



BIANFEN JIANJIN

JUNYUNHUA LILUN JI ZAI FUHECAILIAO
XIGUANLIXUE ZHONG DE YINGYONG

钟轶峰 / 著

变分渐近均匀化理论

及在复合材料细观力学中的应用



科学出版社

变分渐近均匀化理论及在复合 材料细观力学中的应用

钟轶峰 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为克服现有细观力学模型依赖各种先验性假设的缺陷,利用细宏观尺度比作为小参数对能量泛函进行渐近扩展和变分分析,建立了一种通用的细观力学建模框架——单胞均匀化的变分渐近法(VAMUCH, variational asymptotic method for unit cell homogenization),并基于该框架构建各种复合材料的细观力学模型。与现有模型相比,构建模型的优点是:①仅引入细观力学的两个基本假设;②具有固有的变分性质,可直接使用数值方法求解;③可同时计算不同方向的材料属性,相比需在不同加载条件下进行重复运行的有限元细观力学方法更有效;④材料有效属性和局部场的精度直接与波动函数相关,不需要平均应力应变等后处理计算。

本书既可作为高等工科院校力学专业的教材或教学参考书,也适用于从事复合材料性能研究的技术人员进行理论研究和实验研究工作中参考和自学。

图书在版编目(CIP)数据

变分渐近均匀化理论及在复合材料细观力学中的应用 / 钟轶峰著. — 北京: 科学出版社, 2016.11

ISBN 978-7-03-050852-2

I. ①变… II. ①钟… III. ①复合材料力学 IV. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 281912 号

责任编辑: 杨 岭 朱小刚 / 责任校对: 葛茂香

责任印制: 余少力 / 封面设计: 墨创文化

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年11月第一版 开本: B5 (720×1000)

2016年11月第一次印刷 印张: 11 1/4 彩插: 14面

字数: 230千字

定价: 70.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

复合材料具有质量轻、可设计性强、力学性能和物理性能良好等特点，在航空航天、机械、土木工程领域有广泛的应用。除承受各种复杂载荷外，复合材料结构还受温度等环境因素的影响，这些环境因素通过各种不同的机制对复合材料的力学性能产生影响，因此对复合材料及其结构在多场耦合条件下的性能表征和损毁机理的研究需求日趋迫切。对复合材料及结构进行多尺度建模与计算，可以更加准确地表征复合材料的性能及预报材料在一定工况下的响应规律，为依赖于微结构的材料性能优化提供有力的支持，使我们可以基于多尺度计算，在材料制备前进行加工工艺和微结构设计。

在众多跨尺度计算机方法中，变分渐近分析方法是一种适用于周期性构造复合材料性能表征与结构分析的通用、高效、精确的方法。其基本思想是，材料性能的计算和预测沿着从细观到宏观这一过程，采用均匀化方法，由细观尺度下的单胞计算出宏观材料的均匀化性能参数；而结构物理、力学行为的计算与预测则是从宏观平均场方程出发，利用变分渐近展开技术，计算出宏观尺度下的物理、力学量。本书基于变分渐近分析方法预测复合材料多场耦合有效性能和重构局部多物理场分布，并以此为基础模拟复合材料宏观结构在多物理场下的有效响应规律。该方法既能够考虑细观结构特征对宏观性能的影响，又能够在结构分析中获得宏观应力、应变场的同时，获得细观应力、应变场，为复合材料的优化设计和损伤分析打下良好的基础，研究结果具有重要的理论意义和工程应用价值。

第一，本书基于变分渐近均匀化方法建立复合材料热弹性细观力学模型。从非均质连续体控制热弹耦合问题的总能量泛函入手，用场变量波动函数代替能量泛函细观位移函数中的系数作为未知量，利用细、宏观尺度比作为小参数对该未知量进行渐近分析，得到场变量相应的渐近展开式，从而将细观均匀化及局部涨落问题转换为约束条件（位移、温度场在子胞边界上的连续条件）下泛函最小化——取驻值求解波动函数问题；将该方法与有限元方法相结合推导出离散形式泛函的最小化求解过程。应用该模型分析典型复合材料的有效属性和非均质扰动局部场。通过与细观力学有限元法的结果和试验值对比分析表明，在保证计算精度不变的前提下，构建的模型可大大提高计算效率，并可考虑纤维复杂截面形状和排列方式对复合材料热—机耦合性能的影响。

