

初等 几何研究

中南六省（区）师专
《初等几何研究》教材编写组

广东高等教育出版社

高等师范专科学校专用教材

初等几何研究

中南六省（区）师专《中学数学教材教法与初等数学研究》教材编写组

广东高等教育出版社

高等师范专科学校专用教材

初等几何研究

中南六省(区)师专《中学数学教材教法与初等数学研究》教材编写组

*

广东高等教育出版社出版发行

广东肇庆康培印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开9.5印张 194千字

1989年2月第1版 1989年2月第1次印刷

印数: 10550册

ISBN7—5361—0257—7/O·17

定价: 1.95元

主编

邓祖恕、吴汉明、方欣华、梁永固、杜忠信

编委

欧邦杰、王林、罗海棠、傅世球、朱裕彪、
杨德平、曾峥

江苏教育出版社

前 言

教材建设是学校三大基本建设之一。长期以来，高等师范专科教育没有一套具有自己特点、较为系统的教材，影响了教育质量的提高。为了深化高等师范专科教育的改革，为普及九年制义务教育培养更多的合格教师，中南六省（区）教委（高教局）高教（教学）处，共同组织六省（区）师专及部分有关高校的教师，协作编写了师专12个专业85门主干课程的通用教材。

编写这套教材的指导思想是，从高等师范专科教育人才培养的目标出发，根据国家教委新制定的二年制师专教学计划、教学大纲的要求，兼顾三年制和双科制专业的需要，力求突出适用性、科学性及高等师范专科教育的特点。因此，这套教材不仅适用于普通高等师范专科教育，而且也适用于教育学院和电大普通师范教育相关专业的教学，同时，还可作在职初中教师的培训和自修教材。

《中等数学教材教法与初等数学研究》全书共分三册：《中学数学教材教法》、《初等代数研究》、《初等几何研究》，本书是其中的一个分册。全书的主编单位是广东肇庆师专、副主编单位是广西右江民族师专、河南郑州教育学院、湖南邵阳师专、湖北襄阳师专。本册共七章，其中绪论和第一、三章由广西右江民族师专邓祖恕同志编写，第二、七章由广西柳州师专欧邦杰同志编写，第四、五章由广东肇庆师专吴汉明、海南通什师专王林同志编写，第六章由吴汉明

同志编写。全书完稿后，由邓祖恕和吴汉明同志统稿、定稿。

本书在编写过程中，得到了肇庆师专、海南师专、怀化师专、珠海市教委的大力支持，特对这些单位致以衷心的感谢。

广东省高等教育局、广东高等教育出版社自始至终关心、指导了本书的编写和出版工作，没有他们的关心和支持，本书是不可能与广大读者见面的。

这套教材是在中南六省（区）教委（高教局）的直接领导下编写的，它是按主编负责，分工编写的原则成书的。由于这样大规模有组织地进行教材编写在我们还是第一次，因而错误缺点在所难免，恳请读者批评指正。

中南六省（区）师专协作教材编委会

一九八八年八月九日

目 录

绪论	1
第一章 几何证明	6
§ 1.1 证明的概述	6
一、证明的含义和结构	6
二、证明的规则	7
§ 1.2 几何证明的一般方法和几何证题的步骤	11
一、直接证法与间接证法	11
二、综合法与分析法	17
三、几何证题的步骤	25
§ 1.3 几何证明的基本思路	25
一、引用适当的定理	26
二、转换证题结论	34
三、变换图形的位置	51
四、数形结合, 利用计算	56
§ 1.4 一题多证举例	78
习题一	83
第二章 几何计算	90
§ 2.1 线段和角的度量	90
一、线段和角的度量的概念	90
二、勾股定理的推广、斯特瓦尔特定理及其应用	96
三、解三角形	101

§ 2.2	圆周率、圆周长、弧长及其计算	103
§ 2.3	面积	108
	一、面积的概念、矩形面积公式的证明	108
	二、圆面积的概念、圆面积公式的证明	113
	习题二	118
第三章	初等变换	122
§ 3.1	合同变换	122
	一、合同变换	122
	二、变换群	124
	三、反射	126
	四、平移	127
	五、旋转	130
§ 3.2	利用合同变换证题	135
§ 3.3	位似变换与相似变换	141
	一、位似变换	141
	二、相似变换	150
§ 3.4	利用相似变换证题	153
	习题三	157
第四章	轨迹	160
§ 4.1	轨迹的基本知识	160
	一、轨迹的概念	160
	二、轨迹的基本属性	160
	三、轨迹的证明	162
	四、轨迹命题的类型	163
	五、基本轨迹命题	164

§ 4.2	轨迹命题解法之一	165
§ 4.3	轨迹的探求	168
	一、探求轨迹位置、大小的方法	168
	二、探求轨迹形状的方法	169
§ 4.4	轨迹命题解法之二	171
	一、第二类型轨迹命题的解法	171
	二、第三类型轨迹命题的解法	173
	习题四	176

