地球物理基础丛书

张量分析与弹性力学

申文斌 张朝玉 编著

科学出版社

地球物理基础丛书

张量分析与弹性力学

申文斌　张朝玉　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为地球物理学及相关地学专业教材，主要内容包括张量分析部分与弹性力学部分. 张量分析部分主要讲述有关的数学基础，涉及拓扑空间、流形与微分流形、张量分析基础等章节；弹性力学部分以基本概念、基础理论、逻辑推演为主，主要涉及应变分析、应力分析、本构关系、边值问题、二维平面问题、三维空间问题、弹性波等章节，很少涉及工程结构问题.

本书可作为地球物理学、大地测量学及相关地学专业课程的教材或教学参考书，也可供相关领域的科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

张量分析与弹性力学/申文斌，张朝玉编著. —北京：科学出版社，2016.11

(地球物理基础丛书)

ISBN 978-7-03-050485-2

Ⅰ.①张… Ⅱ.①申… ②张… Ⅲ.①张量分析 ②弹性力学 Ⅳ.①O183 ②O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 265139 号

责任编辑：张颖兵 杨光华/责任校对：肖 婷

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2016 年 11 月第 一 版 印张：20 1/4

2016 年 11 月第一次印刷 字数：515 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“地球物理基础丛书”编委会

“地球物理基础丛书”序

地球物理学是地球科学领域最古老、最重要而又最充满活力的分支之一. 自两千多年前亚里士多德开始，就已经出现了地球物理学的萌芽. 在《物理学》中，亚里士多德阐述了很多与地球及其周围空间相关的自然现象，诸如风、雨、雷、电、火山、地震等自然现象. 这些现象与地球系统密切关联. 其解释又涉及物理学本身. 地球系统包括固态内核、液态外核、熔融地幔、黏弹地壳、固态冰川和液态海洋、地球液态固态体(简称地球本体)周围的大气层、电离层、月球以及所有绕地卫星；此外，地球系统与太阳、太阳系内的所有行星、卫星及星际物质密切关联. 因而，广义地，也可将后者纳入地球系统之中. 地球物理学，就其本意而言，是研究地球系统内各种物性参数、各种物理场、各种物质变化运移、各圈层相互作用及环境变化以及地球系统中发生的各种自然现象的物理学. 或者简单而不太严密地说，地球物理学，是利用物理学原理、方法、实验手段研究地球系统本身及其内发生的各种自然现象的学说. 随着科学技术的进步，地球物理学也在不断拓展其研究范围，现在已包含非常广泛的分支学科，如太阳系起源，行星学，地球形状学，地球自转学，地球重力学，地电学，地磁学，地热学，地球年代学，地壳形变学，地球动力学，地震学，地球内部物理学等.

由于地球物理学是研究地球的物理学，因此，随着物理学新进展或新发现的出现，其理论体系或方法论必将影响、渗透到地球物理学. 从亚里士多德的宇宙地心说和自由落体重者下落较快说到哥白尼的宇宙日心说和伽利略的自由落体等速说，从开普勒三大定律到牛顿万有引力定律，从法拉第电磁感应定律到麦克斯韦电磁场统一方程，从伽利略的温度计到开尔文的热力学系统，从牛顿的经典力学体系和绝对时空观到爱因斯坦的相对论理论和相对论时空观，从微观世界的连续性理论到不连续量子理论，从古老的简单机械计算到现代的大型计算机，无一不在影响和逐步推动着地球物理学的发展进程. 比如，没有牛顿的万有引力定律，就没有对天体运行规律的完美描述；没有爱因斯坦的广义相对论，就难以解释行星的近日点进动效应；没有热力学定律，地热学就难以发展. 当今地球物理学，仅凭理论推演、不付诸实践检验而构建模型的时代已几乎一去不复返了. 构建地球物理模型，解释各种自然现象，理论预测与实际观测比对，修改模型，进一步比对，不断循环往复，这是地球物理学的发展逻辑；不断拓展地球系统研究对象，包括利用物理学新理论新方法、新实验结果研究地球系统物性参数及各种自然现象，并向其他领域交叉渗透，这是当今地球物理学的发展趋势.

