随机Markov跳变系统的有限短时间控制与综合

何舒平　沈　浩　著

科学出版社

随机 Markov 跳变系统的有限短时间控制与综合

何舒平　沈　浩　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是一部专门研究跳变系统的专著，集中研究了跳变系统的有限短时间分析和综合设计问题。本书结合 T-S 模糊控制技术、神经网络技术、时滞系统控制和鲁棒控制等方法，研究跳变系统的有限短时间稳定、镇定、鲁棒控制与滤波等问题。研究的问题涉及泛函微分方程理论、线性/非线性系统理论、随机系统控制理论、最优化理论、状态估计与滤波理论、神经网络控制理论、模糊控制理论以及网络控制理论等。本书将工程领域的暂态性，即有限短时间控制问题引入跳变系统的研究中，极大地丰富了动力学系统的控制理论范畴。

本书可作为控制理论与控制工程、系统工程、信息与计算科学以及相关工程与应用专业的研究生教材或教学参考书，也可供控制论、系统论等相关专业教学和相关科研人员以及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机 Markov 跳变系统的有限短时间控制与综合/何舒平，沈浩著．—北京：科学出版社，2016

ISBN 978-7-03-048689-9

Ⅰ．①随… Ⅱ．①何… ②沈… Ⅲ．①随机控制-控制系统-研究 Ⅳ．①O231．3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 129327 号

责任编辑：张海娜 霍明亮／责任校对：蒋 萍
责任印制：张 倩／封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016 年 6 月第一次印刷 印张：12 1/4
字数：240 000

定价：80.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

控制理论研究的领域很广泛，涉及的方法众多，但稳定性一直是一个重要问题，是所有系统控制方法的核心和基础。针对现代控制理论中稳定性问题的研究，首推 Lyapunov 稳定性理论，该理论的重点是构造合适的 Lyapunov 函数或者泛函。实际上，Lyapunov 稳定性理论所反映的是系统在无限时间区间内的性能，刻画的是系统的稳态特性。但是在工业过程中，除了系统的稳态性能外，暂态性能可能显得尤为重要。一方面，一个渐近稳定的系统并不意味着具备良好的过渡特性，有时候甚至出现剧烈振荡、超调量过大等情况，从而造成很坏的影响，无法满足工业生产要求；另一方面，对一些系统状态偏离平衡点不能过大的系统，如通信系统、机器人操纵系统以及网络控制系统等，人们除了关注其渐近稳定性（通常是在 Lyapunov 意义下），更感兴趣的可能是系统能否在有限短时间内满足一些暂态要求。为此，Dorato 提出了短时间稳定性（即有限短时间稳定性）的概念，进而分析了系统的有限时间控制问题。其实，该思想可以看做从时间的角度，为降低一般的渐近稳定的工程保守性提供思路。因为其出发点是在满足生产实际要求的短时间内，设法使得系统轨迹在平衡点的设定范围内受限运动，从而放弃了对渐近稳定的要求。

另外，随机 Markov 跳变系统作为一类特殊形式的混杂系统，一直受到人们的广泛关注。与分段仿射系统、切换系统和混合逻辑动态系统等其他类型的混杂系统相比，随机 Markov 跳变系统在各跳变的模态之间的随机切换遵循一定的统计规律和特性。一般而言，此类随机系统包含两种混杂的动态形式，一种称为模态，由连续时间、离散状态的 Markov 过程描述；另一种称为状态，由每一模态下的状态空间方程描述。因此，该类系统可视为一类特殊的随机系统，称为随机 Markov 跳变系统。实际上，工程和经济领域中很多的动态系统，如生产制造过程、网络通信系统、电力电路系统以及经济系统等，在运行过程中常常会受到外部环境、内部结构或人为干预等随机突变因素的影响，从而使系统参数发生随机跳变，这些系统可以归类到随机 Markov 跳变系统的研究范畴。因此，对于此类随机系统的研究具有重要的理论意义和实际价值。

本书集中研究了随机 Markov 跳变系统的有限短时间分析和综合设计问题，对跳变系统的有限短时间理论做了系统性的探讨。在本书中，作者将与稳态性概念相对立的——有限短时间暂态性概念引入随机 Markov 跳变系统，系统地研究了该跳变系统的有限短时间稳定、镇定、控制以及滤波问题，并通过实例论证理论

