WEIJIFEN
JIAOCHENG

微积分教程

杨清霞◎编著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

WEIJIFEN
JIAOCHENG

微积分教程

杨清霞◎编著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程/杨清霞编著. —北京:中央民族大学出版社,2016.6
ISBN 978 - 7 - 5660 - 1191 - 6

Ⅰ.①微… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 117296 号

微积分教程

编 著 者	杨清霞
责任编辑	李 飞
封面设计	汤建军
出 版 者	中央民族大学出版社
	北京市海淀区中关村南大街 27 号 邮编:100081
	电话:68472815(发行部) 传真:68932751(发行部)
	68932218(总编室) 68932447(办公室)
发 行 者	全国各地新华书店
印 刷 厂	北京叶知舟数码快印有限公司
开 本	787×1092(毫米) 1/16 印张:12
字 数	220 千字
版 次	2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 5660 - 1191 - 6
定 价	48.00 元

前　言

高等数学已经成为大学的公共课。大学数学教学中的微积分课程是数学科学的重要分支，从其初始概念的提出到今天，在世界范围内已经形成非常完善的理论体系，在社会发展和各国的国家建设中发挥着不可取代和越来越重要的作用。许多学生在学习微积分时恐惧该学科对无穷性的分析和演算，产生了厌学和逃避的情绪。如何让微积分知识走下理论神坛，推动我国微积分教学向现代化、实用化方向发展，是大学微积分课程教学改革的重点，也是本书着力思考和进行突破的地方。

我从事高校数学教学十多年来，一直致力于面向数学基础参差不齐的学生，从事微积分、线性代数、概率统计等课程的知识传授工作，有丰富的高等数学教学经验。2007 年 9 月至 2008 年 8 月，本人被国家留学基金委公派出国留学，在美国著名常青藤高校康奈尔大学数学系学习访问一年。繁忙紧张的留学感受和在国内多层次的教学实践经验体会，使我萌发了从学生实际出发，按照新形势下教材改革的精神，为激发学生兴趣和帮助学生自学高等数学提供途径而编著本书的想法，并且通过不断努力，使想法变成了现实。在作为讲义的试行过程中，学生普遍反映良好。

对广大学生来讲，大学的数学教育不仅仅是基础技能教育，更是素质教育和思维培养。基于此，本书内容上力求简明、扼要，在叙述

中淡化细节，注重阐述数学思想，避免了过多的数学推导给学生来的的压力和恐惧，有助于学生从感性上产生对数学知识的理解和认同。本书在理论上保持了数学界一贯的完整性和严谨性。虽然章节不多，但承接有序。书中突出了对数学基本思想的理解，强调学生的数学思维训练。本书循序渐进，通俗易懂，例题习题设置典型丰富，在教材中把学习提要和学法建议传授给读者，有利于学生自主学习。同时逻辑清晰，内容紧凑，深入浅出，难度适中，也便于教师组织教学。

本书最大的特点是很好地架构起了大学数学和中学数学的桥梁，衔接自然顺畅，注重传授数学基础知识和培养数学人文素养的统一。作为一个大胆地尝试，为了强调积分与方程的关系，本书将微分方程放在不定积分和定积分之间进行介绍，希望能收到预期的教学效果。

本书属于基础课用书，可以作为大学本科预科、大学本科文、史、哲、语言等专业的数学教材，也可供高职、自考、专科的学生使用。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，教材中的不妥之处，恳请广大专家、同行和读者批评指正。

编　者

2016 年 2 月

目 录

例 2 求函数$f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$的单调区间.

解:

① 定义域为$(-\infty, +\infty)$,

② $f'(x) = \dfrac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}$,

③ 令$f'(x) = 0$得驻点$x_1 = \dfrac{2}{5}$; 又$x = 0$时导数不存在,

④

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	单增		单减		单增

【注】 用一阶可疑点把定义域分开后，可保证$f'(x)$在各个部分区间内保持固定符号，从而可用部分区间内某点导数值符号确定此区间导数符号.

下面介绍利用单调性证明不等式的方法.

要证明$x \in (a,b)$有$f(x) > g(x)$, 只需令$F(x) = f(x) - g(x)$,

求证$F'(x) > 0$且$F(a) \geq 0$即可.

