

WEIJIFEN  
JIAOCHENG

# 微积分教程

杨清霞◎编著

中央民族大学出版社  
China Minzu University Press



WEIJIFEN  
JIAOCHENG

# 微积分教程

杨清霞◎编著

中央民族大学出版社  
China Minzu University Press

### 图书在版编目(CIP)数据

微积分教程/杨清霞编著. —北京:中央民族大学出版社,2016.6  
ISBN 978-7-5660-1191-6

I. ①微… II. ①杨… III. ①微积分—高等学校—教材  
IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 117296 号

### 微积分教程

---

编著者 杨清霞

责任编辑 李飞

封面设计 汤建军

出版者 中央民族大学出版社

北京市海淀区中关村南大街 27 号 邮编:100081

电话:68472815(发行部) 传真:68932751(发行部)

68932218(总编室) 68932447(办公室)

发行者 全国各地新华书店

印刷厂 北京叶知舟数码快印有限公司

开本 787×1092(毫米) 1/16 印张:12

字数 220 千字

版次 2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978-7-5660-1191-6

定价 48.00 元

---

版权所有 翻印必究

# 前 言

高等数学已经成为大学的公共课。大学数学教学中的微积分课程是数学科学的重要分支，从其初始概念的提出到今天，在世界范围内已经形成非常完善的理论体系，在社会发展和各国的国家建设中发挥着不可取代和越来越重要的作用。许多学生在学习微积分时恐惧该学科对无穷性的分析和演算，产生了厌学和逃避的情绪。如何让微积分知识走下理论神坛，推动我国微积分教学向现代化、实用化方向发展，是大学微积分课程教学改革的重点，也是本书着力思考和进行突破的地方。

我从事高校数学教学十多年来，一直致力于面向数学基础参差不齐的学生，从事微积分、线性代数、概率统计等课程的知识传授工作，有丰富的高等数学教学经验。2007年9月至2008年8月，本人被国家留学基金委公派出国留学，在美国著名常青藤高校康奈尔大学数学系学习访问一年。繁忙紧张的留学感受和在国内多层次的教学实践经验体会，使我萌发了从学生实际出发，按照新形势下教材改革的精神，为激发学生兴趣和帮助学生自学高等数学提供途径而编著本书的想法，并且通过不断努力，使想法变成了现实。在作为讲义的试行过程中，学生普遍反映良好。

对广大学生来讲，大学的数学教育不仅仅是基础技能教育，更是素质教育和思维培养。基于此，本书内容上力求简明、扼要，在叙述

中淡化细节，注重阐述数学思想，避免了过多的数学推导给学生来的的压力和恐惧，有助于学生从感性上产生对数学知识的理解和认同。本书在理论上保持了数学界一贯的完整性和严谨性。虽然章节不多，但承接有序。书中突出了对数学基本思想的理解，强调学生的数学思维训练。本书循序渐进，通俗易懂，例题习题设置典型丰富，在教材中把学习提要和学法建议传授给读者，有利于学生自主学习。同时逻辑清晰，内容紧凑，深入浅出，难度适中，也便于教师组织教学。

本书最大的特点是很好地架构起了大学数学和中学数学的桥梁，衔接自然顺畅，注重传授数学基础知识和培养数学人文素养的统一。作为一个大胆地尝试，为了强调积分与方程的关系，本书将微分方程放在不定积分和定积分之间进行介绍，希望能收到预期的教学效果。

本书属于基础课用书，可以作为大学本科预科、大学本科文、史、哲、语言等专业的数学教材，也可供高职、自考、专科的学生使用。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，教材中的不妥之处，恳请广大专家、同行和读者批评指正。

编者  
2016年2月

# 目 录

第一章 函数、极限与连续 .....	(1)
第一节 函 数 .....	(2)
一、集 合 .....	(2)
二、函 数 .....	(4)
三、学法建议 .....	(10)
习题 1—1 .....	(10)
习题 1—1 答案与提示 .....	(12)
第二节 函数极限 .....	(13)
一、数列极限 .....	(13)
二、函数极限 .....	(15)
三、学法建议 .....	(25)
习题 1—2 .....	(26)
习题 1—2 答案与提示 .....	(27)
第三节 函数的连续性 .....	(28)
一、函数连续的有关概念 .....	(28)
二、函数的间断点 .....	(30)
三、闭区间上连续函数的性质 .....	(31)
四、学法建议 .....	(31)
习题 1—3 .....	(32)
习题 1—3 答案与提示 .....	(33)

总复习题一 .....	(33)
总复习题一答案与提示 .....	(35)
<b>第二章 导数与微分</b> .....	<b>(36)</b>
<b>第一节 导数的概念</b> .....	<b>(36)</b>
一、实例引入 .....	(36)
二、导数的定义 .....	(38)
三、导数的运算法则 .....	(41)
四、导数表 .....	(43)
五、学法建议 .....	(43)
习题 2—1 .....	(44)
习题 2—1 答案与提示 .....	(45)
<b>第二节 导数的各类求法及高阶导数</b> .....	<b>(45)</b>
一、导数的各类求法 .....	(45)
二、导数的简单应用 .....	(49)
三、高阶导数 .....	(51)
四、学法建议 .....	(52)
习题 2—2 .....	(53)
习题 2—2 答案与提示 .....	(55)
<b>第三节 微分</b> .....	<b>(56)</b>
一、问题提出 .....	(56)
二、微分的定义 .....	(57)
三、可导与可微的关系 .....	(57)
四、微分的几何意义 .....	(58)
五、微分表与微分运算法则 .....	(59)
六、微分近似公式 .....	(60)
七、学法建议 .....	(62)
习题 2—3 .....	(62)
习题 2—3 答案与提示 .....	(63)
总复习题二 .....	(64)

