,x=R(t)z$ 分别把(1.8)化为常系数系统 $y=By$ 与 $z=Sz$.

证明 令 $P(t)=X(t)e^{-Bt},R(t)=X(t)e^{-St}$,由引理 1.1 可知 P,R 满足所述性质.证毕.

矩阵 B 的特征值 λ 称为(1.8)的特征指数，而矩阵 $X(T)=e^{BT}$ 的特征值 $\mu=e^{\lambda T}$ 称为(1.8)的特征乘数．如果(1.8)的特征指数均具有非零实部，则称 $x=0$ 为(1.8)的双曲零解．

引理 1.3 周期系统(1.8)有 T 周期解($2T$ 周期解)当且仅当(1.8)以 $\mu=1(\mu=-1)$ 为特征乘数．

证明 首先证明存在整数 k 使 $\lambda+\frac{2k\pi}{T}i$(其中 $i=\sqrt{-1}$)为(1.8)的特征指数当且仅当(1.8)有形如 $e^{\lambda t}p(t)$ 的解，其中 $p(t)\neq 0$ 为 T 周期的向量函数．

事实上，若 $e^{\lambda t}p(t)$ 为(1.8)的解，则由引理 1.2 存在 $x_0\neq 0$ 使 $e^{\lambda t}p(t)=P(t)e^{Bt}x_0$，将 t 换为 $t+T$ 并由周期性易知

$$P(t)e^{Bt}[e^{BT}-e^{\lambda T}I_n]x_0=0,$$

故有 $\det(e^{BT}-e^{\lambda T}I_n)=0$，因此利用 B 的 Jordan 型易知必存在 B 的特征值 λ'，使 $e^{\lambda T}=e^{\lambda' T}$，从而存在整数 k，使 $\lambda+\frac{2k\pi}{T}i=\lambda'$ 为 B 的特征值．反之，设 $\lambda+\frac{2k\pi}{T}i$ 为 B 的特征值，仍利用 B 的 Jordan 型知存在 $x_0\neq 0$ 使 $e^{Bt}x_0=e^{\left(\lambda+\frac{2k\pi}{T}i\right)t}x_0$，故解 $e^{\lambda t}(e^{\frac{2k\pi i}{T}t}P(t)x_0)$ 具有所需要的形式．

现在注意到 $\mu=1(\mu=-1)$ 为(1.8)的特征乘数当且仅当(1.8)以 $\lambda=\frac{2k\pi}{T}i\left(\lambda=\frac{(2k+1)\pi}{T}i\right)$ 为特征指数，其中 k 为某整数．于是由前面所证结论知后者成立当且仅当(1.8)有形如 $p(t)$ 的 T 周期解($e^{\pi it/T}p(t)$ 的 $2T$ 周期解)．证毕．

引理 1.4 设 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为(1.8)的特征乘数，则

$$\mu_1\mu_2\cdots\mu_n=\exp\int_0^T \mathrm{tr}A(t)\mathrm{d}t.$$

证明 由行列式的求导法则可证 $\det X(t)$ 满足一阶微分方程 $\dot{u}=[\mathrm{tr}A(t)]u$，因此有(Liouville 公式)

$$\det X(t) = \exp\int_0^t \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s.$$

另一方面,$\mu_1\mu_2\cdots\mu_n = \det X(T)$.由此即得.证毕.

下面进一步考虑非齐次周期线性系统

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\quad x\in R^n, \tag{1.9}$$

其中 $A(t)$如前,$f(t)$为连续周期向量函数.同前,设 $X(t)$为(1.8)的基本解矩阵且 $X(0)=I_n$,则由常数变易公式,(1.9)的通解有下列形式:

$$x(t,x_0) = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{1.10}$$

令

$$P(x_0) = x(T,x_0) = X(T)\left[x_0 + \int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\right],$$

我们称由上式定义的映射 $P:R^n\to R^n$ 为(1.9)的 Poincaré 映射.由于(1.9)为周期系统,由解的存在惟一性定理知 $x(t,x_0)$为(1.9)的 T 周期解当且仅当x_0 为 P 的不动点,即 $P(x_0)=x_0$,换句话说,如果 x_0 满足

$$(X^{-1}(T) - I_n)x_0 = \int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s, \tag{1.11}$$