第五章 作图178

§ 5.1	作图的基本知识	178
	一、作图题的条件	178
	二、作图工具与作图公法	180
	三、作图成法	181
	四、解作图题的步骤	183
§ 5.2	常用的作图方法	184
	一、轨迹交点法	184
	二、三角形奠基法	187
	三、变位法	189
	四、位似法	192
	五、代数分析法	193
* § 5.3	尺规作图不可能问题简介	194
	一、尺规作图的可能与不可能	194
	二、三大尺规作图不能问题	197
	习题五	200

第六章 初中几何教法探讨	202
§ 6.1 平面几何入门阶段的教学	202
一、内容概述	202
二、教法探讨	203
§ 6.2 直线形的教学	209
一、内容概述	209
二、教法探讨	211
§ 6.3 相似形的教学	218
一、内容概述	218
二、教法探讨	218
§ 6.4 圆的教学	223
一、内容概述	223
二、教法探讨	224
第七章 立体图形的一些性质	230
§ 7.1 直线与平面的各种相关位置	230
一、平面的基本性质	230
二、空间两直线的相关位置	233
三、直线与平面的相关位置	235
四、平面与平面的相关位置	239
§ 7.2 空间作图	248
一、空间作图公法	248
二、简单作图题	249
三、截面作图法	254
§ 7.3 三面角及多面角	257

一、三面角及其性质	257
二、多面角及其性质	264
§7.4 四面体及多面体	266
一、四面体及其性质	266
二、凸多面体的欧拉定理	269
三、正多面体	272
§7.5 体积的计算	273
一、体积的概念	273
二、长方体体积公式的证明	274
三、拟柱体的体积公式	279
习题七	285
参考书目	288

绪 论

一、初等几何研究的对象和教学目的

1. 初等几何研究的对象

恩格斯在《反杜林论》中对数学研究的对象精辟地指出“…纯数学研究的对象是现实世界的空间形式和数量关系”，而现实世界的空间形式便是属于几何学研究的对象。

所谓空间形式，是指物体的形状、大小和相互间的位置关系。对于一个物体，当只研究它的形状、大小而不考虑其他性质的时候，我们便从物体抽象得到**几何体**的概念，几何体简称为**体**。

体是由面围成的，面有平的、有曲的。例如长方体是由六个平的面围成的，圆柱体是由两个平的面和一个曲的面围成的。面和面相交于线，线有直线、曲线之分。线和线相交于点。

点、线、面、体或由点、线、面组成的集合叫做**几何图形**，点、线、面叫做**几何图形的元素**。因此，我们也可以说几何学是研究几何图形性质的科学，即研究几何图形的形状、大小和相互位置关系的科学。

初等几何分为平面几何与立体几何两大部分。平面几何研究由点和线集合而成的平面图形的性质，其主要内容有：基本概念、相交线、平行线、三角形、四边形、相似形和圆等基础知识；立体几何研究由点、线、面三个元素集合而成的空间图形的性质，其主要内容有：直线与平面的相互位置关系及其主要性质和柱、锥、台、球等概念及其性质。

2. 中学几何的教学目的

中学几何的教学是分别在初中和高中阶段进行的，初中阶段学习平面几何，高中阶段学习立体几何。中学几何的教学要根据国家教委所制订的《中学数学教学大纲》的要求进行。

《大纲》规定：“中学数学的教学目的是：使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识和基本技能，培养学生的运算能力，逻辑思维能力和空间想象能力，以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力。要培养学生对数学的兴趣、激励学生为实现四个现代化学好数学的积极性，培养学生的科学态度和辩证唯物主义的观点。”为了达到上述目的，《大纲》又指出：“中学数学要选择参加现代化建设和学习现代科学技术所必需的并为学生所能接受的数学基础知识作为教学内容。教学内容的安排和阐述要符合唯物辩证法，要理论联系实际，要符合学生年龄特征，有利于学生掌握基础知识、基本技能和发展能力，要有利于发挥教师的主导作用和调动学生的主动性与积极性。”

根据《大纲》这一精神，联系初等几何这门学科的特点，我们认为中学初等几何课的教学目的，可以概括成三个方面：

- (1) 使学生切实掌握初等几何的基础知识及其应用；
- (2) 培养与发展学生的逻辑思维能力和空间想象能力，提高学生的运算能力和作图能力；
- (3) 通过几何内容的教学，向学生进行思想政治教育，培养他们的辩证唯物观点。

二、中学几何的逻辑结构特征

传统的几何教材基本上是按照两千多年前欧几里得《几何原本》的体系编写的，长期教学实践证明，采用欧几里得体系学习几何，是培养学生的逻辑思维能力和空间想象能力行之有效的方法。但是，采用欧几里得体系学习几何也有不少缺点，主要缺点是：内容烦琐，占用教学时数过多，不利于在中学增加为实现四个现代化所需要的新的数学内容；比较难学，特别是开头部分比较难学；公理不足，推证命题不严格，常靠直观、经验。