结果的有效性和实用性，具有很高的学术价值。

本书第 1 章为绪论，具体介绍了随机 Markov 跳变系统产生的背景和研究现状，并对有限短时间控制理论的概念和相关研究成果进行了较为全面的分析和综述；第 2 章将有限短时间稳定的概念引入随机跳变系统，深入分析了连续和离散跳变系统的有限短时间稳定性判据和镇定性条件；第 3 章进一步研究了含时滞和不确定参数跳变系统的有限短时间稳定性分析与镇定问题；第 4～7 章系统地讨论了一类含复杂结构跳变系统的有限短时间鲁棒控制问题，包括有限短时间 H_∞ 控制、L_2-L_∞ 控制、无源性能分析以及基于观测器的跳变系统有限短时间控制器设计问题等；第 8 章引入随机估计理论，深入探讨了跳变系统的有限短时间状态估计和滤波问题；第 9 章和第 10 章应用 T-S 模糊技术，研究了非线性跳变系统的有限短时间稳定与综合控制以及有限短时间滤波器设计问题；第 11 章和第 12 章应用智能神经网络技术，研究了非线性跳变系统的有限短时间同步和有限短时间 L_2-L_∞ 状态估计问题；最后第 13 章对跳变系统的应用问题进行了较为全面的分析和讨论。

本书共 13 章，其中第 1～10 章由何舒平撰写，第 11～13 章由沈浩撰写，研究生任乘乘、吴珊珊、徐安安和夏腾飞等参与录入、校核等工作。

本书得到安徽省杰出青年基金（1608085J05）、国家自然科学基金项目（61203051，61304066）、教育部高校博士点专项基金（20123401120010）以及安徽大学科研建设课题（J10117700080）等资助，在此一并表示感谢。

限于作者水平，书中疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

作　者

2016 年 4 月

符号说明

$\Re$	实数域
$\Re_+$	正的实数域
$\Re^n$	n 维实向量集合
$\Re^{n\times m}$	$n\times m$ 实矩阵集合
I	单位矩阵
$A>(\geqslant,<,\leqslant)\ 0$	矩阵 A 是正定(正半定、负定、负半定)的
x^{T}、A^{T}	向量 x 和矩阵 A 的转置
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵
0	数字 0 或者适当维数的 0 矩阵
$\sigma(A)$	矩阵 A 的特征值
$\Im$	弱无穷小(微分)算子
∇	梯度(差分)算子
$\sum\limits_{i,j}^{N} a_{ij}$	求和
$*$	对称矩阵中对应模块的转置矩阵
$E\{\cdot\}$	数学期望
$\mathrm{diag}\{\cdot\}$	对角矩阵
$\mathrm{col}[\cdot]$	列矩阵
$\|\cdot\|$	向量的 Euclidean 范数或矩阵的普范数
$L_2[0\ ,\infty)$	连续系统时域平方可积函数空间
Σ_{c}、Σ_{d}	连续概率空间和离散概率空间
LMI(s)	线性矩阵不等式(linear matrix inequality(ies))

目 录

第1章 绪 论

近几十年来,学术界对含有 Markov 随机跳变参数系统的研究越来越广泛,也取得了很多的研究成果。Markov 跳变系统是一类特殊的随机系统,对该系统的研究很好地推动了随机系统理论的发展,也极大地丰富了控制理论的研究内容。Markov 跳变系统在生产过程中的实际应用也较为广泛,很多实际过程,如制造系统、生物系统、经济系统、电力系统以及网络通信系统等,均可抽象为 Markov 跳变系统模型。在本书的描述中,如不特别说明,跳变系统均指遵循 Markov 跳变规律的随机 Markov 跳变系统。本章主要从 Markov 跳变系统产生的背景和研究现状、主要概念以及有限短时间控制理论基础等方面阐述本书的主题。

1.1 Markov 跳变系统产生的背景和研究现状

Markov 跳变系统最早由 Krasovskii 和 Lidskii[1] 在 1961 年提出,开始被当作一种特殊的混杂系统,因为它具备两种混杂的动态形式,即模态和状态。随着随机系统理论和控制理论的发展,逐渐引起了学者的广泛关注,并成为控制理论界一个新的研究热点。人们发现,跳变系统实际上属于一类特殊的随机系统,因为系统的模态,由连续时间、离散状态的 Markov 过程描述;系统的状态,由每一模态下的状态空间方程描述。而且,在每一个模态中,状态空间方程是由一个随机微分方程(或差分方程)表示的,不同模态之间的相互转换受限于 Markov 切换规律。正由于跳变系统存在不同的模态,又可以称为一类多模型控制系统,可以将各个子模态下的子系统看成整个跳变系统的子模型,而这些子模型是由一定的切换规律,或者说是跳变规律整合在一起的。从这一点上说,跳变系统与由 T-S(Takagi-Sugeno, T-S)模糊规则、线性微分包含(linear differential inclusion, LDI)规则线性化的多模型控制系统或者分布式系统有着本质的不同。所以说,跳变系统是一类随机系统,是一类混杂系统,也是一类多模型控制系统。随着研究的深入,人们发现,这类系统的共同特点是在运行过程中常常会受到外部环境和内部结构等随机突变因素的影响,而使系统参数发生随机跳变,而且自然界很多系统都可以抽象为该系统模型。因此,对跳变系统的研究具有十分重要的理论意义和广泛的实际意义。

