

期权的价格信息与熵定价方法

余喜生 著

Price-implied Information and
Entropy Pricing Method of Option



西南财经大学出版社

中国·成都

国家自然科学基金项目 (71301132)

中央高校基本科研业务费专项资金项目 (JBK150803;JBK160127)

期权的价格信息与熵定价方法

余喜生 著

Price-implied Information and
Entropy Pricing Method of Option



西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

期权的价格信息与熵定价方法/余喜生著. —成都:西南财经大学出版社,2016.4

ISBN 978-7-5504-2238-4

I. ①期… II. ①余… III. ①期权定价—研究 IV. ①F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 291571 号

期权的价格信息与熵定价方法

QIQUAN DE JIAGE XINXI YU SHANG DINGJIA FANGFA

余喜生 著

策划编辑:何春梅

责任编辑:何春梅

助理编辑:白宇

封面设计:张姗姗

责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网 址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电 话	028-87353785 87352368
照 排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印 刷	四川五洲彩印有限责任公司
成品尺寸	170mm × 240mm
印 张	10.75
字 数	185 千字
版 次	2016 年 4 月第 1 版
印 次	2016 年 4 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5504-2238-4
定 价	58.00 元

1. 版权所有,翻印必究。
2. 如有印刷、装订等差错,可向本社营销部调换。

2010年4月16日,我国沪深300股指期货合约正式上市交易;随着2014“期权元年”有关期权业务工作的就绪,我国第一支期权(上证50ETF)也于2015年2月9日在上海证券交易所正式上市交易。这意味着我国衍生证券市场体系得以进一步的延伸和完善,其他的各类衍生产品,势必也会在适当的时机进入市场。为了更好地发挥衍生证券在金融市场中的各种作用,尤其在我国当前衍生产品市场发展的新阶段,研究如何结合实际市场,对包括期权在内的衍生证券进行理性定价就显得尤为重要。

现代期权定价理论提供的是基于风险中性测度的无套利价格,其对应的定价方法往往都要对标的资产价格过程、市场完备性甚至市场参与者进行模型或其他方面的假定,而这些假设通常都与实际市场的表现不相符。同时,诸多研究表明,期权市场本身富含许多对定价有效的信息,这些信息可以准确反映市场的各种预期——包括标的资产收益的预期分布,从而能够捕捉到与实际市场相符的风险中性分布的“形状”,比如能够准确考虑波动率微笑(volatility smile)和尾部行为(tail behavior)等。因此,为了定价的结果更为理性、切合真实市场的表现,定价过程中不能过度地依赖模型和一些假设,而应从现实金融市场中充分获取对定价有用的信息。然而,目前诸多非参数定价方法又往往只从标的资产市场获取相关信息,忽略或没能考虑到如何充分获取期权市场所蕴含的有效信息,进而为期权给出更合理的定价。

鉴于以上所述,本书立足实际金融市场,研究并提出了一种基于信息熵的非参数期权定价方法:从期权的市场价格提取有效信息,借鉴信息熵原理建立期权的非模型依赖(model-free)定价方法,使得定价结果更加符合真实市场的表现,并对定价系统进行软件化。以期改进已有定价理论中由诸如非完备市场(或由其他与实际市场不符的)假定带来的定价结果不唯一(或不准确)的不足,更好地架构起现实市场与定价理论之间的桥梁;为衍生证券的理性定

价提供新的研究思路；为投资者和交易员提供反映真实市场信息的定价工具；使之有益于我国金融衍生品市场的理性发展。

本研究成果主要创新点体现在以下三个方面：

1. 从期权市场提取有效信息

除标的证券市场外，期权市场也蕴含着诸多对定价有效的信息。本研究选择“标的资产对数收益的风险中性矩”作为待提取的有效信息，使用随机数学理论，建立起“从有限的期权市场价格中获取这些风险中心矩”的方法。这些矩能够准确地反映真实标的资产市场的各种预期，尤其是标的资产的收益分布特征。

2. 唯一理性定价测度的确立

将以上提取到的富含信息的风险中性矩，作为约束条件嵌入到最大熵框架，构建起能够给出唯一理性定价测度的框架，进而可以为期权给出符合实际市场表现的理性定价。这一定价测度与所提取的市场有效信息相吻合，且是风险中性的、唯一的，从而有望突破以往不完备市场中等价鞅测度不唯一的难题。