事实上，由$F'(x) > 0$, 可知$F(x)$单调递增，从而$F(x) > F(a) \geq 0$,

则$F(x) = f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$.

例 3 求证：当 x >0 时，有$e^x > 1 + x$.

证明: 令$F(x) = e^x - 1 - x$, $x \in (0, +\infty)$.

$F'(x) = e^x - 1 > 0$, 故$F(x)$在$[0, +\infty)$上单增，又$F(0) = 0$,

所以$F(x) > F(0) = 0$, 从而$e^x > 1 + x$.

例 4 证明：当$x > 1$时, $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$.

证明: 令$f(x) = 2\sqrt{x} - \left(3 - \dfrac{1}{x}\right)$, 则$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}(x\sqrt{x} - 1)$,

因$f(x)$在$[1, +\infty]$上连续，在$(1, +\infty)$内$f'(x) > 0$, 因此在$[1, +\infty]$上

$f(x)$ 单调增加，从而当 $x > 1$ 时，$f(x) > f(1)$.

由于 $f(1) = 0$，故 $f(x) > f(1) = 0$，即 $2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right) > 0$，

亦即 $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}(x > 1)$.

二、曲线的凹凸性与拐点

函数的单调性反映在图形上，就是曲线的上升或下降．但是，曲线在上升或下降的过程中，还有一个弯曲方向的问题．例如，图 3—5 中有两条曲线弧，虽然它们都是上升的，但图形却有显著的不同，下面我们就来研究曲线的凹凸性及其判定法．

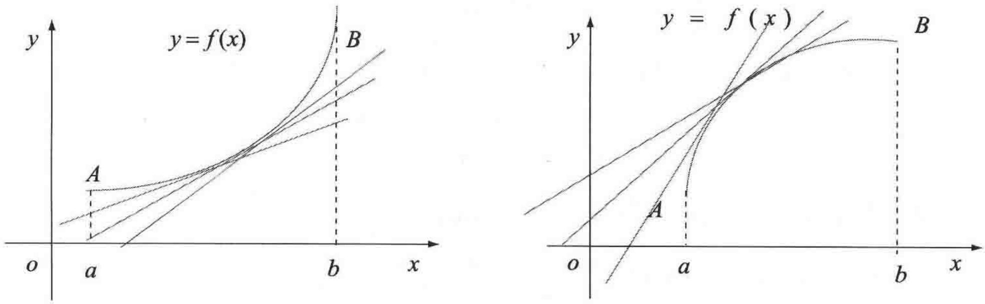

图 3—5

我们从几何上看到，在有的曲线弧上，如果任取两点，则联结这两点间的弦总位于这两点间的弧段的上方（图 3—6（a）），而有的曲线弧，则正好相反（图 3—6（b））．曲线的这种性质就是曲线的凹凸性．因此曲线的凹凸性可以用联结曲线弧上任意两点的弦的中点与曲线弧上相应点（即具有相同横坐标的点）的位置关系来描述，下面给出曲线凹凸性的定义．

定义 2 设$f(x)$在区间I上连续，如果

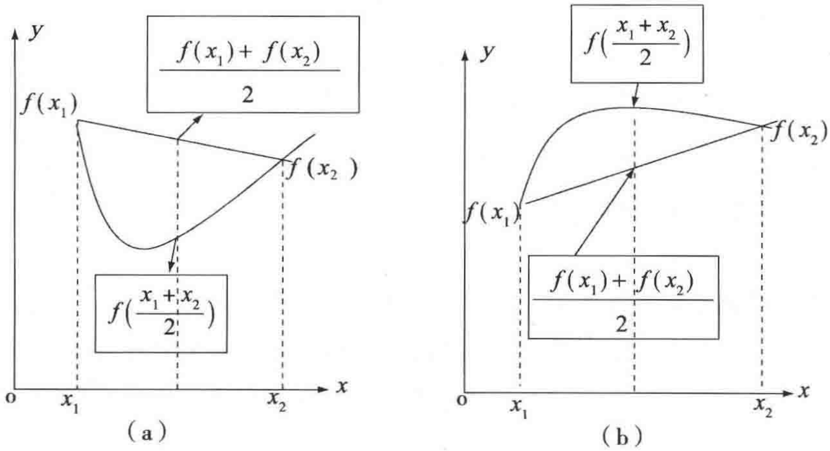

图 3—6

对I上任意两点x_1,x_2恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称$f(x)$在I上的图形是凹的；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称$f(x)$在I上的图形是凸的．