尽管历经两千多年的发展，但在地球物理学领域仍有很多悬而未决的重大科学难题，例如：太阳系起源，地磁场起源，内核的年龄，内核超速旋转速率，Chandler 晃动机理，十年尺度日长变化机理，厄尔尼诺现象的机理，地球膨胀/收缩机理，地震预报等. 奥秘无穷，探索无尽. 地球物理学没有终结，只有起点.

国内已有 30 多所大学开设了地球物理学本科专业，但尚缺乏系统性的循序渐进的适合于理科的地球物理专业教科书. 因此，我们认为有必要出版地球物理基础丛书. 该丛书面向地球物理专业、大地测量专业及相关专业，在内容选择方面，注重基础性和系统性，注重从第一性原理出发，强调理论的系统性、严密性和逻辑性；注重阐述基本概念、基本原理，在描述现象的基础上，诠释现象的本质；注重理论联系实践及启发式教学，注重培养学生的实际动手能力和科学研究能力. 这套丛书以偏重于理科的教科书为主，兼顾偏重于应用的教科书以及实践教程，可供地球物理专业、大地测量专业本科生学习，也可供研究生及相关教学和科研人员参考.

申文斌

2016 年 1 月 26 日于武昌

序

“张量分析与弹性力学”作为地球物理本科的专业基础课，其重在夯实学生的数学功底和力学基础、强化学生的逻辑推演能力和应用能力．张量分析是数学领域的一个重要分支，广泛应用于多个学科分支，包括弹性力学分支．

关于张量分析部分，本书没有直接从坐标转换的角度引入张量，而是从最原初的集合、映射、拓扑空间及流形等概念入手，引入局部坐标和微分结构，进而引入张量概念；强调主线发展逻辑体系，尽量力求自我包含．考虑到学生的数学基础，可以用文字表达清楚的命题，尽量避免纯数学推演．

目前，弹性力学已经发展出诸多科研、应用领域，成为一个庞大的体系，涵盖的内容极其丰富，本书弹性力学部分偏重于理论体系及逻辑推演，重点关注线性弹性问题，基本解法、弹性波及相关内容．对于涉及工程结构的特殊弹性力学内容，只有少量篇幅，如二维平面问题的多项式解法举例．

本书得到了国家自然科学基金（No. 41574007）、国家 973 计划（No. 2013CB733305）以及教育部云南丽江地球物理野外实践教育基地项目的资助．

由于编著者水平所限，错误与缺点在所难免．敬请各位师长、同行、同学及广大读者不吝批评、斧正，以期将来再版时进一步修改完善．

申文斌　张朝玉

2016 年 1 月于武汉大学

目　　录

第1章 绪　论

1.1 张　量

张量,作为一种数学工具,在自然科学(特别是物理学)中占有非常重要的地位,广泛应用于不同数学分支、物理学分支及其他相关领域.然而,它又不像微分、积分或线性代数这样的概念易于理解.真正能将张量应用自如不是一件易事.正是由于这一原因,对很多人来说,张量是一种望而生畏的东西.究其原因有两点:其一是没有下工夫学通;其二是很少应用.一种数学工具或概念若不经常加以应用,就会变得陌生,就会难以理解.科学的进程是一个循序渐进的过程.要很好地掌握一种数学工具或理解某种概念也需要循序渐进.

从集合、映射、向量空间、拓扑及拓扑空间、流形及微分流形等概念逐渐引出张量概念及张量运算,就会使理解变得简单.

集合,是某些具有相同特性或不同特性的不同的元素构成的集合体.两个集合可以相同,也可以不同.两个集合之间可以产生关联,这种关联通过映射实现.简单地说,映射是将集合 A 中的每个元素与集合 B 中的一个确定的元素对应起来.如果 A 的映射填满了 B,则称该映射是满射.如果将该映射逆反过来,B 的映射也填满了 A,则称该映射是双满射,简称双射,或一一对应映射.集合是非常宽泛的概念.假定集合 A 和 B 分别由 5 只猴和 5 匹马构成,它们之间存在双射.集合可以赋予各种各样的运算法则,使得该集合具有特殊含义,从低级向高级发展.