3. 该研究提出的定价方法，可以为多类衍生品定价，包括欧式、美式和其他路径依赖衍生品等，并已产生定价软件包；本研究的部分成果已经投入实际应用（衍生品交易策略），并取得一定的应用价值和经济效益。

目 录

第一章 绪论 / 1

第一节 本书写作背景与研究现状 / 1

一、背景与意义 / 1

二、国内外研究现状与已有研究成果 / 2

第二节 原创成果与创新贡献概要 / 3

第三节 读者对象 / 5

第四节 基础要求、学习目标与文献引用说明 / 5

一、基础要求 / 5

二、学习目标 / 6

三、文献引用说明 / 6

第二章 文献综述与本书篇章结构 / 7

第一节 文献回顾——研究现状与发展动态分析 / 7

一、关于“期权价格信息、风险中性矩估计”的文献回顾 / 8

二、关于“基于熵的定价方法”的文献回顾 / 11

三、关于“最小二乘蒙特卡罗方法”的文献回顾 / 13

第二节 篇章结构 / 14

第三章 预备知识 / 17

第一节 金融衍生品定价基本概念与定理 / 17

一、期权及其他基本概念 / 17

二、套利机会 /	22
三、资产定价基本定理 /	22
第二节 Bachelier 理论和 Brownian 运动 /	23
一、Bachelier 理论 /	23
二、Brownian 运动 /	24
第三节 熵 /	25
一、熵的概念 /	25
二、自信息 /	26
第四节 数学预备 /	27
一、随机微积分 /	27
二、特征函数 /	29
三、等价鞅测度, 风险中性定价测度和熵定价测度 /	30
四、熵定价测度的唯一性 /	31
五、Black-Scholes 偏微分方程与边界条件 /	33
第四章 基准定价方法 /	35
第一节 导言 /	35
第二节 Black-Scholes 期权定价公式 /	36
一、B-S 公式 (Black-Scholes 公式) /	36
二、带红利 B-S 公式 /	38
第三节 临界条件、美式期权 PDE 及线性互补问题 /	39
第四节 Crank-Nicolson 有限差分方法 /	42
第五节 最小二乘蒙特卡罗方法 (Longstaff-Schwartz) /	45
第六节 AC08 和 CLM 方法 /	47
第七节 AA10 和 VCLM 方法 /	51
第八节 本章小结 /	51