在过去的几十年中,已有大量关于跳变系统的研究成果,这些成果主要集中于跳变系统的随机稳定性、控制器设计与综合分析、随机系统滤波和故障检测等领域。最初将跳变系统理论应用于实际的是 Sworder,他在 1969 年首次用最大最小

值理论讨论了线性随机跳变系统的最优控制问题[2]。随后，Wonham 在 1971 年将随机控制系统的动态规划问题应用到线性随机跳变系统的最优控制[3]中，并取得了很好的研究成果。20 世纪 80～90 年代以后，跳变系统更激起了学者极大的研究兴趣，Ji 和 Chizeck 在 1990 年明确提出了跳变系统的随机可镇定和随机可控[4]的概念，并利用随机 Lyapunov 泛函和所谓的弱无穷小算子 $\mathfrak{I}$[5]证明了系统随机可镇定和随机可控的充分必要条件。Feng 等在 1992 年详细讨论了跳变系统随机稳定性的一系列特性，并指出随机稳定、均方稳定和均方指数稳定都是系统几乎一致渐近稳定的充分条件[6]，并且这些随机稳定性条件是等价的。随后，Boukas 等分别讨论了跳变系统镇定、H_∞ 控制和保成本控制等问题[7-9]。Park 等在 1997 年和 2002 年分别研究了跳变系统的预测控制问题[10,11]。Costa 等在 1999 年分析了连续时间跳变系统的 H_2 控制问题[12]，并在 2000 年针对离散时间跳变系统成功地建立了 H_2 范数指标和可控、可观 Gram 矩阵的关系，并借鉴凸优化工具将研究结果推广到含不确定参数的跳变系统的鲁棒 H_2 控制问题中[13]。de Farias 等在 2000 年应用动态输出反馈策略实现 H_2 和 H_∞ 指标控制[14]。其他关于线性跳变系统随机稳定性和随机控制的结论可以参见文献[15]～[25]。最早系统地研究 H_∞ 滤波的文章来自于 1996 年的国际决策与控制年会，de Souza 等分别研究了线性跳变系统的 H_∞ 滤波[26]和鲁棒 H_∞ 滤波[27]问题。Wang 等于 2002 年讨论了非线性跳变系统的滤波问题[28]，设计出了全阶滤波器，并于 2004 年用 Ricatti 方程的形式研究了一类离散线性跳变系统鲁棒滤波问题[29]。随后，Shi 等在 2006 年针对一类含时滞依赖的连续时间跳变系统，给出了鲁棒滤波器设计方案[30]。其他关于跳变系统滤波的结论可以参见文献[31]～[41]。Zhong 等在 2004 年和 2005 年分别对连续系统和离散线性跳变系统设计了故障检测滤波器[42,43]。随后，很多学者分别针对非线性跳变系统[44-46]、离散时间跳变系统[47,48]、不确定跳变系统[49]、广义跳变系统[50,51]和网络控制跳变系统[52]，研究了其故障检测与诊断问题。

目前，跳变系统已被广泛应用于各个领域，例如，通信系统[53,54]、经济学系统[55]、电力系统[56]、机器人机械系统[57,58]和电路网络系统[44,59]等。但是相对于线性跳变系统，非线性跳变系统的研究就显得特别缓慢，这主要是因为非线性跳变系统本身的复杂性。在早期的线性系统研究中，可以用相应的 Ricatti 方程来求解。更有甚者，可以用线性矩阵不等式[60]（linear matrix inequalities，LMIs）来转化 Ricatti方程，显得更加方便可行。但是对于非线性跳变系统的研究，要得到通用的控制器就显得很困难。Aliyu 和 Boukas[61]在 1998 年曾尝试采用 Hamilton-Jacobi 方程给出非线性跳变系统随机稳定，且保证 H_∞ 性能指标的充分条件。可惜的是，至今仍无法通过数值法或解析法获得满足该 Hamilton-Jacobi 方程的一个全局解。随着模糊控制技术和神经网络技术的发展，非线性跳变系统的控制问题就变得相对容易许多。可以通过模糊规则或者神经网络技术，将相应的非线性系统进行线