如果函数$f(x)$在I内具有二阶导数，那么可以利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性，这就是下面的曲线凹凸性的判定定理．我们仅就I为闭区间的情形来叙述定理，当I不是闭区间时，定理类同．

定理 2 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数，那么

(1) 若在(a,b)内$f''(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的；

(2) 若在(a,b)内$f''(x)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的．

证明：

(1) 设$x_1,x_2\in[a,b]$且$x_1<x_2$,记$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$,并记$x_0-x_1=x_2-x_0=h$,

则$x_1=x_0-h,x_2=x_0+h$.

在区间 $[x_1, x_0]$ 应用拉格朗日中值定理得

$$f(x_0) - f(x_0 - h) = f'(\xi_1)h \quad ①$$

其中 $x_1 < \xi_1 < x_0$.

在区间 $[x_0, x_2]$ 应用拉格朗日中值定理得

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(\xi_2)h \quad ②$$

其中 $x_0 < \xi_2 < x_2$.

② - ①式得

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]h \quad ③$$

③式右端继续应用拉格朗日中值定理得

$$f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1), (\xi_1 < \xi < \xi_2). \quad ④$$

由③和④可知

$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1)h > 0$，即

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

由定义可知曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内为凹.

(2) 同理可证.

定义 3　曲线上凹弧与凸弧的分界点称为曲线的拐点.

拐点既然是凹与凸的分界点，所以在拐点左右邻域 $f''(x)$ 必然异号，因而在拐点处 $f''(x) = 0$ 或 $f''(x)$ 不存在. 用二阶导数等于零的点和二阶导数不存在点划分函数定义域后，就可确定曲线的凹凸区间和拐点.

下面介绍曲线凹凸区间和拐点的确定方法.

定义 4　函数 $f(x)$ 的二阶导数等于零的点和二阶导数不存在的点统称为 $f(x)$ 的二阶可疑点.

【注】 曲线 $y = f(x)$ 拐点的横坐标是 $f(x)$ 的二阶可疑点，反之不然.

求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间和拐点的步骤：

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域；(2) 求 $f''(x)$；(3) 求 $f(x)$ 的二阶可疑点；

(4) 用 $f(x)$ 的二阶可疑点把 $f(x)$ 的定义域分开后列表判定.

例 3 求曲线 $y = \ln(1 + x^2)$ 的凹凸区间和拐点.

解:

① 定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

② $y' = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, $y'' = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$;

③令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 1$;

④

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	凸	拐点 $(-1, \ln 2)$	凹	拐点 $(1, \ln 2)$	凸

例 4 求曲线 $y = (x - 2)^{\frac{1}{3}}$ 的凹凸区间和拐点.

解:

① 定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

② $y' = \dfrac{1}{3}(x - 2)^{-\frac{2}{3}}$, $y'' = -\dfrac{2}{9}(x - 2)^{-\frac{5}{3}}$;

③ $y'' = 0$ 无解, $x = 2$ 时 y'' 不存在;

④

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y''	$+$	不存在	$-$
y	凹	拐点 $(2, 0)$	凸

三、学法建议

本节重点是函数单调性与凹凸性的判定方法以及单调区间、凹凸区间和拐点的求法.

习题 3—3

一、计算题

1. 求下列函数的单调区间

(1) $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2} + \dfrac{x}{2}$；(2) $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$；(3) $f(x) = (x^2-2x)e^x$.

2. 求下列曲线的凹凸区间和拐点

(1) $y = x^4 - 2x^3 - 1$；　(2) $y = x\arctan x$；　(3) $y = e^{-x^2}$.

二、证明题

1. 求证：$x > 0$ 时，$x > \ln(1+x)$.

2. 证明方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有一个实根.

习题 3—3 答案与提示

一、

1. (1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

(2) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ 上单调递增，$(-1,1) \cup (1,3)$ 上单调递减.

(3) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增，$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 上单调递减.

2. (1) 区间 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 凹，区间 $(0,1)$ 凸；点 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$是拐点.

(2) $(-\infty, +\infty)$ 凹.

(3) 区间 $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 凹，区间 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 凸，点 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 是拐点.

二、

1. 利用单调性证明.

2. 利用单调性和零点存在定理证明.