第五章 风险中性矩 (RNM) 的 Model-Free 提取方法 / 53

第一节 引言 / 53

第二节 从期权价格提取风险中性矩 / 54

一、欧式期权的风险中性矩公式 / 54

二、美式期权的风险中性矩公式 / 56

第三节 风险中性矩的实现 / 60

一、期权价格的曲线拟合方法: Black-Scholes 映射法 / 60

二、积分数值计算: 梯形法则 (Trapezoidal Rule) / 61

第四节 本章小结 / 66

第六章 基于熵方法的风险中性分布估计 / 67

第一节 引言 / 67

第二节 “Shannon 熵”的解释 / 68

第三节 带风险中性矩约束的 (相对) 熵 / 70

一、带风险中性矩约束的熵定价模型 / 70

二、风险中性定价测度: 存在性与唯一性 / 72

三、为什么选择前四个矩作为约束 / 74

第四节 风险中性概率分布估计 / 76

一、风险中性概率分布估计公式 / 76

二、风险中性概率分布的数值求解 / 77

第五节 本章小结 / 77

第七章 带矩约束的最小二乘蒙特卡罗熵方法 (RME) 的实现 / 79

第一节 引言 / 79

第二节 最大熵定价与 Black-Scholes 期权定价 / 80

第三节 带矩约束的最小二乘蒙特卡罗定价 (RME Valuation) / 82

一、欧式期权定价 / 82

二、美式期权定价 / 83

第四节 本章小结 / 85

第八章 RME 方法基于模拟市场同其他方法的比较 / 86

第一节 引言 / 86

第二节 基于模拟市场环境下对 RME 方法的检验 / 86

一、初始设置 / 87

二、收益样本与期权样本数据 / 88

三、风险中性矩与风险中性概率分布的实现及比较 / 88

四、风险中性定价测度的进一步解释 / 93

五、样本路径生成与最优执行决策 / 94

第三节 定价结果分析及同其他基准方法比较 / 96

一、第一个实验：定价结果分析与比较 / 96

二、第二个实验：定价结果分析与比较 / 105

第四节 本章小结 / 109

第九章 RME 定价方法进一步的实证研究

——基于 IBM 股票期权 / 111

第一节 引言 / 111

第二节 数据描述与归类 / 112

第三节 红利与无风险利率的处理 / 114

一、红利的处理 / 114

二、无风险利率的处理 / 115

第四节 期权市场价格信息, RME 定价及基准定价方法 / 115

一、期权价格数据与风险中性矩 / 115

二、收益时间序列、风险中性概率分布与风险中性样本路径 / 117

三、定价方法 / 119

第五节 定价结果分析 / 121

一、结果分类与误差度量 / 121

二、结果分析与比较 / 121

第六节 本章小结 / 126

第十章 对 RME 定价方法进一步的实证研究

——基于 OEX 股指期货 / 128

第一节 引言 / 128

第二节 期权价值——一个最优停时问题 / 128

一、基于最小二乘法的最优执行策略 / 128

二、期权价值 / 130

第三节 样本数据与方法介绍 / 130

一、数据说明 / 130

二、RME 定价 / 131

三、基准定价方法 / 132

第四节 实证结果与分析 / 133

一、结果分类与误差度量 / 133

二、定价结果分析 / 133

第五节 本章小结 / 136

第十一章 结束语 / 137

第一节 本书内容总结 / 138

第二节 有关本书内容的进一步研究 / 143

参考文献 / 145

附录 / 153

附录 A: 证明 / 153

附录 B: Matlab 代码 / 158

后记 / 159

第一章 绪论

本书是基于作者多年的学习与研究成果而著成，属作者科研创新的成果。本章介绍了著写此书的市场背景、研究背景与意义；国内外研究现状、发展动态分析与已有的研究成果；原创成果与创新贡献；读者对象、基础要求与学习目标；文献引用说明等。

第一节 本书写作背景与研究现状

一、背景与意义

2010年4月16日，我国沪深300股指期货合约正式上市交易，两年后其成交量就达全球第五，累计成交金额达150多万亿；并且已在金融市场中发挥出价格发现、套期保值、转移风险等功能。这些都标志着我国金融衍生产品（又称衍生证券）市场已进入一个新的良好的发展阶段。2014年5月9日，国务院印发了《关于进一步促进资本市场健康发展的若干意见》，作为我国今后五到十年的资本市场纲领性文件，其中涉及如何大力发展期货及金融衍生品行业，指出“允许符合条件的机构投资者以对冲风险为目的使用期货衍生品工具，清理取消对企业运用风险管理工具的不必要限制”。这表明，中国市场的金融衍生品创新步伐正在进一步加速。

随着2014年“期权元年”有关期权业务准备工作的就绪，2015年2月9日，我国第一支期权（上证50ETF）在上海证券交易所正式上市交易，这是继股指期货、融资融券之后，A股市场的第三类金融衍生品。这意味着我国衍生产品市场体系得以进一步的延伸和完善，其他的各类衍生产品，势必也会在合适的机会进入市场。

众所周知,金融衍生品的核心问题之一是定价。如何准确地利用市场提供的信息,为期权等衍生品给出合理的价格,关乎交易员的交易策略、投资者的投资行为、公司企业的决策,以及各个环节的风险控制。为了更好地发挥衍生证券在金融市场中的各种作用,尤其在我国当前衍生产品市场发展的新阶段,研究如何结合实际市场,对衍生证券进行理性定价显得尤为重要;同时,对衍生品定价的研究也可丰富金融工程学核心领域的研究内容。