性化处理,从而得到可行的控制器。到目前为止,已有大量关于非线性跳变系统的研究成果采用此种方法。例如,针对含 Markov 跳变参数的不确定连续时间模糊系统,Nguang 等给出了输出反馈情形下模糊系统的 H_∞ 控制器[62]和滤波器[59]设计方法,并将结果推广到模糊奇异摄动系统[63]中。通过引入自由权矩阵的方法,Wu 和 Cai[57]针对一类不确定非线性跳变系统,给出了其鲁棒稳定的充分条件,并设计出了独立于模态的控制器。在此基础上,通过引入多个自由权阵,Dong 和 Yang[64]讨论了具有较小保守性的跳变系统状态反馈控制器的设计方法。近五年关于非线性跳变系统随机稳定性和随机控制的结论可以参见文献[65]～[72]。

时至今日,Markov 跳变系统理论已发展了四五十年,尽管已经取得了不少理论研究成果,而且也应用于生产实践中,但关于此类随机系统的研究仍处于发展阶段。理论上的系统性和完善性、技术上的成熟性和规范性都还没有形成完整的研究体系,还有待于人们进一步深入研究和探讨。

1.2 有限短时间控制理论

系统的稳定性问题一直是系统研究中一个重要的问题。对于稳定性问题的研究,首推 Lyapunov 稳定性理论,其重点就是构造合适的 Lyapunov 函数或者泛函。需要指出的是,Lyapunov 稳定性理论更多的是适应于渐近稳定性的研究。一般而言,渐近稳定刻画的是一个系统的稳态性能,表征系统在无穷区间内的特性,它能够满足实际工程的要求,但是并不能反映系统的暂态性能。很多时候,一个渐近稳定的系统,可能具有比较坏的暂态性能,从而造成很坏的影响,无法满足工业生产要求,如超调量过大,振荡剧烈或者系统本身含有饱和非线性。因此,针对一些工作时间短暂的系统,如导弹系统、通信网络系统和机器人操控系统等,人们除了研究其 Lyapunov 意义下的稳态性能外,更关心的是系统应满足一定的暂态性能要求,例如,在一定时间点上,系统轨线对于平衡点的偏离程度。为了解决系统的暂态性能问题,Dorato 提出短时间稳定性[73](即有限短时间稳定性)的概念,进而分析系统的有限短时间控制问题,并得到了较为广泛的应用。

所谓的有限短时间稳定,是指在一个有限的时间区域内,系统的状态轨线始终不脱离预先给定的范围。需要指出的是,本书所研究的有限短时间稳定的概念不同于文献[74]～[78]研究的有限短时间稳定,后者所研究的有限短时间稳定,指的是系统的状态在有限的时间内达到平衡点并永远驻留,实际上考查的是系统在“有限无穷时间区间”内的状态行为。因此,本书的有限短时间控制理论适用于短时间的控制系统,如通信网络[79]、飞行器控制[80]和 ATM 网络控制系统[81]。由于研究的是系统在有限的短时间区间内的状态行为,因此需要预先给出要考察的时间区间。通常意义下的 Lyapunov 渐近稳定理论研究的是系统在无穷时间区间内的状

态行为。如果将有限的时间区间推广到无穷时间区域内，二者就具有相通性。可以说，Lyapunov 渐近稳定是有限短时间稳定的一个特例，关于这一点，本书第 2 章会给出具体的说明。其次，研究有限短时间稳定，需要根据实际的应用要求对系统的状态轨线预先给定界限，而通常意义下的稳定虽然也要求系统的状态轨线有界，并没有预先给定固定值的要求。所以，和 Lyapunov 渐近稳定性相比，有限短时间稳定关注的是系统状态偏离平衡点的位置，即超调量。再者，有限短时间理论与不变集原理也不相同，如果一个集合称为系统的不变集，不仅要求系统的初始状态属于这个集合，并要求任意时刻的状态都属于这个集合。显然这更多考虑的是无限区间的稳定性特性，属于一个空间上的概念。