第二，基于变分渐近法建立预测非均匀电磁弹性材料有效属性和局部多物理场的细观力学模型。从非均匀连续体的总电磁焓能量泛函入手，利用细观尺度远

小于材料宏观尺度的特点，以约束条件下能量泛函最小化为原则建立电磁弹性材料细观力学模型。为分析工程应用中实际的微观结构，使用有限元技术实现相应的数值模拟。以典型电磁弹性复合材料为例，分析了该类材料的全耦合有效属性、磁电耦合效应和极化方向影响，并将预测的多物理场行为与 RVE 有限元计算结果进行了对比，验证了模型的准确性和有效性。

第三，基于变分渐近法建立具有周期性微结构的金属基复合材料(MMCs)细观力学模型及相应的增量方程，以准确预测其典型的热弹塑性行为。利用细、宏观尺度比很小的特点，对单胞变分能量泛函变化进行渐近扩展，计算得到有效瞬时弹塑性刚度矩阵和热应力矩阵；利用迭代均质化及局域化技术模拟金属基复合材料的非线性热弹塑性性能，并通过有限元技术实现相应的数值模型。算例分析表明：该模型能较好地预测金属基复合材料的初始屈服面和模拟热弹塑性耦合行为，研究成果为金属基复合材料的进一步研究和实际应用提供了技术支撑。

第四，岩土类材料内固、液相不同属性产生的各向异性和多孔微结构的不均匀性使得材料的细观力学特性计算变得十分复杂。为准确预测岩土类材料的有效弹性性能和细观应力应变场，基于 Biot 多孔弹性介质理论，建立可描述岩土类多孔材料固、液相运动的能量泛函和相应的多孔弹性本构关系；利用细、宏观尺度比作为小参数将能量变分泛函渐近扩展为系列近似泛函；以场变量波动函数为未知量，通过对近似泛函的最小化(求驻值)得到波动函数的解析解，从而建立逼近物理和工程真实性的细观力学模型，并通过有限元技术得以数值实现。通过充液岩土类材料细观力学特性算例表明：与经典均匀化理论(将液体类比为具有较高泊松比的固体材料)相比，基于变分渐近均匀化细观模型预测的岩土类材料细观力学特性更精确，尤其是能准确重构多孔微结构内局部应力应变场分布，为损伤破坏、局部断裂分析奠定了坚实基础。

第五，基于变分渐近均匀化方法建立能预测金属芯压电电压磁纤维增强聚合物基复合材料(MPPF-GMCs)电-磁-热-黏弹性-塑性全耦合响应的细观力学模型。考虑材料的时变和非线性性质，建立与增量过程有关的瞬时切线电-磁-力耦合矩阵，并通过有限元技术进行数值求解。通过算例表明：构建的模型可用于模拟不同多物理场下 MPPF-GMCs 的有效响应，可有效捕捉多相智能材料的率相关、非线性行为。

本书第 1~10 章由钟轶峰执笔。矫立超、杨文文、秦文正、李潇、杨旦旦等参加了编审工作。

限于水平，书中可能存在错误与不妥之处，恳请广大同行和读者指正。

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究现状	3
1.2.1 体积平均值和有效属性	3
1.2.2 界限法	6
1.2.3 解析法	10
1.2.4 数值方法	13
1.3 动机和目标	15
第 2 章 复合材料热传导性能的变分渐近均匀化细观模型	20
2.1 理论公式	21
2.2 二元复合材料解析求解	23
2.3 各向异性复合材料的有限元求解	25
2.4 算例	27
2.4.1 纤维增强复合材料的有效导热系数	27
2.4.2 颗粒增强复合材料的有效导热系数	29
2.5 局部热流场	32
2.6 本章小结	34
第 3 章 复合材料热弹耦合变分渐近均匀化细观力学模型	36
3.1 理论公式	38
3.2 细观问题的有限元求解	41
3.3 算例	43
3.3.1 局部应力场	44
3.3.2 热膨胀系数	45
3.3.3 有效比热	48
3.3.4 局部热应力场	49
3.4 本章小结	51
第 4 章 金属基复合材料热弹塑性行为的细观力学分析	54
4.1 理论公式	55
4.2 有限元数值求解	58
4.3 初始屈服面预测	61

