



面向 *21* 世纪课程教材
信息管理与信息系统专业教材系列

运筹学基础及其MATLAB应用

李工农 © 编著

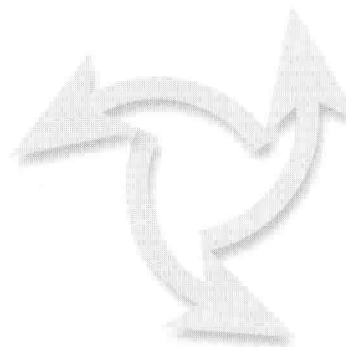
清华大学出版社



022-38



面向 21 世纪课程教材
信息管理与信息系统专业教材系列



运筹学基础及其MATLAB应用

李工农 © 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

运筹学的思想和方法用最精简的语言来描述,就是建立某个问题的数学模型并求其“最大值”或“最小值”。在经济、管理以及各种工程技术问题中,这样的问题比比皆是。但是,运筹学的模型和方法在实际应用时大多数都是计算非常烦琐的,如果不与计算机技术相结合,则较难将其应用到解决实际问题中去。MATLAB 是当前最好的科学计算语言之一,在本书中,一方面继续保留相关理论和方法的描述;另一方面则对书中所涉及的所有算法给出相应的 MATLAB 程序。

本书将运筹学的基本内容按照数学模型分成线性模型、非线性模型和随机模型分别加以叙述。其中,线性模型包括线性规划、运输问题、目标规划、整数规划、图与网络流规划等;非线性模型包括无约束非线性规划、约束非线性规划以及存储论中的非线性问题等;随机模型主要包括排队论。

本书可作为应用数学、经济、管理类以及工程技术类各专业本科生的运筹学课程教材,也可作为相关领域以及对运筹学实际问题感兴趣的实际工作者的参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础及其 MATLAB 应用/李工农编著. —北京:清华大学出版社,2016

(面向 21 世纪课程教材·信息管理与信息系统专业教材系列)

ISBN 978-7-302-44576-0

I. ①运… II. ①李… III. ①Matlab 软件-应用-运筹学-高等学校-教材 IV. ①O22-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 175095 号

责任编辑:刘志彬

封面设计:常雪影

责任校对:宋玉莲

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62770175 转 4506

印 装 者:北京密云胶印厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm 印 张:26.25 插 页:1 字 数:631 千字

版 次:2016 年 10 月第 1 版

印 次:2016 年 10 月第 1 次印刷

印 数:1~4000

定 价:49.00 元

前 言 PREFACE

运筹学最大的特点就是考虑如何在现有资源下选择最优的方案。虽然在某些情况下讨论最优有些绝对,但运筹学能从定量的角度帮助决策者选择最优或最满意的解决方案。运筹学的思想早在古代就已出现,例如,中国的“田忌赛马”“赵括运粮”“丁谓修宫”等故事以及古希腊阿基米德为迦太基人设计的用于粉碎罗马海军攻占西那库斯城的设防方案等都体现了现在所谓的运筹学思想。但是,运筹学作为一门独立的学科却是诞生于第二次世界大战。战后,随着运筹学的方法广泛应用于经济、管理以及工程技术等各个领域,现在已经是经济、管理以及诸多理工科学生乃至很多社会科学的本科生和研究生必修的一门重要课程。

运筹学可以有不同的定位。有人将其定位为应用数学的一门分支,也有人甚至于更多人将其定位为现代管理的一门重要分支。属于运筹学的内容非常繁杂,但作为一门进行定量分析的课程,运筹学的内容就免不了数学模型。从数学模型的角度划分,本书将介绍三部分内容。线性模型部分包括线性规划及单纯形法、线性规划的对偶理论、灵敏度分析及进一步讨论、运输问题、目标规划、整数规划和图与网络优化共 6 章;非线性模型部分包括无约束非线性规划和约束非线性规划共 2 章;随机模型部分则主要介绍排队论模型共 1 章。