提出"短时间稳定性"的概念后，Dorato 将有限短时间的相关结论推广到线性时变系统[82,83]。随后，Weiss 和 Infante 在有限短时间稳定性理论的基础上，引入了有限短时间收敛稳定性[84,85]的概念，并将结论推广到非线性系统中，提出了所谓的有限短时间有界[86]概念。1969 年，上述很多成果被 Michel 和 Wu 分别用于离散时间系统[87]。

众所周知，控制器的设计也是控制理论中一个很重要的问题。在 1969 年，Garrand 等较早地研究有限短时间稳定控制设计问题[88]。有趣的是，这篇发表于第四届 IFAC 会议上的论文，关注的是非线性系统有限短时间控制与综合。在随后的研究成果中，他将该论文的主要结论进行了分析和扩展，给出了进一步的系统控制综合结论[89]。直到 1974 年，Filippo 和 Dorato 等才对线性系统的控制器设计问题进行了分析研究，设计出来使得系统有限短时间稳定，且满足线性二次性能指标的控制器，并将结果应用到了航天飞机的控制系统[80]中。随后，到了 1977 年，Grlljie 把有限短时间稳定概念应用到自适应系统的控制器设计[90]中，得到了比较好的结论。遗憾的是，在以上关于有限短时间稳定性和控制器设计的许多成果中，虽然给出了一些很好的方法，但是在实际过程中，这些方法在计算上难以得到实现。

随着 LMI 理论的出现，关于有限短时间稳定性和控制器设计的成果就很容易计算和实现。最早用 LMI 理论来研究有限短时间稳定性分析和控制器设计的论文发表于 1997 年的第 36 届国际 CDC 会议上，在该文中，Dorato 等[91]运用 LMI 技术设计了线性系统状态反馈有限短时间镇定的控制律，设计出了满足系统有限短时间稳定的状态反馈控制器。随后，该结论被应用到离散系统中，并在 ATM 网络[81]中得到了很好的运用。2005 年，Onori 和 Dorato 等在线性系统的相关结论的基础上，应用反馈线性化的方法，提出了具有固定驻留时间的非线性系统有限短时间收敛稳定概念[92]。在第 46 届国际 CDC 会议上，Amato 等发表论文研究了线性系统的有限短时间稳定性问题[93]。需要指出的是，在该文中，作者采取不同于二次型 Lyapunov 函数的方法，首次采用多面 Lyapunov 函数，即系统的初始状态

和状态轨线相对平衡点的偏移区域都是用椭圆体来描述的。因为论文中研究的有限短时间稳定性的初始值域和状态轨迹域都是用多面体来描述的，所以采用该方法，不需要对系统的状态变量做更多的现实中需要的限制。其他关于线性和非线性系统的有限短时间稳定性分析与控制器的设计的结论可以参见文献[94]～[106]。

与常规的非随机系统不同，随机 Markov 跳变系统需要考虑到子系统之间的随机切换，需要考虑到随机因素的影响。因此，如何分析跳变系统的有限短时间控制问题，以及如何给出比较合理的定义，是分析此类问题的关键。为此，何舒平和刘飞首先给出连续和离散线性随机跳变系统有限短时间稳定、有界和镇定的定义，并设计了系统的镇定控制器[107]。提出随机跳变系统有限短时间稳定相关概念后，进而将线性 Markov 跳变系统有限短时间稳定性的主要论点推广到不确定随机 Markov 跳变系统，在关于不确定跳变系统的研究中，将不确定性参数引入状态量和控制量中，研究了该类线性连续随机跳变系统基于状态反馈的有限短时间镇定问题[108]，并在仿真示例中，给出了优化分析结论。在此基础上，Luan 等研究了随机跳变系统在切换概论部分未知情况的有限短时间稳定问题[109]，相关结论被 Zuo 等推广到离散随机跳变系统中[110,111]。进而，Ma 和 Jia 研究了随机跳变系统的输入输出有限短时间稳定问题[112]，Wen 等研究了一类含时变时滞的离散随机跳变系统的有限短时间稳定和镇定问题[113]，相关结论被推广到广义随机跳变系统[114]和 Itō 随机跳变系统[115]中。

为了进一步研究随机跳变系统的控制器综合问题，He 和 Liu 将鲁棒 H_∞ 控制性能指标引入有限短时间控制中，重新定义 H_∞ 控制性能指标，并要求系统的输出能量对噪声能量的期望比值在有限的时间内就能趋近于一个给定的常数，或者一个优化的常数值，从而设计了一类时滞随机跳变系统的有限短时间时滞 H_∞ 控制器[116]，进而研究了时滞随机跳变系统的基于观测器的状态反馈控制器设计问题[117]。在此基础上，关于有限短时间控制的相关结论被应用到离散跳变系统[118,119]、时变时滞系统[120]和增益调度控制系统[121,122]。

