



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

GALOIS THEOREM AND GROUP THEORY

Galois 定理与群论

勒贝尔 佩捷 刘立娟 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

GALOIS THEOREM AND GROUP THEORY

Galois 定理与群论

勒贝爾 佩捷 刘立娟 编译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

在数学和抽象代数中,群论研究名为群的代数结构,群在抽象代数中具有基本的重要地位.本书从一个方程能用根式求解所必须满足的本质条件开始研究,讲述了伽罗华定理与群论知识.全书分为:普及篇、基础篇及提高篇三部分,详细叙述了群论这门数学学科的发展及众多数学家在群论方向的研究成果.

本书适合于数学专业的本科生和研究生以及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

Galois 定理与群论/勒贝尔,佩捷,刘立娟编译.——哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.6

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-5807-9

I. ①G… II. ①勒…②佩…③刘… III. ①群论—研究 IV ①O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 006051 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 刘春雷

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 牡丹江邮电印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 36.25 字数 426 千字

版 次 2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5807-9

定 价 128.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种社会、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“谁言女子非英雄,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

普及篇

◎

目

录

- 第1章 伽罗华小传 // 3
- 第2章 群的重要 // 17
- 第3章 群是什么 // 22
- 第4章 群的重要性质 // 29
- 第5章 一个方程式的群 // 34
- 第6章 伽罗华的鉴定 // 42
- 第7章 用直尺与圆规的作图 // 46
- 第8章 伽罗华的鉴定为什么
是对的 // 52

基础篇

第 9 章	群的引言	// 61
第 10 章	群的公理	// 69
第 11 章	群的例子	// 76
第 12 章	群的乘法表	// 89
第 13 章	群的生成元	// 107
第 14 章	群的图像	// 111
第 15 章	按生成元和关系定义群	// 126
第 16 章	子群	// 150
第 17 章	映射	// 162
第 18 章	置换群	// 182
第 19 章	正规子群	// 196
第 20 章	四元数群	// 215
第 21 章	对称群与交代群	// 220
第 22 章	道路群	// 230
第 23 章	群与糊墙纸设计	// 243
第 24 章	60 阶交代群 A_5	// 251
第 25 章	彭罗斯瓷砖	// 255

提高篇

- 第 26 章 有限群的基础知识 // 273
- 第 27 章 西洛定理 // 281
- 第 28 章 可解群与幂零群 // 292
- 第 29 章 上同调与扩张 // 313
- 第 30 章 可解群与霍尔子群 // 332
- 第 31 章 弗罗贝尼乌斯群 // 341
- 第 32 章 转移 // 354
- 第 33 章 特征标理论 // 370
- 第 34 章 21 世纪的读者阅读伽罗华 // 391
- 第 35 章 有限群的表示一百年 // 411
- 第 36 章 从弗罗贝尼乌斯到布劳尔的有限群表示
论 // 444
- 第 37 章 拯救宇宙中最宏伟的定理 // 468
- 第 38 章 克莱因的《埃尔朗根纲领》 // 480
- 第 39 章 可计算域和伽罗华理论 // 494
- 第 40 章 微分代数初探 // 519
- 要义 // 546
- 编辑手记 // 549

普及篇

伽罗华小传^①第
1
章

这本书里所讲的是群论(Theory of Groups),群论是近代数学的一种.伽罗华(Évariste Galois,1811—1832)对于这门数学的理论和应用发扬很多.伽罗华殁于1832年,死的时候还不满二十一岁.在他那短促而悲惨的生命中,对群论有颇多贡献;而这门数学分支在今日已成为数学中的重要部分了.自古以来的二十五位大数学家中,他就是其中的一位^②.

伽罗华,1811年10月25日生于法国巴黎附近的Bourg-la-Reine,1832年5月31日卒于巴黎.

① 倪焯群译自 Dictionary of Scientific Biography. Vol. V, 259-264.

② G. A. Miller in Science, Jan., 22, 1932.

迄今,几乎没有一位数学家有伽罗华那种动人的个性.他在一次神秘的决斗中受伤身亡,终年仅 20 岁零 7 个月.他留下一批不到 100 页的著作(绝大部分在死后发表),在 19 世纪下半叶,人们才认识这些惊人的、富有成果的论文.伽罗华,这位早聪非凡、造诣出众的天才,可不是一位深居简出的学者,他有着极其不幸的一生.他身处逆境,学术界对他的工作的不理解和轻视,促使他投入革命.与绝大多数同代人相比,这位富有战斗精神的共和主义者,只是一个政治鼓动者.事实上,他继续了阿贝尔(Abel)的研究,用群论明确地解决了代数方程的可解性问题(这个问题从 18 世纪以来,一直吸引着数学家们的注意),从而为近世代数奠定了一个基础.从他留下的其他一些著作的手稿中可看到,他致力研究的椭圆函数理论和阿贝尔的整数理论,以及对数学的哲学和方法论的见解显露出对现代数学的先见.

伽罗华的父亲 N. G. 伽罗华,是个厚道、聪敏的自由主义思想家.他主管一所容纳约六十位寄宿生的学校.在“百日革命”时,他被推选为 Bourg-la-Reine 的市长.在二次复辟期间,他依然担任此职.伽罗华的母亲 Adelaide-Marie Demante 出身于法律学家的家庭,受过更为正统的教育.她有着倔强的个性,偏执甚至有些古怪.她承担了儿子的启蒙教育,她试图按照经典文化的要素反复地向伽罗华灌输宗教和崇尚于斯多葛道德的原则.伽罗华受了父亲的想象力和自由主义以及母亲的那种反复无常的严厉的怪僻脾气的影响,也受到他长姐 Nathalie-Théodore 的影响,他似乎有着一个幸

福又勤奋好学的青少年时代.

伽罗华 1823 年 10 月去巴黎的 Loais-Ie-Grand 学院继续求学,那时他是个四年级寄宿生.他感到复辟期间校方在当局和教会指使下所制定的苛刻校规实在难以忍受.虽然他是个杰出的学生,但他仍然表示了异议.1827 年的头几个月,他参加了由 H. J. Vernier 开讲的一年制数学预科课程.这一初次与数学的接触对他是一个启示,但他很快对讲课内容的初等以及教科书中的某些不当之处感到厌倦,于是不久便转为直接阅读原始的论文.他弄懂了勒让德 (Legendre)《几何》(*Géométrie*)一书的严密性,并通过学习拉格朗日 (Lagrange) 的主要著作为自己打下了一个扎实的基础.此后两年,他参加了 Vernier 开讲的二年制数学预科课程,后来又参加了 L. P. E. Richard 的更为高级的课程, Richard 最早认识到伽罗华在数学上是个无可怀疑的出类拔萃的人物.伽罗华虽然花在课业上的时间远少于自己从事研究所花的时间,但是在跟这位聪明的老师学习时,他仍然是一个出色的学生.1828 年,他开始着手学习关于方程理论、整数理论和椭圆函数理论的一些最新的著作.他最早的工作,于 1829 年 3 月发表在 Gergome 主办的《纯粹与应用数学年刊》(*Annales de Mathématiques pures et appliquées*)上,那篇论文更为清楚地论述和说明了拉格朗日关于连分式的结果,显示了一定的技巧,但并未显示出特别的才能.

据伽罗华自己说,他在 1828 年犯了和阿贝尔在八年前犯的同样错误,以为他已经解出一般的五次方程.