运筹学还有个特点,那就是解决各种问题的方法或算法都比较复杂,而且计算量较大。如果不和计算机技术结合,要运用运筹学的方法解决实际问题几乎是不可能的。本书的第一个特点就是将运筹学的各种算法与计算机技术相结合,运用计算机技术解决运筹学问题就是利用各种现有软件或某种计算机语言自己编程。当前有不少的现有软件可以利用,比如, LINDO 公司(官网: www.lindo.com) 出品的 LINDO/LINGO 软件,微软公司的 WinQSB 以及 Excel 等。MATLAB 也是一种不错的选择。MATLAB 是当前最好的科学计算语言(软件)之一,人们可以利用其丰富的工具箱进行相关计算,也可以自己编程。本书将运筹学的各种模型与 MATLAB 相结合,除了介绍 MATLAB 自带的部分函数外,主要是通过编者自己编写的程序来帮助学习者更好地掌握运筹学的相关内容。由于编者的编程水平有限,不敢保证这些程序都是最优的,但保证这些程序都是正确的,对

于从事运筹学、最优化学习和运用的人士来说,可以提供一定的帮助。

本书的第二个特点是深入浅出,通俗易懂,重视数学模型。建立数学模型无疑是解决各种问题的最重要的一步,虽然说提高建立数学模型的能力不是一朝一夕的事情,但通过运筹学的学习,对学生建立数学模型解决实际问题显然是有很大帮助的。本书中,编者基于多年的教学心得,通过通俗易懂的示例讲清每种运筹学模型的来历以及尽可能地讲述数学模型建立的过程,并兼顾不同学习者的需求,对于相关理论进行了适当的取舍。

本书可作为高等学校数学与应用数学、信息与计算科学、统计与运筹学等专业本科生的运筹学或最优化方法课程或数学建模课程的教科书或参考书,也可作为计算机类、经济类、管理类、金融类专业的运筹学教科书或参考书,还可作为相关专业研究生的教材或参考书。本书对于有意运用运筹学的模型解决实际问题的工作者也是有益的。讲完本书全部内容大约需要 100 学时。教师可根据本校的实际情况进行取舍。

在本书的写作过程中,得到了刘则毅教授的大力支持和帮助,赵毅、胡耀华两位博士仔细阅读了本书草稿并提出了宝贵意见。本书的写作还得到了深圳大学教务处以及深圳大学数学与统计学院各位领导的大力帮助。在此,作者表示深深的谢意。

虽然编者想尽力写好本书,但限于水平,书中难免有不妥和错误之处,欢迎读者批评指正,以便再版时改进。

李工农

2015 年 12 月

教学支持说明



任课教师扫描二维码
可获取教学辅助资源

尊敬的老师：

您好！为方便教学，我们为采用本书作为教材的老师提供教学辅助资源。鉴于部分资源仅提供给授课教师使用，请您填写如下信息，发电子邮件给我们，或直接手机扫描上方二维码实时申请教学资源。

（本表电子版下载地址：<http://www.tup.com.cn/subpress/3/jsfk.doc>）

课程信息

书 名			
作 者		书号（ISBN）	
开设课程1		开设课程2	
学生类型	<input type="checkbox"/> 本科 <input type="checkbox"/> 研究生 <input type="checkbox"/> MBA/EMBA <input type="checkbox"/> 在职培训		
本书作为	<input type="checkbox"/> 主要教材 <input type="checkbox"/> 参考教材	学生人数	
对本教材建议			
有何出版计划			