状态估计和滤波问题是系统控制理论和信号处理与信息融合的一个重要分支。在很多的工业应用中，系统中含有不确定参数，精确的系统模型通常难以获得，从而在控制理论的研究中，常采用鲁棒滤波方法，主要的鲁棒滤波方法包括 H_∞ 估计和 L_2-L_∞ 估计方法等。在有限短时间稳定、镇定和控制分析的基础上，文献[123]～[125]分别研究时滞 Markov 跳变系统的有限短时间 H_∞ 滤波和 L_2-L_∞ 滤波问题。针对随机切换概论部分未知情形，文献[126]和[127]分别设计了系统的有限短时间 H_∞ 滤波器。进而，相关结论被推广到有限短时间观测器设计[128]和离散时滞跳变系统[129]中。

其实，在跳变系统控制领域中，如果模态之间切换的子系统是非线性的，可以

称此类系统为非线性跳变系统。在现有的结论中，有两个很好的工具来分析此类系统：一个是采用模糊控制的方法；另一个是采用神经网络的方法。为了将研究结论应用到非线性跳变系统中，将低阶非线性跳变系统模糊化，采用模糊控制方法，设计了全局有限短时间镇定控制器、H_∞ 控制器和鲁棒滤波器。关于模糊跳变系统的有限短时间稳定性、控制器设计和滤波分析结论可以参见文献[58]、[130]～[139]；关于跳变神经网络的有限短时间稳定性、控制器和滤波分析结论可以参见文献[140]～[154]。

1.3 Markov 跳变系统的主要概念

给定一个连续随机系统概率空间 $\Sigma_c:(\Omega,F,P_r)$，其中 Ω 是样本空间，F 是事件场，P_r 是定义在事件 F 上的测度概率。取 $\{r_t,t\geqslant 0\}$ 为有限集合 $M=\{1,2,\cdots,N\}$ 中随时间 t 取值的 Markov 随机过程。一般地，称 r_t 为系统的模态，其跳变转移概率矩阵为 $\Pi=(\pi_{ij})(i,j\in M)$，跳变转移率遵循如下表达式：

$$P_r\{r_{t+\Delta t}=j\,|\,r_t=i\}=\begin{cases}\pi_{ij}\Delta t+o(\Delta t), & i\neq j\\ 1+\pi_{ii}\Delta t+o(\Delta t), & i=j\end{cases} \tag{1.3.1}$$

式中，$\Delta t\to 0$ 且有 $\Delta t\to 0$ 时 $o(\Delta t)/\Delta t\to 0$；$\pi_{ij}$ 表示从模态 i 跳变到模态 j 的转移概率；当 $i\neq j$ 时，$\pi_{ij}\geqslant 0$，并且有 $\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\pi_{ij}=-\pi_{ii}$ 成立。

对于离散随机系统概率空间 $\Sigma_d:(\Omega,F,P_r)$，可以定义其转移概率为

$$P_r\{r_{k+1}=j\,|\,r_k=i\}=p_{ij} \tag{1.3.2}$$

式中，$p_{ij}>0$，$\forall\, i,j\in M$，$\sum\limits_{j=1}^{N}p_{ij}=1$，模态 r_k 是随着时间 k 在有限集合 $M=\{1,2,\cdots,N\}$ 中取值的 Markov 链。

考虑如下的连续时间线性跳变系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(r_t)x(t)+B(r_t)u(t)+B_d(r_t)d(t)\\ x(t)=x_0,r_t=r_0,t=0\end{cases} \tag{1.3.3}$$

式中，$x(t)\in\Re^n$ 为系统的状态向量；$u(t)\in\Re^m$ 为系统的控制向量；$d(t)\in\Re^p$ 为未知输入信号包括扰动、噪声等；x_0、r_0 分别为系统的初始状态和初始模态；$A(r_t)$、$B(r_t)$、$B_d(r_t)$ 分别为已知的与模态 r_t 相关的适当维数的系数矩阵。

对于离散系统状态，考虑如下离散时间线性跳变系统：

$$\begin{cases}x_{k+1}=A(r_k)x_k+B(r_k)u_k+B_d(r_k)d_k\\ x_k=x_0,r_k=r_0,k=0\end{cases} \tag{1.3.4}$$