则 $x(t,x_0)$为(1.9)的 T 周期解,反之亦然.方程(1.11)关于 x_0 为代数线性方程,而且当且仅当 $X^{-1}(T)-I_n$ 为非奇异时它有惟一解

$$x_0^* = (X^{-1}(T) - I_n)^{-1}\int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s,$$

将上式代入(1.10)可得

$$x(t,x_0^*) = X(t)\Big[(X^{-1}(T) - I_n)^{-1}\int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\Big]\equiv(Kf)(t). \tag{1.12}$$

引入线性空间 P_T 如下：

$$P_T=\{f:R\to R^n\,|\,f\text{ 为连续的 }T\text{ 周期向量函数}\},$$

规定 P_T 中数乘为数与向量的乘法，加法为向量函数的加法，又定义范数 $|f|$ 如下：

$$|f|=\sup_{t\in R}\|f(t)\|\equiv\sup_{t\in R}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|f_j(t)|,$$

可证 P_T 为 Banach 空间，于是由(1.12)知，如果 $X^{-1}(T)-I_n$ 为可逆矩阵，则 $K:P_T\to P_T$ 为 P_T 上的线性算子. 进一步可证，K 为有界的，即存在与 f 无关的常数 $M>0$，使

$$|Kf|\leqslant M|f|. \tag{1.13}$$

事实上，对(1.9)作 Floquet 变换 $x=P(t)y$ 可得

$$\dot{y}=By+P^{-1}(t)f(t), \tag{1.14}$$

由(1.12)知，(1.14)的惟一 T 周期解可表示为

$$y^*(t)=e^{Bt}\Big[(e^{-BT}-I_n)^{-1}\int_0^T e^{-Bs}P^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t e^{-Bs}P^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\Big].$$

注意到 $e^{-BT}=X^{-1}(T)$，$e^{-Bs}P^{-1}(s)=X^{-1}(s)$，由上式知

$$y^*(t+T)=e^{BT}e^{Bt}\Big[(X^{-1}(T)-I_n)^{-1}\int_0^T X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^{t+T}X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\Big]$$

$$=e^{BT}\Big[y^*(t)+e^{Bt}\int_t^{t+T}X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\Big]$$

$$= e^{BT}\left[y^*(t) + e^{Bt}\int_0^T X^{-1}(s+t)f(s+t)\mathrm{d}s \right],$$

因为 $y^*(t+T) = y^*(t)$,故有

$$y^*(t) = (e^{-BT} - I_n)^{-1}\cdot e^{Bt}\int_0^T X^{-1}(s+t)f(s+t)\mathrm{d}s,$$

从而得到 Kf 的表达式:

$$(Kf)(t) = P(t)y^*(t) = X(t)(X^{-1}(T) - I_n)\cdot\int_0^T X^{-1}(s+t)f(s+t)\mathrm{d}s.$$

现取矩阵范数 $|\cdot|$ 与前面所取的向量范数相容,即对 n 阶矩阵 $Q(q_{ij})$,令

$$|Q| = \max_j \sum_{i=1}^n |q_{ij}|,$$

那么,若令

$$M = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^T |X(t)(X^{-1}(T) - I_n)^{-1}X^{-1}(s+t)|\mathrm{d}s,$$

则式(1.13)必成立.

可用类似方法来讨论含参数的线性系统:

$$\dot{x} = \varepsilon[Ax + f(t)], \quad x\in R^n, \tag{1.15}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为小参数,$f\in P_T$,A 为 n 阶常矩阵.我们断言,如果 A 可逆,则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及对 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 有定义的连续函数 $M(\varepsilon) > 0$,使对 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$(1.15)有惟一的 T 周期解 $K_\varepsilon f\in P_T$,且 $K_\varepsilon: P_T\to P_T$ 为线性有界算子,并满足

$$|K_\varepsilon f| \leqslant M(\varepsilon)|f|, \quad K_\varepsilon f = -\frac{1}{T}A^{-1}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t + O(\varepsilon). \tag{1.16}$$