您的信息

学 校			
学 院		系/专业	
姓 名		职称/职务	
电 话		电子邮件	
通信地址			

清华大学出版社教师客户服务：

电子邮件：tupfuwu@163.com

电话：010-62770175-4506/4903

地址：北京市海淀区双清路学研大厦 B 座 509 室

邮编：100084

清华大学出版社投稿服务：

投稿邮箱：worklzb@163.com

投稿咨询电话：010-62770175-4304

目 录 CONTENTS

绪论	1
第 1 章 线性规划及单纯形法	8
1.1 线性规划问题及其标准型	8
1.1.1 线性规划问题的提出	9
1.1.2 图解法及基本概念	14
1.1.3 线性规划问题的有关结论	19
1.2 单纯形法	23
1.2.1 单纯形法的基本思路	23
1.2.2 单纯形法的计算步骤	25
1.2.3 单纯形表	29
1.2.4 利用 MATLAB 实现单纯形法	31
1.3 单纯形法的进一步讨论	34
1.3.1 大 M 法	35
1.3.2 两阶段法	39
1.3.3 进一步讨论 MATLAB 实现	41
1.3.4 应用举例	49
习题 1	54
第 2 章 对偶理论及灵敏度分析	58
2.1 线性规划的对偶理论	58
2.1.1 对偶问题	59
2.1.2 线性规划的对偶理论	64
2.1.3 对偶问题解的经济含义	70
2.2 对偶单纯形法	71
2.2.1 对偶单纯形法的计算步骤	71
2.2.2 MATLAB 实现	73

2.3	线性规划的灵敏度分析	76
2.3.1	资源系数变化的分析	77
2.3.2	价值系数变化的分析	79
2.3.3	技术系数变化的分析	81
2.4	灵敏度分析的 MATLAB 实现	83
2.5	应用举例	94
2.6	线性规划的原始对偶内点算法	95
2.6.1	原理与算法	96
2.6.2	MATLAB 实现	100
	习题 2	104
第 3 章	运输问题	108
3.1	运输问题的数学模型	108
3.2	表上作业法	110
3.2.1	求初始基可行解的方法	111
3.2.2	判断最优解的方法	116
3.2.3	用于调整的闭回路法	119
3.2.4	产销不平衡的运输问题	121
3.3	运输问题的 MATLAB 实现	123
3.4	应用举例	135
	习题 3	141
第 4 章	目标规划	145
4.1	目标规划问题及其数学模型	145
4.1.1	目标规划问题的提出	145
4.1.2	基本概念及一般模型	147
4.1.3	目标规划问题的图解法	149
4.2	单纯形法及灵敏度分析	150
4.2.1	求解目标规划的单纯形法	150
4.2.2	目标规划的灵敏度分析	154
4.3	MATLAB 实现	157
4.4	应用举例	159
	习题 4	165
第 5 章	整数规划	168
5.1	整数规划及其数学模型	168
5.2	分支定界法及割平面法	170
5.2.1	分支定界法	170

5.2.2 割平面法	176
5.3 0-1 规划	181
5.3.1 0-1 规划问题的特点	181
5.3.2 隐枚举法	184
5.4 应用举例及 MATLAB 实现	185
5.4.1 整数规划的 MATLAB 实现	185
5.4.2 应用举例	194
习题 5	199
第 6 章 图与网络优化	201
6.1 图的基本概念	201
6.2 最小支撑树问题	205
6.2.1 树	205
6.2.2 最小支撑树	208
6.3 最短路问题	210
6.3.1 数学模型	210
6.3.2 带有非负权的 Dijkstra 算法	213
6.3.3 Floyd 算法	218
6.3.4 最短路问题应用举例	219
6.4 最大流问题	222
6.4.1 基本概念	223
6.4.2 有关结论	225
6.4.3 Ford-Fulkerson 标号算法	226
6.4.4 最大流问题应用举例	229
6.5 最小费用最大流问题	232
6.5.1 标号算法	233
6.5.2 应用举例	236
6.6 MATLAB 实现网络优化	238
习题 6	251
第 7 章 无约束非线性规划	255
7.1 无约束非线性规划的基本概念	255
7.1.1 数学模型	256
7.1.2 最优性条件	257
7.1.3 最优化算法的一般结构	259
7.2 一维线搜索	261
7.2.1 精确线搜索方法	261

7.2.2	不精确线搜索方法	266
7.2.3	一维线搜索的 MATLAB 实现	270
7.3	几个算法及其 MATLAB 实现	279
7.3.1	最速下降法	279
7.3.2	共轭梯度法	283
7.3.3	牛顿法及拟牛顿法	288
7.4	应用举例	296
	习题 7	302
第 8 章	约束非线性规划	304
8.1	数学模型及基本概念	304
8.1.1	数学模型	304
8.1.2	基本概念	305
8.1.3	最优性条件	307
8.2	几个算法及其 MATLAB 实现	311
8.2.1	罚函数法	312
8.2.2	可行方向法	326
8.3	应用举例	335
	习题 8	343
第 9 章	排队论基础	346
9.1	排队论的基本概念	346
9.1.1	问题的引入及基本概念	346
9.1.2	排队论的常用分布	349
9.2	单服务台及多服务台模型	353
9.2.1	单服务台模型	353
9.2.2	多服务台模型	363
9.3	排队系统优化及 MATLAB 实现	370
9.3.1	最优服务率	370
9.3.2	最优服务台数目	377
	习题 9	378
附录	MATLAB 简介	381
	参考文献	411