式中，$x_k\in\Re^n$ 为系统的状态向量；$u_k\in\Re^m$ 为系统的控制向量；$d_k\in\Re^p$ 为未知输入信号包括扰动、噪声等；x_0、r_0 分别为系统的初始状态和初始模态；$A(r_k)$、$B(r_k)$、

$B_d(r_k)$分别为已知的与模态 r_k 相关的适当维数的系数矩阵。

若取 $u(t)=0, d(t)=0, u_k=0, d_k=0$，可以得到如下关于跳变系统(1.3.3)和系统(1.3.4)的随机稳定性定义。

定义 1.3.1　跳变系统(1.3.3)对于任意时刻 $t\geqslant 0$ 和所有的模态是随机稳定(stochastically stable，SS)的，如果存在一个有限的正数 $M(x_0,r_0)$，对于任意的初始状态和模态(x_0,r_0)，均有如下公式成立：

$$E\left[\int_0^\infty \|x(t)\|^2\mathrm{d}t \,|\, x_0,r_0\right]\leqslant M(x_0,r_0) \tag{1.3.5}$$

定义 1.3.2　跳变系统(1.3.3)对于任意时刻 $t\geqslant 0$ 和所有的模态是均方稳定(mean square stable，MSS)的，如果对于任意的初始状态和模态(x_0,r_0)，均有如下公式成立：

$$\lim_{t\to\infty} E\|x(t)\|^2=0 \tag{1.3.6}$$

定义 1.3.3　跳变系统(1.3.3)对于任意时刻 $t\geqslant 0$ 和所有的模态是均方指数稳定(mean exponentially stable，MES)的，如果存在正数 α 和 β，对于任意的初始状态和模态(x_0,r_0)，均有如下公式成立：

$$E[\|x(t)\|^2 \,|\, x_0,r_0]\leqslant a\|x_0\|^2\mathrm{e}^{-\beta t} \tag{1.3.7}$$

事实上，连续时间跳变系统稳定性的三个基本定义是等价的。关于这一点，可以参考文献[9]～[16]。

同样，对于离散时间跳变系统，也可以得到如下等价的稳定性定义。

定义 1.3.4[16,17]　对于离散时间跳变系统，以下定义是等价的。

(1) 跳变系统(1.3.4)对于任意采样时刻 $k\geqslant 0$ 和所有的模态是随机稳定的，如果存在一个有限的正数 $M(x_0,r_0)$，对于任意的初始状态和模态(x_0,r_0)，均有如下公式成立：

$$\sum_{k=0}^{\infty}E[\|x_k\|^2 \,|\, x_0,r_0]\leqslant M(x_0,r_0) \tag{1.3.8}$$

(2) 跳变系统(1.3.4)对于任意时刻 $k\geqslant 0$ 和所有的模态是均方稳定的，如果对于任意的初始状态和模态(x_0,r_0)，均有如下公式成立：

$$\lim_{k\to\infty} E\|x_k\|^2=0 \tag{1.3.9}$$

(3) 跳变系统(1.3.4)对于任意时刻 $k\geqslant 0$ 和所有的模态是均方指数稳定的，如果存在正数 $\alpha\geqslant 1$ 和 $0<\beta<1$，对于任意的初始状态和模态(x_0,r_0)，均有如下公式成立：

$$E[\|x_k\|^2 \,|\, x_0,r_0]\leqslant a\beta^k\|x_0\|^2,\quad k=0,1,\cdots \tag{1.3.10}$$

定义 1.3.5[16]　如果连续时间跳变系统(1.3.3)存在不确定性，即

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=[A(r_t)+\Delta A(r_t)]x(t)+[B(r_t)+\Delta B(r_t)]u(t)+[B_d(r_t)+\Delta B_d(r_t)]d(t)\\ x(t)=x_0, r_t=r_0, t=0\end{cases} \tag{1.3.11}$$

式中，$\Delta A(r_t)$、$\Delta B(r_t)$和 $\Delta A_d(r_t)$是系统模型中的不确定时变矩阵。那么，以下定义是等价的：

(1) 跳变系统(1.3.11)对于任意时刻 $t\geqslant 0$ 和所有的模态是鲁棒随机稳定(robustly stochastically stable, RSS)的，如果存在一个有限的正数 $M(x_0, r_0)$，对于任意的初始状态和模态(x_0, r_0)，均有式(1.3.5)成立。