随着科学技术和数学本身的飞速发展，从五十年代末以来，世界各国先后掀起了带有国际性的，大规模的数学教育改革运动。这个运动有两个显著特点：一是更新数学内容（如中小学数学现代化）；一是改革教学原则和教学方法。改革的基本思想是把发展智力，培养能力放到特别重要的位置上，强调与数学知识结构化相适应的教学方法。但从各国提出的种种方案来看，其中分歧最大并且至今还很难看出具体的趋势的当推几何。存在着“中学只要实验几何”及“没有欧氏几何卫星上不了天”的两个极端；存在着“把几何代数化”和“加强欧氏公理体系的综合几何”的两种倾向。

我国中学几何教材改革在近二十年间也走了一段不平凡的路程，经历了几起几落的反复。总结以往的经验教训，比较多的人同意以下的看法：认为学习欧几里得体系几何，从一些定义、公理出发，用演绎法进行推理论证，有利于培养学生的逻辑思维的能力和习惯；又由于欧几里得几何具有鲜明的几何直观，也有利于培养学生的空间想象能力，因此主张保

留欧几里得体系几何，但主张不要严格的公理体系；主张对传统的几何内容给予足够的重视；不主张在深度和广度上作过高的要求；不主张陡然增加几何作业的数量和难度等等。基于这个原因，中学平面几何很多概念的描述是采用直观的几何形象。如“一旁”、“之间”、“位置相同”、“位置交错”等。课本所列公理既不完善也不独立。如顺序公理、连续公理等都没有列入课文，又如把平行线第一个性质定理、平行线第一个判定定理；三角形全等三个判定定理作为公理。这样处理的原则是保证公理的和谐性，而不要求公理的独立性和完备性。综合起来，中学几何在内容和逻辑结构上有以下的特点：

1、由具体事物的抽象化得到几何基本元素的直观观念，并用公理的形式描述这些基本概念的基本性质。在这个基础上，以后的概念则用定义的形式去完成。

2、借助于实验、作图从直观中去获得几何图形的基本性质，采取扩大公理的个数（即扩大推理的基础）的办法，以减少初学推理论证的困难。在积累了若干几何事实以后，再以逻辑的形式建立几何证明。

3、教材在确定了原始概念及公理以后，所有进一步的内容一般都是采用演绎法推导出来。就是说，在论证问题时，能用课本范围内的公理作出最后说明的，就不轻易委于直觉，认为显然的东西，一般也只限于课本范围内的公理体系不能说明的简单内容。

如作已知线段 AB 的垂直平分线。

中学平面几何课本是这样进行的：

①分别以 A 、 B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的相等的长为半

径作两条弧相交于 C 和 D ;

②作直线 CD 。直线 CD 就是线段 AB 的垂直平分线。

这种说法，“课本”认为是可以不加任何解释的“直观”和“显然”。因为两条弧是否一定相交？这个问题是无法由中学几何的公理来获得最后解释的。

三、《初等几何研究》的主要内容和目的

《初等几何研究》是师范专科学校数学专业的重要专业课《初等数学研究与教学法》中的一部分。本教材是根据1987年国家教委制订的《初等数学研究与教学法》大纲的基本要求编写的，供师专数学专业使用。它从中学几何课（重点是初中平面几何）的教学需要出发，立足于中学教材，把中学几何课中的一些基本问题，分别组成七个专题，即（1）几何证明，（2）几何计算，（3）初等变换，（4）轨迹，（5）几何作图，（6）初中几何教法探讨，（7）立体图形的一些性质。在内容上都作了适当的延伸和充实，在理论、观点和方法上予以提高。它既包括了中学几何的全部内容，又不是中学几何的简单重复。通过研究，使学生掌握中学几何课（主要是初中平面几何课）教学所必须的初等几何的基础知识和基本技能，做到能够居高临下地驾驭中学几何教材，为将来能够胜任中学几何课的教学工作创造条件。

第一章 几何证明

§ 1.1 证明的概述

一. 证明的含义和结构

1. 证明的含义

从逻辑学的角度来说,所谓“证明”,指的是:以已知的正确判断为根据,经过逻辑推理,推出新的判断的正确性,这种思维过程,叫做证明。在数学里说得更具体一点,那就是:使用所给定的(已知)条件、公理、定义以及已证的定理,根据推理格式,导出新的结论,就叫做证明。

逻辑证明,对于认识客观真理和探索真理,都起到重要的作用。

2. 证明的结构

从逻辑结构方面来分析,任何证明都由论题、论据、论证三个部分组成。

(1) 论题是指真实性需要加以证实的判断,它指明了前提和结论。前提写在已知部分,结论写在求证部分;也就是说“已知”和“求证”合称论题。论题应该是正确的,这样才可能给予证明。不过,除了极其明显的错误命题以外,命题在未证明之前往往不知道它是否正确。有时通过寻找证明,才发现了求证的命题是错误的,这样,得出的不是证明,而是反证明,于是求证的命题被否定。这样的思维过程就是反驳。