绪 论

学习目标与要求

1. 了解运筹学发展简史。
2. 了解运筹学的特点以及数学模型的有关概念。
3. 了解运筹学的工作步骤以及算法的有关概念。

运筹学发展简史

运筹学 (Operations Research 或 Operational Research, OR) 作为现代意义下的一门独立的学科, 一般认为起源于第二次世界大战。第二次世界大战早期, 德国空军对英国本土的轰炸对英国造成了极大的破坏。虽然当时已经出现了雷达, 但由于有来自不同雷达站的信息以及雷达站同整个防空系统的配合不够好, 英国本土仍然遭受了德国空军对其轰炸的重创。当时, Bawdsey 雷达站的负责人 A.P.Rowe 提出在现有技术装备情况下对整个防空作战系统的运行进行研究。为保密的需要, 他们将这项研究称为“Operational Rresearch”(运用研究)。研究小组是一支综合的队伍, 包括数学家、物理学家甚至还有心理学家等。由于其成员构成的复杂性, 人们称之为“布莱克特马戏团”。他们研究的具体问题有设计将雷达信息传送给指挥系统及武器系统的最佳方式和雷达与防空武器的最佳配置等。他们的研究成果极大地提高了英国本土的防空能力。他们的研究工作主要是考虑立足当时已有的技术装备, 如何进行不同的配置使其发挥最大的功效。按照后来被称为运筹学的主要思想, 这些研究不仅是现代运筹学的发端, 也是运筹学解决实际问题的

成功范例。此外，盟军的反潜艇战运筹研究小组针对德军潜艇的作战研究也卓有成效。他们通过对以往攻击德军潜艇的相关数据的分析，提出了两条重要建议：一是将反潜攻击由潜艇投掷水雷改为飞机投掷深水炸弹；二是将起爆时间改为德军潜艇刚下潜时。事实证明，这样的效果是最佳的。类似成功的例子在第二次世界大战期间还有很多。据统计，在第二次世界大战期间，英国、美国和加拿大等国军队里的运筹学工作人员一度超过了 700 人。这些运筹学工作人员研究的问题还包括战斗机炮弹的合理载荷量问题和如何用一定数量的战斗机封锁给定的海面海域的问题等。第二次世界大战时期军事运筹学的特点表现在：在采集实际数据的基础上，通过多学科的密切协作，用定量化、系统化的方法研究立足现有技术装备如何达到最佳的作战效果。

追根溯源，如上所述的思想和方法在古代人们的生活和生产活动中就已经出现。例如，中国古代著名的“田忌赛马”“赵括运粮”“丁谓修宫”等故事，李冰父子主持修建的由“鱼嘴”岷江分洪工程、“飞沙堰”分洪排沙工程和“宝瓶口”引水工程巧妙结合而成的都江堰水利工程，《梦溪笔谈》所记录的军粮供应与用兵进退的关系等事例，无不闪烁着现代所称的运筹学思想，即体现了立足现有技术装备整体优化的朴素思想。进入 20 世纪后，现代运筹学的思想已经在很多方面有所体现，比如 1914 年英国工程师兰彻斯特 (Lanchester) 提出的战斗方程，1917 年丹麦工程师研究电话通信时提出的排队论的一些著名公式，20 世纪 20 年代初提出的存储论的最优批量公式，以及 20 世纪 30 年代苏联数学家康托洛维奇在解决工业生产组织和计划问题时提出的类似线性规划的模型，等等。