4.4	非均匀材料弹塑性性能模拟	62
4.5	算例	62
4.5.1	材料属性	62
4.5.2	初始屈服面	64
4.5.3	弹塑性行为	69
4.5.4	热弹塑性行为	71
4.6	本章小结	73
第5章	智能材料电—磁—热—弹耦合性能的细观力学模型	75
5.1	理论公式	78
5.2	有限元实现	82
5.3	算例	84
5.3.1	压电压磁两相复合材料	84
5.3.2	压电纤维增强聚合物基体复合材料	90
5.3.3	电磁弹三相复合材料	92
5.3.4	参数研究	97
5.4	本章小结	100
第6章	各向异性多孔介质变分渐近均匀化细观模型	102
6.1	问题的提出	104
6.2	变分渐近均匀方法	105
6.3	均匀化问题的有限元法	108
6.4	算例	110
6.4.1	不同均匀化理论比较	111
6.4.2	颗粒增强复合材料	114
6.4.3	充液腔有效属性	117
6.4.4	细观应力分布	118
6.4.5	骨小板的多孔弹性属性	119
6.5	本章小结	125
第7章	MPPF增强聚合物基复合材料细观力学模型	128
7.1	概述	128
7.2	组分材料的增量本构方程	129
7.2.1	线性热黏弹性聚合物本构方程	129
7.2.2	压电压磁材料本构方程	132
7.2.3	金属材料的本构方程	132
7.3	MPPF增强聚合物基复合材料细观力学模型	133
7.3.1	广义增量本构方程	133
7.3.2	变分渐近均匀化分析	135

7.3.3	有限元实现	137
7.4	数值实现	139
7.4.1	组分材料属性	139
7.4.2	模型验证	142
7.4.3	含金属芯压电和压磁纤维(MPPF)增强复合材料的有效响应 ...	144
7.5	本章小结	147
第8章	各细观力学模型预测能力比较	149
8.1	概述	149
8.2	算例	150
8.2.1	Eshelby 问题	150
8.2.2	方形单胞夹杂方形纤维结构	153
8.2.3	X形细观结构	154
8.3	本章小结	159
第9章	VAMUCH 实际应用	161
9.1	本构方程	161
9.2	单胞的周期性边界条件	161
9.3	估算不同有效属性的有限元模型和边界条件	163
9.4	FEM 与 VAMUCH 的区别	164
第10章	结论及建议	169
10.1	结论	169
10.1.1	理论不同	169
10.1.2	实际工程应用不同	171
10.2	建议	172
彩色图版	173

第 1 章 绪 论

1.1 研究背景

复合材料具有低重量-刚度比、疲劳寿命长和耐腐蚀等优点,制作工程构件时使用复合材料可得到更好的性能,在耐磨耗、保温隔音、低热膨胀系数、低导热系数等其他特殊领域也得到应用。复合材料在微观层面上的非连续性、各向异性以及各相的相互作用表现出复杂的宏观和细观特征,这给物理、材料力学、应用数学和工程人员提出了新的挑战和研究课题,如各组分单元的连接、协同和相互作用,材料在整体上表现出的有效性能等,都需要进行深入研究。近年来,迅速崛起的电磁弹性复合材料,不仅具有良好的力学性能,而且赋予了一些新功能,如电磁弹性响应等,这些智能材料表现出的多物理性能往往是互相耦合的,需要在宏观和细观层面对其有效性能、耦合机理和变形特征进行定性和定量研究。