现代期权定价理论提供的是基于风险中性概率密度的无套利价格,其对应的定价方法往往建立在一些模型或假设之上,诸如对标的资产价格过程预设模型(如几何布朗模型)、假设市场完备、投资者风险厌恶等。然而这些模型和假设往往与实际市场并不相符。因此,为了定价的结果更为理性、符合真实市场的表现,就不能够过度依赖模型和一些假设,而应从现实金融市场中获取对定价有用的信息,并充分使用。诸多的文献研究表明,期权市场蕴含许多的有效信息,这些有效信息可以准确地反映市场的各种预期,包括标的资产收益的预期分布,从而能够捕捉到与实际市场相符的风险中性分布的“形状”,能够准确地将波动率微笑(volatility smile)和尾部行为(tail behavior)考虑进来。

依据风险中性定价原理,对于期权的定价,则需研究如何使用获取的有效信息得到风险中性定价测度。于是,定价问题可以转化为“在掌握(获取)的所有准确信息下,寻求最符合实际市场表现的标的资产价格分布”问题。信息学中的熵理论正好可以解决“如何在已有的准确信息条件下,为一个随机变量(如标的资产价格)寻找最符合真实情况的分布”的问题(Jaynes, 1957, 1982)。实际上,已有一些研究文献关注使用信息熵方法从金融产品价格中提取有效信息为期权定价。它是一个具实际意义、又较为复杂的交叉新兴学科研究问题,目前仍有许多亟待解决的研究内容。

二、国内外研究现状与已有研究成果

为详尽地提供给读者相关内容,本小节的相关国内外研究现状及发展动态分析,包括已有的研究成果,其内容将放在专门的章节中(第二章第一节“文献回顾”)。

第二节 原创成果与创新贡献概要

正是基于本章第一节中介绍的背景与现状,本书研究并提出能够为期权理性定价的非模型依赖(model-free)方法:立足于现实金融市场,尽量少依赖既定的定价模型或其他假设,使用期权市场有限数量的价格数据(除使用标的资产价格信息外),提取对定价有效的信息;结合这些来自真实市场的信息,借鉴信息熵原理建立期权非模型依赖定价方法,得到更“准确”的风险中性定价测度,为期权给出符合实际市场的理性定价。这些研究将用到金融市场学、随机数学、信息熵理论以及数值计算与实现技术。

该研究的主要贡献在于:能够将隐含于期权市场的有效信息,量化为风险中性矩而被准确地提取出来;将其作为约束条件嵌入最小二乘蒙特卡罗熵定价框架(Longstaff & Schwartz, 2001; Stutzer, 1996);并改进最小二乘蒙特卡罗算法,形成带风险中性矩约束的最小二乘蒙特卡罗熵定价方法(risk-neutral moment-constrained entropy valuation, RME)。RME方法从一个新的视角基于最大熵原理和最小二乘蒙特卡罗(LSM)算法为欧式、美式及其他路径依赖期权定价。模拟和实证结果表明,从估计风险中性矩能力与降低定价误差的角度来看,研究提出的RME定价方法比一些基准方法——包括Black-Scholes方法(BS)、有限差分方法(FD),以及最新提出的基于熵框架的定价方法CLM、AC08、AA10、VCLM^①都占有优势。理论上,RME方法可以应用于任何其他虚拟市场环境和实际市场,因为其能够从期权市场有效地捕捉到标的资产收益分布的准确信息,从而准确估计出风险中性定价测度,而不需要对标的资产价格过程强加过多假设。

1. 研究得到的主要结果

(1) 证明了基于已知的准确信息约束下所构建的最大熵模型,能够提供最符合实际的风险中性鞅测度,可用来作为期权的风险中性定价测度;并且,在风险中性矩不相关的条件下,这样的鞅测度是唯一存在的。

(2) 在标的资产价格服从几何布朗运动时,提出的RME定价模型得到的风险中性测度恰好是Black-Scholes定价的风险中性测度(定理7.1)。

^① AC08指Alcock和Carmichael(2010)提出的方法;CLM指Liu(2010)提出的Canonical least-squares Monte Carlo方法;AA10指Alcock和Auerwald(2010)提出的方法;VCLM指Liu和Guo(2014)提出的方法。详见第二章第一节“文献回顾”。

(3) 提取风险中性矩、估计风险中性概率分布的能力。基于模拟的市场, 检验从期权价格提取风险中性矩的实验中, 本研究提出的 RME 方法能够精确地估计风险中性矩 (与理论值一致, 精确到小数点后 4 位)。RME 得到的最大熵分布是“风险中性”的 (图 8.1、图 8.2)。