由于运筹学主要是采用定量分析手段，研究如何最佳利用现有技术装备问题，以求达到最佳效果，所以第二次世界大战以后在美国等发达国家开始将运筹学的思想和方法运用到工业和经济管理领域，并取得了非常好的效果。到 20 世纪五六十年代，从事运筹学的工作者队伍开始迅速壮大，纷纷成立学会、创办刊物并开始在高校开设运筹学课程。也正是在这段时期，现代运筹学由钱学森、徐国志先生从美国归国时引入中国，并且在两位先生的推动下于 1956 年在中国科学院力学研究所成立了中国第一个运筹学研究小组。1959 年，第二个运筹学研究部门在中国科学院数学研究所成立，这是数学家们投身于国家建设的一个产物。力学所小组与数学所小组于 1960 年合并成为数学研究所的一个研究室，当时的主要研究方向为排队论、非线性规划和图论，还有人专门研究运输理论、动态规划和经济分析（如投入产出方法）。50 年代后期，运筹学在中国的应用集中在运输问题上，其中一个广为流传且容易明白的例子就是“打麦场的选址问题”。研究该问题的目的在于解决当时在以手工收割为主的情况下如何节省人力、物力。著名的“中国邮递员问题”也是在那个时期由管梅谷教授提出的。特别值得一提的是，华罗庚先生在“文化大革命”那种特殊历史时期在全国推广的“优选法”。华罗庚先生将一些基本的优化方法，如 0.618 法，用朴素的语言编写成册，用于解决纺织女工查找布匹疵点的最佳时机等实际问题，并亲自下工厂、到农村进行推广，为在那种特殊历史时期提高生产效率起到了很好的效果。但是，由于运筹学在解决经济问题时常常要讲到利润最大、成本最

低等, 这些讨论在“文革”期间是禁区。所以, “文化大革命”开始以后, 运筹学的研究和教学出现了停滞。到了“文革”结束后的 1980 年, 中国运筹学会作为中国数学学会的一个分支才成立。运筹学的研究和教学开始恢复。1992 年, 中国运筹学会从中国数学会独立出来成为国家一级学会是学会发展史上的一个重要事件。这说明了运筹学以数学为基础, 但同数学学科有本质的不同。运筹学家除了推动运筹学基本理论的发展, 还要对社会负起同数学家不同的责任。事实上, 国际上几十年来对运筹学发展的讨论一直没有停止过。1994 年, 美国运筹学会和管理科学学会合并, 成立了 INFORMS, 是国际运筹学界的一件大事。目前, 运筹学和管理科学的结合也引起中国运筹学界的极大关注。近年来, 中国运筹学工作者坚持运筹学研究与经济建设等重大问题紧密结合取得了很大的成绩。例如, 在山东省与大连市经济发展计划的制订, 兰州铁路局铁路运输的优化安排, 中外合资经营项目的经济评价, 若干国家重大工程中的综合风险分析等方面, 我国运筹学者都发挥了积极作用。近二十年来, 信息科学、生命科学等现代高科技对人类社会产生了巨大影响, 运筹学工作者关注到其中一些运筹学起作用的新的工作方向并积极参与其中。例如, 运筹学工作者将全局最优化、图论、神经网络等运筹学理论及方法应用于分子生物信息学中的 DNA 与蛋白质序列比较、芯片测试、生物进化分析、蛋白质结构预测等问题的研究; 在金融管理方面, 将优化及决策分析方法, 应用于金融风险控制与管理、资产评估与定价分析模型等; 在网络管理上, 利用随机过程方法, 研究排队网络的数量指标分析; 在供应链管理问题中, 利用随机动态规划模型, 研究多重决策最优策略的计算方法等。

截至目前, 几乎所有高校都在应用数学、经济管理以及金融、工程技术学科等各专业开设了运筹学课程。运筹学正以其解决实际问题的独特性受到人们越来越多的研究和应用。

运筹学与数学建模

运筹学的特点

由运筹学的发展简史可见, 在解决某个实际问题时, 运筹学的主要特点是利用现有的技术、资源, 研究如何才能发挥最佳的效果。在这个过程中, 往往需要和多个学科进行合作。可以这么说, 运筹学是为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时, 提供以数量化为基础的科学方法。它强调以量化分析为基础, 就必然要用数学语言描述并解决问题。但任何决策都包含定量分析和定性分析两个方面, 而定性分析又不能简单地用数学语言加以描述, 如政治、民族、人们的心理等, 只有综合多种因素的决策才是全面的。运筹学工作者的职责是为决策者提供量化分析的结果, 并指出定性的因素。运筹学的另一个定义是: 运筹学是一门应用科学, 它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法, 解决实际中提出的专门问题, 为决策者选择最优策略提供定量依据。这个定义表明运筹学具有