直接分析此类复合材料结构,计算成本高、耗时长。采用实验方法测试复合材料性能受到测试体积和成本的限制,难以对所有复合材料进行完整测试。值得庆幸的是,复合材料具有简化分析所必要的特性,即统计上的均匀性^[1],由此可定义代表整个复合材料平均值的代表体元(RVE)^[2]。该 RVE 包含足够数量的夹杂,以使表观整体模量与边界条件有效地相互独立。在本研究中,RVE 在概念上类似于晶体单胞^[3],是构建复合材料“格”的基本周期性单元。基于 RVE 基本概念建立的细观力学模型,可在没有显著精度损失的前提下简化分析。细观力学模型可将具有非均匀微观结构的复合材料分析解耦为局部细观力学分析和全局分析。全局分析需从细观力学分析中得到有效属性,通过全局分析得到的响应可回代重构关系(细观力学分析得到)以计算微观结构内的逐点信息,相关流程如图 1-1 所示。

一般而言,由于在形成或加工过程中各种随机因素的影响,多数复合材料本质上都是非均匀的,只不过非均匀程度不同而已。复合材料多为共混/复合的多

相体系，其组分材料性能以及夹杂的形状、几何尺寸、分布等都将影响其宏观性能。复合材料可看做宏观和细观两个层次的材料，宏观上有总体应力、应变、弹性模量等；细观上有纤维/颗粒应力、应变、弹性模量等。摆在人们面前的问题不仅是预报复合材料的宏观力学性能，更重要的是通过细观力学的理论和方法，进一步探求其局部力学行为，并力图进行材料的优化设计。对复合材料行为进行有意义的研究必须借助细观力学，其核心任务是建立复合材料宏观性能和组分性能及其与细观结构的定量关系，揭示复合材料结构在一定工况下的响应规律及其本质，并回答诸如为什么该类复合材料具有如此高的强度、刚度、断裂韧性等此类问题。同时，为复合材料的优化设计、性能评价提供必要的理论依据及手段。从这一角度看，复合材料细观力学是有明确工程背景的，是复合材料发展的重要理论基础。

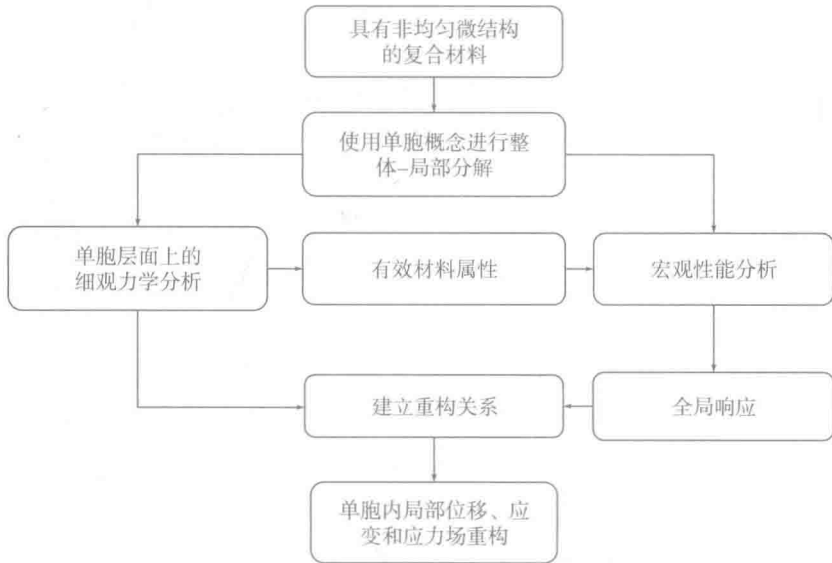


图 1-1 使用单胞概念进行非均匀微观结构分析的基本步骤

与结构尺寸相比，复合材料组分的尺寸通常很小。当采用传统数值方法(如有限元、边界元、离散元等)计算时，如果将材料微结构全部考虑进去会非常复杂，尽管随着更高性能计算机的出现，如此处理的计算成本依然很高；而采用解析方法来研究复合材料的力学性能具有很高的难度(尤其是对于三维问题)；采用试验方法的代价也非常高，这是因为复合材料在形成或加工过程中各种随机因素的影响，只有进行大量的重复试验才能得到有意义的结果，且试图通过实验测得所有材料性能是不现实的。因此，需要发展一套数值方法对复合材料的宏观性能