将一个集合中的任意两个元素赋予某种代数运算法则(如加法或乘法)而映射为该集合中的一个元素,则称该集合具有代数运算功能.如果这种代数运算满足某些特殊条件(满足结合律、存在左单位元和左逆元,详见 2.2 节),则可构成群.如果该运算法则是可交换的,则由此构成的群称为可交换群,或称 Abel 群.在 Abel 群的基础上可定义向量空间,该空间中的任意一个量,乘以标量(数乘)仍然处于该空间之中,该空间中的任意两个量相加仍然处于该空间之中.如果在向量空间中赋予了度量概念(类似于距离概念),则构成度量空间.如果该度量是通常的 Euclid 距离,则称为 Euclid 空间.

现在通过实例整理一下前面的概念.全体实数可构成集合,赋予普通加法运算,构成代数集合,同时也是 Abel 群(因为加法是可交换的);该 Abel 群满足结合律等条件,因而构成(一维)向量空间;在该向量空间中赋予 Euclid 距离(任意两点之间的距离等于该两点坐标之差的平方根),则构成(一维)Euclid 空间.

一个空间,如果赋予的结构(运算法则)太多,也会影响其应用.一个简单的例子是,从某种意义上来说,一个圆形面团与压扁的面团在本质上是完全等价的(假如你一口吃到肚子的话),也即从拓扑观点来看,二者完全相同.因此,抛开度量等结构,直接从集合出发,可引入拓扑概念.拓扑概念的发展,形成拓扑学.不太严密且形象地说,拓扑学就是研究一个对象在连续改变形状后还保持不变性的学科.关于拓扑及拓扑空间的定义,详见2.3节.

拓扑空间的结构还比较“粗糙”. 引入局部坐标系之后，就如同用显微镜来看局部，如此就引入了流形概念. 粗略地说，流形是局部类似于 Euclid 空间的拓扑空间. 在流形的基础上继续赋予微分或无穷阶微分（光滑）概念，就引出了微分流形或光滑流形概念. 流形/光滑流形实际上是在其任意局部可微分/无限微分的拓扑空间. 不过，在流形空间，尚未赋予距离（度量）概念. 比如，如果赋予 Euclid 距离，则构成 Euclid 流形；赋予 Riemman 度量，则构成 Riemman 流形.

两个流形可通过映射实现关联. 将一个流形通过映射与已知的空间（如 Euclid 空间）一一对应，可实现流形中元素的坐标（如 Descartes 坐标）表述. 一个光滑映射，必将一个光滑流形映射为另一个光滑流形.

在上述准备工作的基础上，可逐步引出张量概念（详见 3.5 节）. 张量是满足一定运算法则的量. 张量的一个独特性质是它在坐标系变换之下保持不变. 正是由于这一特性，利用张量方程描述自然现象，更容易揭示该现象的本质属性. 质点的速度沿某个方向的分量不是张量，它随着坐标系的变换而变化. 因此，用速度分量表述的方程随着坐标系的变化而变化，不易把握本质特征. 然而，用速度（它是一阶张量）表述的方程与坐标系的选择无关，容易看清质点运动的本质属性.

学习张量分析所付出的努力，会在将来的应用中得到加倍的回报. 一个简单的类比就是学习编程语言. 一般而言，在描述自然现象时，只要恰当，采用携带较丰富信息的量来描述，其描述过程就相对简单. 一个简单的例子是 Riemman 张量. Riemman 张量是满足一些特殊性质的张量，它所携带的信息量要比通常的张量所含的信息量更多. 借助 Riemman 张量，Einstein 构建了引力场方程，其表述形式类似于 Poisson 方程，其形式非常简单.

同理，利用张量表述构建弹性力学中的各种方程，不仅推导方便，而且表述形式相对简单. 这也是本书前几章逐步引出张量并较详细讨论张量的原因之一.

1.2　弹性力学的研究对象

固态物质是我们常见的物质形态之一. 作为整体研究时，固体的一种理想模型就是刚体. 无论受到何种力的作用，刚体中的任意两点之间都不产生相对位移，即刚体可以承受任何形式的力而不发生变形. 然而，自然界中并不存在绝对的刚体，任何物体在一定力的作用下都会发生变形. 弹性力学（又称弹性理论）是研究弹性固体在外界因素（如机械力、电磁力、温度变化等）作用下所产生的位移或变形、内部应力状态以及它们之间变化规律的一门学科（陆明万等，2001；杜庆华等，1986；钱伟长等，1956）.