(4) 改进 LSM 算法。分析了 CLM 对美式期权定价结果的收敛性, 对 LSM (Longstaff & Schwartz, 2001) 进行了修改, 得到一种改进的 LSM。

(5) 对于第一个模拟实验, RME 方法得到的价格几乎均与真实价格一致 (表 8.5、表 8.6); 定价精确度基本随 moneyness 单调递增, 在深度实值时的误差非常小 (表 8.7、表 8.8); RME 方法只对平值和深度实值看跌期权产生价值低估, 而 AC08 方法产生一致的负偏差 (表 8.9、表 8.10)。

RME 方法得到的定价结果, 高度无偏, 且对每一个模拟结果均比 AC08 方法更稳定 (通过 MSE 统计量反映) (表 8.9、表 8.10)。

(6) 对于第二个模拟实验 (表 8.11、表 8.12), 在不同的漂移率 (growth rate、drift rate) 下, 无论是美式看涨或看跌期权, RME 给出的价格与真实价格几乎一致但低于真实价格; 而 CLM 产生正向定价误差。

RME 定价计算比 CLM 要稳定; 总体上, RME 定价比 CLM 定价更精确, 尤其是对美式看跌期权。

(7) 对于 IBM 美式期权的实证 (表 9.2)。对 IBM 看涨期权, RME 定价误差基本是 CLM 定价误差的一半; 对 IBM 看跌期权, RME 定价精确度很高, 且明显优于 CLM 和 FD 定价方法, 特别是在实值和深度实值状态。

除了实值和短期期权, RME 方法基本低估期权价格, 但几乎对所有的分类, 其定价误差都比其他基准方法要低。

(8) 对于 OEX 美式看跌期权的实证 (表 10.2)。使用了 RME 方法, 以及基准方法 AA10 和 VCLM。结果与上述基于 IBM 看跌期权的实证结果类似。更重要的是, 通过分析比较, 发现 RME 与 VCLM 方法包含了许多共同的有效信息, 而 AA10 并没有完全捕捉到这些信息。

2. 研究的主要创新点

(1) 从期权市场提取有效信息——风险中性矩。除标的市场外, 期权市场也蕴含诸多对定价有效的信息。本研究选择“标的资产对数收益的风险中性矩”作为待提取的有效信息, 并建立一种方法, 不依赖模型地从有限数量的期权市场价格中获取风险中心矩。这些矩能够准确地反映标的市场的各种预期尤其是标的资产的收益分布特征, 比如可以捕捉到“波动率微笑”和“尾部现象”。

首先引入随机数学中的特征函数, 使用随机积分方法建立起风险中性矩与

期权价格之间的理论关系；其次采用一种稳定的数值计算技术，实现这一理论关系，使得能够直接从有限数量的期权价格中准确提取出富含有效信息的各阶风险中性矩。

(2) 理性定价测度的确立。将以上提取到的富含信息的风险中性矩，作为约束条件嵌入到最大熵框架，根据信息熵理论求得更加“合适”的定价测度，进而为期权给出符合实际市场表现的理性定价。

这一定价测度与所提取的市场有效信息相吻合，且是风险中性的、唯一的，从而有望突破以往不完备市场中等价鞅测度不唯一的难题。

在标的资产价格服从几何布朗运动时，RME 定价模型得到的风险中性测度恰好是 Black-Scholes 定价的风险中性测度。

(3) 无需大量市场数据、很容易考虑红利因素，可以为多类衍生品定价。研究中提出的 RME 方法，从其具体定价过程可以看出，该方法能够应用到美式期权以及其他路径依赖期权定价；且很容易将红利情况考虑进来。同时，也不需要大量的标的以及期权历史价格数据。

第三节 读者对象

本著作的内容是有关金融工程领域中的核心研究内容——期权定价，研究过程是以金融市场为导向、随机数学与信息学为手段、计算编程为工具，介绍了最新的非模型依赖期权定价方法，以及作者的最新研究成果。本书适合于从事金融衍生证券行业的研究人员以及金融与数学相关专业高年级本科生、研究生的阅读。特别地，本书对衍生品定价、套利和程序化交易具有一定的应用指导意义，同时可为相关专业研究生的课题（学位论文）选题提供理论参考。