及其与微结构之间的关系进行有效模拟和相应分析。科学合理的数值模拟和计算，可以起到对试验的指导作用，并且在经试验验证后，可直接用于指导安全设计、生产等各方面，因而是一种当今力学学科中不可缺少的、有效的工具。建立复合材料的细观力学模型及其相应的分析手段是当前力学研究的前沿课题和重要方向之一。

借助于已得到迅猛发展的计算机硬件，通过建立在统计技术基础上的随机单胞模型和建立在变分渐近均匀化方法基础上的扩展有限元方法来定量描述复合材料微观结构参数与宏观有效性能的关系，可以正确预报复合材料的宏观性能，揭示复合材料细观结构的演化规律，促进固体力学在复合材料方面的发展，具有重要的理论意义。在工程应用上，还可以指导材料和结构的优化设计及强度分析，并能大大降低计算成本，提高设计效率，缩短设计周期，具有较高的工程应用价值。

1.2 研究现状

连续介质力学假设材料是均匀的，实际上是材料非均匀微结构性能的平均统计结果，无法给出微结构与宏观性能之间的关系。细观力学的主要研究目的之一就是从小观非均匀材料的微结构特征，如各组分的性能、形状、几何尺寸、分布和组分间的相互影响来推导材料的宏观有效性能（如弹性模量、泊松比、热膨胀和强度、电磁性能等）。自从1938年Taylor等在细观塑性理论方面的开创性工作奠定细观力学基础之后，20世纪50年代细观损伤力学已初具雏形，到70年代细观力学开始起飞，在之后的几十年里得到迅速发展，并一直成为近十年来固体力学研究方面最为活跃的领域之一。对细观力学有代表性的评论可参见文献[1]、文献[4]至文献[7]。现将比较有代表性的细观力学模型分述如下。

1.2.1 体积平均值和有效属性

从统计意义上讲，不同RVE均匀化后的有效属性没有本质区别。因此，非均匀复合材料可均匀化为具有相同有效属性的等效均匀材料。这种均匀化表现在体积积分平均上，RVE的平均应力和应变可表示为

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega \quad (1-1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (1-2)$$

式中 Ω ——代表体元的体积域。

细观力学的主要目的之一是得到材料的有效属性。复合材料的有效属性可直接定义或通过能量表达式定义。

1. 直接定义

弹性本构方程：

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{kl} \\ \bar{\epsilon}_{ij} &= S_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{kl}\end{aligned}\quad (1-3)$$

热弹性本构方程：

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{kl} - C_{ijkl}^* \alpha_{kl} \bar{\theta} \\ \bar{\epsilon}_{ij} &= S_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{kl} + \alpha_{ij}^* \bar{\theta}\end{aligned}\quad (1-4)$$

压电本构方程：

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{kl} - e_{ijk}^* \bar{E}_k \\ \bar{T}_i &= e_{ijk}^* \bar{\epsilon}_{kl} + k_{ij}^* \bar{E}_j\end{aligned}\quad (1-5)$$

电—磁—弹性本构方程：

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{kl} - e_{ijk}^* \bar{E}_k - q_{ijk}^* \bar{H}_k \\ \bar{T}_i &= e_{ijk}^* \bar{\epsilon}_{kl} + k_{ij}^* \bar{E}_j + a_{ij}^* \bar{H}_j \\ \bar{B}_i &= q_{ijk}^* \bar{\epsilon}_{kl} + a_{ij}^* \bar{E}_j + \mu_{ij}^* \bar{H}_j\end{aligned}\quad (1-6)$$