多学科交叉的特点。在解决实际问题时,由于成本以及各种条件的限制,对于运筹学理论上提出的最优,往往无法达到,这时可用次优、满意解来代替。因此也可以说,运筹学为最好的解决实际问题提供一种量化依据,如果不按照运筹学给出的方案进行,则结果可能更糟糕。

运筹学与数学模型

前面提到,用运筹学解决实际问题必须用数学的语言描述该问题。这种用数学语言描述问题的过程就是建立某个实际问题的数学模型。所谓模型是指,为了一定的目的,对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物。按照描述的方式划分,模型可以分为形象模型、模拟模型以及符号或数学模型。比如,房地产开发商将其开发的房地产用沙盘方式呈现出来就是形象模型,用计算机模拟核武器爆炸以后的效果就是模拟模型。而数学模型则是将拟解决的问题所牵涉的决策变量之间的关系按照物理的、化学的、经济的等规律所必须满足的条件用数学式子写出来,并用相关数学式子将要解决的目标也表示出来的一种描述问题的方式。建立一个问题的数学模型并不是全新的概念。实际上,从小学开始的数学课上解应用题就是简单地建立数学模型并求解的过程。比如,有两艘船相距 200km,甲船以 20 km/h 的速度自东向西行驶,同时乙船以 30km/h 的速度自西向东行驶,问两船经过几小时相遇?这是一个典型的小学数学应用题。我们现在这样重新描述,问题问的是两船经过几小时相遇,这个时间是要我们回答的,是不知道的。因此可以假设两船经过 t h 航行会相遇,根据简单的物理学规律以及题目的假设,显然有: $20t + 30t = 200$ 。这个式子就是我们所说的数学模型(答案当然很简单,即 $t = 4$ h),因为这个式子描述了原问题。这个模型虽然简单,但仔细思考,仍然有些建立数学模型的特点。首先,我们在列出上述式子时有意无意地忽略了某些条件。比如,我们在这里实际上假设两船在航行过程中不受诸如海浪、风向等外在因素的影响,并且假设两船一定是在一条直线上相向而行。实际上,建立任何一个问题的数学模型时都必须作出一些假设,有时,一个数学模型的好坏与假设是否合理、得当有很大关系。其次,我们利用了物理学上速度、时间和距离的关系以及题目本身给出的条件,即两船相距 200km 以及甲、乙两船的速度。这说明,建立数学模型必须根据问题给出的条件,并利用物理的、化学的、经济的、金融的等相关领域的规律才能将决策变量满足的条件或目标表示出来。

数学模型可以分为很多种,如初等数学模型、高等数学模型,离散模型、连续模型,确定性模型、随机模型,微分方程模型、差分方程模型,统计回归模型、优化模型,等等。从所使用的数学工具的角度来讨论建立数学模型,则可以说几乎用到了数学的所有分支。由于运筹学的特点,在这门课程里讨论的数学模型都是优化模型。如何建立一个问题的优化模型(运筹学模型)是学习这门课程的一个非常重要的任务。但是,建立一个复杂问题的运筹学模型并不是一件简单的事情。实际上,有人认为建立一个好的数学模型(包括运筹学模型)是一门艺术。这是指,建立数学模型并不能简单地根据某个定理就

能立即写出来,而是需要利用问题的假设和相关规律进行反复思考、讨论,进行创造性的工作。当然,任何事情都有一个开始和训练。在运筹学这门课程里,我们除了学习一些运筹学的分支及其相关理论外,有意识地注意数学建模是一项非常重要的任务。虽然建立某个问题的数学模型没有一个统一的模式,但从以下几个方面进行思考是有益的:

(1) 仔细考虑(阅读)问题的已知和未知条件,反复讨论,找出问题要解决的目标。需要解答者回答的问题往往就是决策变量,用适当的符号表示决策变量。

(2) 经过讨论,作出适当与合理的假设。所谓适当与合理的假设主要与该问题所属学科领域的知识有关。

(3) 从问题的最后入手,讨论决策变量之间以及与某些公认的或已知的规律或某种量之间的联系,并将这些关系表示出来。

(4) 将问题需要回答的目标表达出来。

能做到从以上几个方面思考问题,对于学习运筹学来说是足够了,但要提高建立数学模型的能力却不是一朝一夕的事情,只有长期坚持建模训练才有可能建立一个好的数学模型,用于解决复杂的实际问题。

算法

假设我们针对某个问题建立了数学模型,那么接下来的任务就是求解这个模型。求解数学模型,当然要用到相关的数学理论,从求解的方式来看,不外乎有两种方式:公式的或解析的求解方式以及根据某种算法进行求解。前面一种方式不用讨论,我们着重讨论第二种方式。由于问题本身的结构,很多问题没办法用公式求解。这时,人们往往会根据问题的特点和相关理论提出解决这个问题的一些步骤。即,首先应该怎么做,其次又应该怎么做,在什么情况下应该怎么做,在什么情况应该终止等等。这些解决某个问题的步骤就是算法。

作为一个算法应该满足一般性和有限终止性。即只要是同类型的问题就应该能够按照相同的算法得出结果并且一定要在有限次运算后终止(收敛)。除此以外,还需要考虑算法的运算效率,即收敛速度。

运筹学模型几乎都是根据某种算法进行求解的。因此,适当了解与算法密切相关的计算复杂性是有必要的。下面对此做一个简单的介绍。所谓问题是指一个抽象的模型或概念,它通过一些具体的数据表现出来。问题是需要回答的一般性提问,通常含有若干个满足已定条件的参数。问题通过描述所有参数的特性和描述答案所满足的条件给定。当问题中的参数赋予了具体值的时候,就称为问题的一个实例(Instance)。一个问题通过它的所有实例表现。算法常常是针对一个问题来设计的,它可以求解任何一个该问题的实例。比如,线性规划问题是指:

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = c^T X \\ \text{s.t.} \quad & \\ & AX = b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

这里, $X \in R^n$ 称为决策向量, $c \in R^n$ 称为价值系数向量, $A \in R^{m \times n}$ 称为技术系数矩阵, $b \in R^m$ 称为资源系数向量。 A, b, c 就是描述该问题的参数, 当这些矩阵、向量给定具体值后, 就对应一个实例。通过一个称为检验数 (后面将会详述) 的概念对其解进行描述。后面我们将会了解到单纯形法可以求解该问题。并且只要是如上形式的问题, 不论 A, b, c 是怎样的, 通过单纯形法都可以得出有解 (唯一解、无穷多组解、无界解) 或无解的最终结果。

衡量一个算法的好坏有时可以用计算机所耗费的 cpu 时间来判断, 但是, 计算机软硬件都在不断变化和提高, 所以通常是用算法中的加、减、乘、除和比较等基本运算的总次数同实例在计算机计算时的二进制输入数据的大小关系来度量的。在这里我们打算进行详细地讨论, 我们只是粗略地指出, 一个求解实例 I 的算法的基本计算总次数 $C(I)$ 同实例 I 的计算机二进制输入长度 $d(I)$ 的关系如果能用一个多项式函数进行控制的话, 我们就称该算法是求解该问题的一个多项式时间算法。这样的算法我们认为是有效的或者说是好的算法。与此相对的就是所谓指数时间算法, 这样的算法我们认为是效率不高的或者说是不好的算法。