第四节 基础要求、学习目标与文献引用说明

一、基础要求

本书的研究内容，涉及金融市场学（特别是有关衍生证券市场）、随机数学、信息熵和计算机编程。为此，要能够顺利阅读并理解本书的内容，读者在阅读过程中，需要具备以下的知识。

(1) 熟悉金融衍生产品，特别是各类期权的基本性质；理解定价框架中的基本概念，如无套利原则、市场完备性和风险中性定价等。

(2) 掌握基本的定价模型与方法，如 Black-Scholes 期权定价模型、有限差分方法 (finite difference)、二叉树模型 (binomial tree)、最小二乘计算、蒙特卡罗 (Monte Carlo) 方法。当然，本书在一定程度上对这些需用到的模型方法进行了介绍。

(3) 数学方面的知识，要求掌握随机过程课程中的基本概念，如伊藤积分 (Ito integral)，等价鞅测度 (equivalent martingale measure)。另外，也要求熟练微积分中的各类计算。

(4) 熟悉信息学中的最大熵模型，理解其含义与意义。本书中也有相关知识的介绍。

(5) 关于计算程序，首先要会基本的数值求解，如数值积分求解；其次，掌握一些基本计算软件并会使用其进行编程，如 Matlab 数学软件，如果会使用 C++ 或 VB 语言则更好。

读者如若具备这些基本要求，本书阅读起来将会显得通俗易懂。

二、学习目标

根据本书的研究内容与内容安排，学习的目标设计为：熟悉期权各类定价方法，尤其是基于最大熵原理的非参数定价方法；理解基于熵的定价方法在现实（如非完备）市场的适用性；掌握最新的基于熵原理的期权定价方法；体会期权市场价格信息对理性定价的重要作用。

同时，也希望读者在读完此书后，能够将其中的思路运用到期权交易策略、衍生产品设计中去；为投资者和交易员提供反映真实市场信息的定价工具。

三、文献引用说明

本书中所有的概念、性质、公式、引理、定理、推论、结论与证明，若是引用前人已有的结果，则在引用时均给出了出处说明。有些说明出现在脚注或正文中用括号标注；如果是多处引用时，则在每节内容的开端注有说明，如第三章“预备知识”中均是引用已有的结果。

如若没有注明来源，则表示此结果来自作者的研究成果。

第二章 文献综述与本书篇章结构

第一节 文献回顾——研究现状与发展动态分析

现代衍生产品定价方法往往建立在一些模型或假设之上，诸如对标的资产价格过程预设模型（如几何布朗模型）、假定市场完备（complete）、投资者风险厌恶等。然而这些模型和假设通常都与实际市场不符。因此，为了定价的结果更为理性、切合真实市场的表现，不能够过度依赖模型和一些假设，而应从现实金融市场中充分获取对定价有用的信息。实际上，已有研究文献开始关注如何从金融衍生产品（除了标的资产）价格中提取有效信息为衍生产品定价。

同时还应注意到，对未定权益（如期权）定价最普遍的方法就是风险中性定价方法。理论上，当市场完备时，该定价方法十分有效，因为无套利条件下完备市场能够提供唯一的风险中性概率分布（定理 3.2），进而为未定权益给出唯一的价格。但市场不完备时风险中性定价方法只会为未定权益给出“不明朗”的价格：不完备市场允许许多的风险中性概率（Gulko, 1997; Ingersoll, 1987），这些不同的概率分布会导致不同的未定权益价格。无论市场是否完备，真实的风险中性概率是未知的，必须从市场已知的信息（如期权交易价格）中提取（或估计）从而为未定权益定价。将这些准确提炼出来的信息作为一种约束，再通过某些方法估计出风险中性测度，最终为未定权益，如美式期权进行定价。

本节对书中关于期权（如美式期权或路径依赖期权）定价所涉及的内容与所应用的方法，包括期权市场价格的信息、风险中性矩的提取、熵定价原理、最小二乘 Monte Carlo 方法等，分别进行较详尽的文献回顾。