Fourier 热传导定律：

$$\bar{q}_i = -K_{ij}^* \bar{\varphi}_{,j} \quad (1-7)$$

式中 C_{ijkl} 、 S_{ijkl} ——四阶刚度和柔度系数；

α_{ij} ——热膨胀系数；

e_{ijk} 、 q_{ijk} ——三阶压电和压磁张量；

k_{ij} 、 μ_{ij} 、 a_{ij} ——二阶介电系数、磁通率和磁电耦合张量；

K_{ij} ——二阶热导张量；

σ_{ij} 、 ϵ_{ij} ——应力张量和应变张量；

ϵ_{kl} ——应变张量；

σ_{kl} ——应力张量；

θ ——误差；

E_k 、 E_j ——电场分量；

H_k 、 H_j ——磁场分量；

T_i 、 E_j (E_k)、 B_i 、 H_j (H_k)、 q_i 、 φ_{ij} ——电流密度、电场、磁场密度、磁场、热流和温度梯度矢量。

以上公式中的带星号项表示由细观力学模型计算的有效属性，上划线代表平均值，下同。

2. 能量表达式

弹性应变能和应变余能：

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} d\Omega = \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{kl} \Omega \quad (1-8)$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} S_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} d\Omega = \frac{1}{2} S_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{kl} \Omega \quad (1-9)$$

Helmholtz 自由能：

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + 2\beta_{ij} \epsilon_{ij} \theta + c_v \frac{\theta^2}{T_0} \right) d\Omega = \frac{1}{2} \left(C_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{kl} + 2\beta_{ij}^* \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\theta} + c_v^* \frac{\bar{\theta}^2}{T_0} \right) \Omega \quad (1-10)$$

其中，

$$\beta_{ij}^* = -C_{ijkl}^* \alpha_{kl}^* \quad (1-11)$$

式中 c_v ——比热；

c_v^* ——细观力学计算的比热。

压电材料电焓：

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D}^* \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \Omega \quad (1-12)$$

其中，

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{33} \quad E_1 \quad E_2 \quad E_3]^T \quad (1-13)$$

\mathbf{D} 为 9×9 阶弹性、压电和介电系数矩阵，可表示为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^T & -\mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

式中 \mathbf{C} —— 6×6 阶弹性刚度矩阵；

\mathbf{e} —— 6×3 阶压电耦合矩阵；

\mathbf{k} —— 3×3 阶介电常数矩阵。

电-磁-弹材料电磁焓：

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_{\parallel}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon}_{\parallel} d\Omega = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\parallel}^T \bar{\mathbf{L}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\parallel} \Omega \quad (1-15)$$

其中，

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\parallel} = [\varepsilon_{11} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{33} \quad E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad H_1 \quad H_2 \quad H_3]^T \quad (1-16)$$

L 为 12×12 阶弹性、压电、介电、压磁、磁电和磁能率系数矩阵，可表示为

$$L = \begin{bmatrix} C & e & -q \\ -e^T & -k & -a \\ -q^T & -a^T & -\mu \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

- 式中 C —— 6×6 阶弹性刚度矩阵；
- e —— 6×3 阶压电耦合矩阵；
- k —— 3×3 阶介电常数矩阵；
- q —— 6×3 阶压磁矩阵；
- a —— 3×3 阶磁电耦合矩阵；
- μ —— 3×3 阶磁通率矩阵。

有效热传导的能量积分定义为

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} K_{ij} \varphi_i \varphi_j d\Omega = \frac{1}{2} K_{ij}^* \bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_j \Omega \quad (1-18)$$

1.2.2 界限法

1. 混合率规则

基于等应力和等应变简化假设，Voigt 和 Reuss 分别建立了根据质量和组分材料性能预测复合材料有效性能的混合率规则。很多情况下混合率规则提供的上、下限差异很大，所以使用该方法必须格外小心。

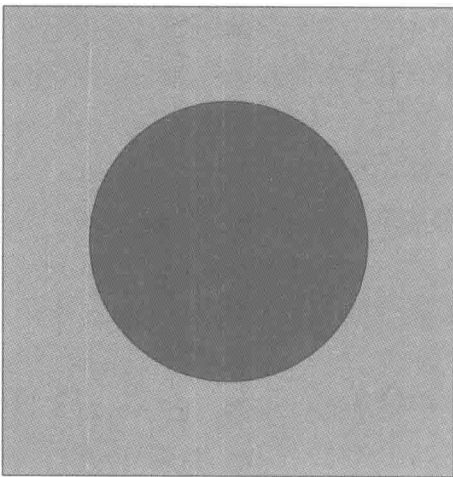


图 1-2 纤维增强复合材料典型的代表体元(圆形纤维呈矩形阵列)