一个问题如果存在至少一个多项式时间算法, 则称为多项式问题, 所有多项式问题集记为 $P(\text{Polynomial})$ 。对于上面提到的线性规划问题, 可以证明, 单纯形法不是一个多项式时间算法, 但这并不能说明线性规划问题不属于多项式问题。Khachian 在 1979 年成功构造了椭球算法并证明了其算法是线性规划问题的多项式时间算法。因此, 线性规划问题属于 P 。并非所有 (优化) 问题都找到了多项式时间算法, 也就是说, 还不能肯定某些优化问题是否属于 P 。我们把迄今为止还没有找到多项式时间算法的最优化问题归为所谓的 NP-hard。受人类认识能力的限制, 目前人们只能假设这一类难解的最优化问题不存在多项式时间算法。比如, 我们将在后面学习的整数规划问题, 0-1 规划问题即属于此类问题。但是, 非多项式时间算法在实际计算中的表现不一定就不好。比如单纯形法, 理论上不是多项式时间算法, 但其求解实际问题的效果, 特别是对于中小规模的线性规划问题而言, 其效果往往好于别的算法 (如内点算法)。因此, 单纯形法以及割平面法、隐枚举法等算法仍然值得我们学习。

应用运筹学解决问题

运筹学的特点之一是多学科合作。所以, 运用运筹学解决实际问题首先需要与问题所属学科领域的专业人士进行合作, 深入了解问题的真正含义, 搞清问题真正需要解决的目标。其次, 在研究问题时互相引导, 改变一些对问题的常规看法。除了强调合作以

外,在研究问题时也需要独立进行,要思路开阔。具体来说,应用运筹学解决问题主要有如下一些步骤:

(1) 分析问题。首先针对问题做调查研究。这里指的是针对问题提供的已知、未知,做定性研究,讨论问题的属性。要搞清楚问题所属的学科领域,并反复讨论问题需要解答者回答什么。这个说法看似容易,但对比较复杂的问题可能需要解答者反复思考才可能真正清楚问题所在。

(2) 构造或选择模型。在清楚决策变量并用适当符号表示以后,针对问题可以选用适当的、已知的模型,也可能需要解答者自己构造模型。所谓构造模型是指,根据相关学科领域的知识和问题的要求,客观地写出决策变量之间必须满足的关系。在此,需要特别强调的是,在构造模型或选择模型以前,必须作出适当的、合理的假设。

(3) 模型的求解和检验。模型建立以后,应该根据相关理论对此模型进行求解。对于运筹学模型而言,几乎都是根据相关算法通过计算机求解。在此,需要注意问题的规模和计算复杂性问题。对于某些大型的运筹学模型,如果属于 NP-hard 的,可能还需要采用某些启发式算法进行求解。在求解过程中必然有检验的问题,这与算法有关。

(4) 解的实施和控制。应用运筹学解决问题的根本就是为决策者作出科学决策提供定量依据。因此,得到模型的解以后就需要具体实施。若在实施过程中发现与预期的、理论的或实际的表现不符,则需要回到第一步重新开始。另外,由于任何数学模型都有局限性,所以在可能的情况下作灵敏度分析,即确定最优解保持稳定的参数变化范围也是非常重要的。

(5) 模型的总结和反馈。最后,针对建立的运筹学模型作出总结,讨论是否可以进一步改善模型。

在应用运筹学解决一个复杂的实际问题时,构造或选择模型是最重要的一步。为获得一个好的模型,可能需要重复上述步骤,反复讨论才能成功,从而较好地解决问题。

关于本书

从应用数学的角度来看,运筹学是一门应用性很强的学科。从管理等学科的角度来看,运筹学又是一门数学味道很浓的学科。因此,学习运筹学不仅要学会相关的数学理论,更要注意建立数学模型解决实际问题。同时,对于处在计算机时代的人来说,必须要学会利用计算机解决运筹学模型。我们在前言已经说过,可以选用一些现成的计算机软件来解决运筹学问题,但编者考虑到 MATLAB 的重要性和广泛性,本书是基于 MATLAB 来进行相关讨论的。几乎对于每个算法我们都编写了相关的程序并附在每章的适当位置。编者也认为掌握相关算法的手工计算也是很有必要的。因为这会有助于学习者真正理解和掌握相关的算法。因此传统的手工计算我们并没有放弃。另外,本书在选材时是从运筹学模型的数学特点进行划分的。即分成线性模型、非线性模型和随机模型三种。