所谓“弹性”，几乎是所有固体的一个基本的物理属性. 但作为一般固体在静力作用下所发生变形的力学现象往往很复杂，有弹性变形、塑性的永久变形和蠕变等；弹性理论仅限于研究固体在载荷不大、应变很小时的力学现象. 在这种情况下，塑性的永久变形和蠕变可以忽略，而把固体的变形看做完全弹性变形，把固体看做完全弹性体（简称弹性体）. 换言之，“完全弹性体”是对于实际弹性物体的一种抽象，使之成为一个近似于真实物体的理想“模型”，然后对其进行数学和力学处理，便于问题的解决. “完全弹性”的基本特征是：

在一定的温度条件下,弹性体的应变和应力之间存在一一对应的关系,其与产生的时间和所经历的历史无关;并且在除去外力后,弹性体能恢复原来的形状而不留任何变形的痕迹.

大量实验表明,像钢一类的固体材料,在其内部各点的应力不超过弹性极限时,则可看做理想的完全弹性体,其应力与应变之间呈线性关系;但也有一些材料,例如橡皮或者某些有色金属,却具有非线性的弹性性质.前者被称为物理线性的,后者被称为物理非线性的(吴家龙,2001).

弹性力学不仅是很多分支学科的基础,也是近代工程技术的实践应用基础之一.弹性力学与生产实际有密切的联系,它的基本理论是从生产实践和科学实验中概括总结出来的,并经过了大量实践检验.在机械制造中,弹性力学理论广泛应用于机器部件在各种工作条件下的强度和刚度的研究;在水利工程和建筑工程中,工程技术人员往往直接利用弹性力学方法作为设计的理论基础;在地球物理领域,弹性波理论及其在地球内部介质中的传播理论是地震研究和地震勘探的重要的理论基础.新兴学科的发展,也推动了弹性力学的不断发展和充实,例如,航空工业的不断发展,弹性力学面对新的任务,并由此形成了新的分支——空气弹性力学.今天,塑性理论、黏弹性与黏塑性理论、连续介质力学、宏观与微观力学、复合材料力学等一系列重要的新兴力学分支都是在弹性理论的基础上陆续发展起来的.

由于弹性理论基本方程的复杂性,各种工程结构的求解问题在数学上多为偏微分方程或方程组的定解问题,所以人们早就寻找各种近似的计算方法,以克服这些数学上的困难.20世纪初的基于能量原理的直接解法,开创了求解弹性力学问题的新途径;以后随着计算机的发展与普及,弹性力学(包括其他的固体力学分支)的各种数值方法和半解析数值方法如雨后春笋般地涌现出来,具有代表性的主要有:以弹性力学基本方程为控制方程的差分法,以弹性力学的变分原理为控制方程的有限单元法和以弹性力学边界积分方程为控制方程的边界元法.其中,有限单元法因为其灵活性和通用性,备受工程界的欢迎,它的发展是弹性力学用于解决工程问题的重大突破(吴家龙,2001;陆明万等,2001;王俊奎等,1990).

1.3　弹性力学的基本假设

在弹性力学中,为了通过已知量(如物体的几何形状和大小、物体所受外部载荷或几何约束)求出位移、应变和应力等未知量,必须建立这些已知量与未知量之间的关系,以及各个未知量之间的关系,从而导出一套求解的方程.在导出方程时,可以从三个方面进行分析:一是几何学方面,由此建立位移、形变和边界位移之间的关系;二是静力学方面,由此建立应力和外力(如体力、面力)之间的关系;三是物理学方面,建立形变与应力之间的关系(徐芝纶,2006).在求解复杂的实际问题时,通常将实际问题加以简化和概括,突出问题的主要因素,按照研究对象的性质和求解问题的范围,预先提出一些基本假定,从而略去若干次要的或暂不考虑的因素,使实际问题表达成数学方程并使求解成为可能.在弹性力学的基本问题求解中,通常采用如下的基本假定(吴家龙,2001;陆明万等,1990).