众所周知，纤维增强复合材料的性能由体积分数、组分性能及空间排列控制。下面以如图 1-2 所示纤维增强复合材料典型的代表体元为例，说明如何使用混合率规则得到有效属性，其中纤维沿垂直于纸面方向无限长。

1) Voigt 混合率规则

1889 年 Voigt 做出了等应变假设，即假定在载荷作用下，非均匀材料内部各相的变形均相同，都等于复合体的平均应变，即 $\epsilon_{ij} = \bar{\epsilon}_{kl}$ 。用广义胡克定律可表示为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} = C_{ijkl}\bar{\epsilon}_{kl} \quad (1-19)$$

式中 σ_{ij} 、 C_{ijkl} 、 ϵ_{kl} ——坐标系的函数。

根据复合材料宏观平均应力和应变概念，可得到如下表达式：

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} C_{ijkl}\bar{\epsilon}_{kl} d\Omega = \left(\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} C_{ijkl} d\Omega \right) \bar{\epsilon}_{kl} = \bar{C}_{ijkl}\bar{\epsilon}_{kl} \quad (1-20)$$

式中 \bar{C}_{ijkl} ——复合材料刚度系数的体积平均值。

均匀化材料有效刚度系数 C_{ijkl}^* 为连接平均应力和应变的线性常数，其本构关系为

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^*\bar{\epsilon}_{kl} \quad (1-21)$$

由式(1-20)和式(1-21)可推导出：

$$C_{ijkl}^* = \bar{C}_{ijkl} = V_f C_{ijkl}^f + V_m C_{ijkl}^m \quad (1-22)$$

式中 V_f 、 V_m ——纤维和基体的体积分数；

C_{ijkl}^f 、 C_{ijkl}^m ——纤维和基体的弹性刚度系数。

2) Reuss 混合率规则

1929年 Reuss 给出了等应力假设，即假定在载荷作用下，非均匀材料内部各相的应力均相同，都等于复合体的平均应力。根据刚度系数可将应力—应变关系写为

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} = S_{ijkl}\bar{\sigma}_{kl} \quad (1-23)$$

根据平均应变概念，可得到：

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} S_{ijkl}\bar{\sigma}_{kl} d\Omega = \left(\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} S_{ijkl} d\Omega \right) \bar{\sigma}_{kl} = \bar{S}_{ijkl}\bar{\sigma}_{kl} \quad (1-24)$$

式中 \bar{S}_{ijkl} ——复合材料的体积平均值。

均匀材料的本构关系可描述为

$$\bar{\epsilon}_{ij} = S_{ijkl}^*\bar{\sigma}_{kl} \quad (1-25)$$

由式(1-24)和式(1-25)，可得到：

$$S_{ijkl}^* = \bar{S}_{ijkl} = V_f S_{ijkl}^f + V_m S_{ijkl}^m \quad (1-26)$$

式中 V_f 、 V_m ——纤维和基体的体积分数；

S_{ijkl}^f 、 S_{ijkl}^m ——纤维和基体的弹性刚度系数。

这种物理量平均的方法虽然和有效属性的平均化定义一致，但是与所观察到的物理现象本身和本构方程以及工程应用所依据的表观物理量存在差异。根据 Voigt 等应变假设和 Reuss 等应力假设，可导出有效体积模量和剪切模量，用最小势能原理和最小余能原理可证明，它们分别对应于真实弹性解的上、下限。