(2) 跳变系统(1.3.11)对于任意时刻 $t\geqslant 0$ 和所有的模态是鲁棒均方稳定(robustly mean square stable, RMSS)的，如果对于任意的初始状态和模态(x_0, r_0)，均有式(1.3.6)成立。

(3) 跳变系统(1.3.11)对于任意时刻 $t\geqslant 0$ 和所有的模态是鲁棒均方指数稳定(robustly mean exponentially stable, RMES)的，如果存在正数 α 和 β，对于任意的初始状态和模态(x_0, r_0)，均有式(1.3.7)成立。

定义 1.3.6[16]　对于给定的反馈控制律 $u(t)=K(r_t)x(t)$，以下定义是等价的：

(1) 跳变系统(1.3.3)对于任意时刻 $t\geqslant 0$ 和所有的模态是随机镇定(stochastically stabilizable)的，如果存在一个有限的正数 $M(x_0, r_0)$，对于任意的初始状态和模态(x_0, r_0)，均有式(1.3.5)成立。

(2) 跳变系统(1.3.3)对于任意时刻 $t\geqslant 0$ 和所有的模态是均方镇定(mean square stabilizable)的，如果对于任意的初始状态和模态(x_0, r_0)，均有式(1.3.6)成立。

(3) 跳变系统(1.3.3)对于任意时刻 $t\geqslant 0$ 和所有的模态是均方指数镇定(mean exponentially stabilizable)的，如果存在正数 α 和 β，对于任意的初始状态和模态(x_0, r_0)，均有式(1.3.7)成立。

同样，对于离散时间跳变系统，可以得到以上类似的结论。

定义 1.3.7　在 Euclidean 空间 $\{\Re^n\times M\times\Re_+\}$ 上，引入系统的 Lyapunov-Krasovskii 泛函 $V[x(t), r_t=i, t>0]=V[x(t), i]$，定义其弱无穷小算子[5,9,15,16]为

$$\Im V[x(t), i, t]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E\{V[x(t+\Delta t), r_{t+\Delta t}, t+\Delta t]-V[x(t), i, t]\} \tag{1.3.12}$$

引理 1.3.1[6]　系统随机稳定意味着该系统是几乎渐近稳定(almost asymptotically stable, AAS)的。

引理 1.3.2[6]　跳变系统(1.3.3)是随机稳定的，如果存在一组正定对称矩阵 $P_i, i\in M$，使得

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}P_j<0 \tag{1.3.13}$$

在系统控制研究中，经常遇到二次非线性矩阵不等式。一般地，可以应用如下

的 Schur 补引理[155-157]进行转化，从而使 LMI 在控制理论研究中的应用范围得到了扩展。该引理的基本思想可以表示如下。

引理 1.3.3　对于对称矩阵 $F(x)=\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^{\mathrm{T}}(x) & R(x) \end{bmatrix}$，如果 $Q(x)$是方阵，与 $R(x)$和$S(x)$都是变量 x 的仿射函数，则以下三个条件是等价的：

(1) $F(x)<0$

(2) $\begin{cases} Q(x)<0 \\ R(x)-S^{\mathrm{T}}(x)Q^{-1}(x)S(x)<0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} R(x)<0 \\ Q(x)-S^{\mathrm{T}}(x)R^{-1}(x)S(x)<0 \end{cases}$

基于此，本书给出将要用到的一些常用矩阵不等式结论[155-157]。

引理 1.3.4　给定适当维数的矩阵 X 和 Y，均有 $X^{\mathrm{T}}Y+Y^{\mathrm{T}}X\leqslant X^{\mathrm{T}}X+Y^{\mathrm{T}}Y$ 成立。

引理 1.3.5　若 X、Y 和 Q 是具有适当维数的矩阵，且 Q 是正定对称矩阵，那么总有矩阵不等式 $X^{\mathrm{T}}Y+Y^{\mathrm{T}}X\leqslant X^{\mathrm{T}}QX+Y^{\mathrm{T}}Q^{-1}Y$ 成立。

引理 1.3.6　给定适当维数的矩阵 Y、H 和 E，其中 Y 是对称的，那么对所有满足 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$ 的矩阵 F，均有 $Y+HFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}<0$ 成立，当且仅当存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得 $Y+\varepsilon HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E<0$。

引理 1.3.7　给定适当维数的矩阵 Y、H、E 和 R，其中 Y 和 R 是对称的，且 $R>0$，则对所有满足 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant R$ 的矩阵 F，均有 $Y+HFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}<0$ 成立，当且仅当存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得 $Y+\varepsilon HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}RE<0$。