2. Hashin-Shtrikman 变分界限法

1962年, Hashin 和 Shtrikman 引入与各向同性均匀体具有相同几何形状和边界条件的参考介质, 将非均匀体的位移场、应力场和弹性模量分解成相应的参考介质量和扰动量, 采用变分法研究了边界条件和内部约束条件下多相复合材料有效弹性模量的上下限问题。Paul^[8]基于最小势能原理和余能原理得到合金材料的界限。当唯一可用的几何信息是体积分数的时, Hashin-Shtrikman 界限法是最佳的界限方法。当有附加信息(如夹杂形状和微结构几何形状)给出时, 该界限法可进一步完善。该界限法的进一步推导可参见文献 [1] 和文献 [9]。

1) 立方晶体

Hashin-Shtrikman 建立了比混合率规则更加完善的界限法^[10], 利用变分法研究了立方晶体的有效剪切模量。

下限:

$$G_{(-)}^* = G_1 + 3 \left(\frac{5}{G_2 - G_1} - 4\beta_1 \right)^{-1} \quad (1-27)$$

上限:

$$G_{(+)}^* = G_2 + 2 \left(\frac{5}{G_2 - G_1} - 6\beta_2 \right)^{-1} \quad (1-28)$$

式中 G_1 、 G_2 ——立方多晶体的两个剪切模量。

$$\beta_1 = -\frac{3(K + 2G_1)}{5G_1(3K + 4G_1)} \quad (1-29)$$

$$\beta_2 = -\frac{3(K + 2G_2)}{5G_2(3K + 4G_2)} \quad (1-30)$$

式中 K ——立方多晶体的体积模量。

K 与单立方晶体的体积模量相同, 可表示为

$$K = \frac{1}{3}(C_{11} + C_{12}) \quad (1-31)$$

式中 C_{11} 、 C_{12} ——单立方晶体的弹性模量。

为便于比较, 给出基于混合率规则得到的上、下界限。

下限(Reuss 界限):

$$G_{(-)}^* = \frac{5G_1G_2}{2G_2 + 3G_1} \quad (1-32)$$

上限(Voigt 界限):

$$G_{(+)}^* = \frac{1}{5}(2G_1 + 3G_2) \quad (1-33)$$

2) 统计意义上各向同性的复合材料

基于极化场概念建立统计意义上各向同性的复合材料界限^[11]。设 $K_1 < K_2$, $G_1 < G_2$, 则统计意义上均匀的两相复合材料体积模量和剪切模量界限为

$$K_{(-)}^* = K_1 + \frac{V_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3V_1}{3K_1 + 4G_1}} \quad (1-34)$$

$$K_{(+)}^* = K_2 + \frac{V_1}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3V_2}{3K_2 + 4G_2}} \quad (1-35)$$

$$G_{(-)}^* = G_1 + \frac{V_2}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{6V_1(K_1 + 2G_1)}{5G_1(3K_1 + 4G_1)}} \quad (1-36)$$

$$G_{(+)}^* = G_2 + \frac{V_1}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{6V_2(K_2 + 2G_2)}{5G_2(3K_2 + 4G_2)}} \quad (1-37)$$

式中 K_1 、 K_2 ——各组分的体积模量；

G_1 、 G_2 ——各组分的剪切模量；

V_1 、 V_2 ——各组分的体积分数。

3) 纤维增强复合材料

两相复合材料的平面应变体体积模量和横向剪切模量的界限^[12]为

$$K_{(-)}^* = K_1 + \frac{V_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{V_1}{K_1 + G_1}} \quad (1-38)$$

$$K_{(+)}^* = K_2 + \frac{V_1}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{V_2}{K_2 + G_2}} \quad (1-39)$$

$$G_{(-)}^* = G_1 + \frac{V_2}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{V_1(K_1 + 2G_1)}{2G_1(K_1 + G_1)}} \quad (1-40)$$

$$G_{(+)}^* = G_2 + \frac{V_1}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{V_2(K_2 + 2G_2)}{2G_2(K_2 + G_2)}} \quad (1-41)$$

式中 K_1 、 K_2 ——各组分的体积模量；

G_1 、 G_2 ——各组分的剪切模量；

V_1 、 V_2 ——各组分的体积分数。

这些边界都是基于各组分模量和体积分数建立起来的。