总复习题二答案与提示 .....	(65)
<b>第三章 中值定理与导数的应用</b> .....	(67)
<b>第一节 微分中值定理</b> .....	(68)
一、罗尔 (Rolle) 定理 .....	(68)
二、拉格朗日 (Lagrange) 中值定理 .....	(70)
三、柯西 (Cauchy) 定理 .....	(72)
四、学法建议 .....	(73)
习题 3—1 .....	(73)
习题 3—1 答案与提示 .....	(74)
<b>第二节 洛必达法则</b> .....	(74)
一、洛必达法则 I ( $\frac{0}{0}$ 型不定式) .....	(74)
二、洛必达法则 II ( $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式) .....	(76)
三、其它不定式 .....	(77)
四、学法建议 .....	(78)
习题 3—2 .....	(78)
习题 3—2 答案与提示 .....	(79)
<b>第三节 函数单调性和曲线的凹凸性</b> .....	(79)
一、函数单调性的判定法 .....	(79)
二、曲线的凹凸性与拐点 .....	(83)
三、学法建议 .....	(86)
习题 3—3 .....	(87)
习题 3—3 答案与提示 .....	(87)
<b>第四节 函数的极值和最大、最小值</b> .....	(88)
一、函数的极值 .....	(88)
二、闭区间上连续函数的最大值与最小值 .....	(91)
三、极值应用问题 .....	(92)
四、函数图形的描绘 .....	(94)
五、学法建议 .....	(97)



习题 3—4 .....	(97)
习题 3—4 答案与提示 .....	(98)
总复习题三 .....	(99)
总复习题三答案与提示 .....	(101)
<b>第四章 不定积分与微分方程</b> .....	<b>(102)</b>
第一节 不定积分的定义与性质 .....	(102)
一、原函数 .....	(102)
二、不定积分的定义 .....	(103)
三、不定积分的性质 .....	(103)
四、不定积分的基本积分公式 (不定积分表) .....	(104)
五、不定积分的几何意义 .....	(105)
六、学法建议 .....	(105)
习题 4—1 .....	(105)
习题 4—1 答案与提示 .....	(106)
第二节 不定积分的各类求法 .....	(106)
一、直接积分法 .....	(106)
二、凑微分法 (第一换元积分法) .....	(106)
三、分部积分法 .....	(110)
四、换元积分法 (第二换元积分法) .....	(112)
五、学法建议 .....	(114)
习题 4—2 .....	(115)
习题 4—2 答案与提示 .....	(115)
第三节 微分方程简介 .....	(116)
一、微分方程的有关概念 .....	(116)
二、可分离变量的微分方程 .....	(117)
三、一阶线性微分方程 .....	(118)
四、二阶线性微分方程解的结构 .....	(120)
五、二阶常系数齐次线性微分方程 .....	(121)
六、二阶常系数非齐次线性微分方程 .....	(122)

七、学法建议	(124)
习题 4—3	(124)
习题 4—3 答案与提示	(125)
总复习题四	(126)
总复习题四答案与提示	(128)
<b>第五章 定积分及其应用</b>	<b>(130)</b>
第一节 定积分的概念与性质	(131)
一、实例引入	(131)
二、定积分的定义	(133)
三、定积分的性质	(135)
四、学法建议	(139)
习题 5—1	(139)
习题 5—1 答案与提示	(139)
第二节 微积分基本公式	(140)
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系	(140)
二、积分上限函数	(140)
三、牛顿—莱布尼兹公式	(143)
四、学法建议	(144)
习题 5—2	(145)
习题 5—2 答案与提示	(145)
第三节 定积分的换元法与分部积分法	(146)
一、定积分的换元法	(146)
二、分部积分法	(149)
三、学法建议	(150)
习题 5—3	(151)
习题 5—3 答案与提示	(152)
第四节 定积分的应用	(153)
一、定积分的元素法	(153)
二、平面图形的面积	(154)

三、旋转体体积·····	(159)
四、平行截面面积为已知的立体的体积·····	(161)
五、平面曲线的弧长·····	(162)
六、定积分在物理中的简单应用·····	(165)
七、学法建议·····	(166)
习题5—4 ·····	(166)
习题5—4 答案与提示 ·····	(168)
<b>第五节 广义积分</b> ·····	(168)
一、无穷区间的广义积分·····	(168)
二、无界函数的广义积分·····	(170)
三、学法建议·····	(171)
习题5—5 ·····	(172)
习题5—5 答案与提示 ·····	(172)
总复习题五·····	(172)
总复习题五答案与提示·····	(175)
<b>附录 常见的中学数学公式</b> ·····	(177)
一、实数的运算·····	(177)
二、绝对值·····	(177)
三、常见的乘法公式·····	(178)
四、分式运算·····	(178)
五、一元二次方程·····	(179)
六、不等式·····	(179)
七、数 列·····	(180)
八、三角公式·····	(180)
九、排列组合·····	(182)

**例 2** 求函数  $f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$  的单调区间.

**解:**

① 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,

$$\text{② } f'(x) = \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}},$$

③ 令  $f'(x) = 0$  得驻点  $x_1 = \frac{2}{5}$ ; 又  $x = 0$  时导数不存在,

④

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	单增		单减		单增

**【注】** 用一阶可疑点把定义域分开后, 可保证  $f'(x)$  在各个部分区间内保持固定符号, 从而可用部分区间内某点导数值符号确定此区间导数符号.

下面介绍利用单调性证明不等式的方法.

要证明  $x \in (a, b)$  有  $f(x) > g(x)$ , 只需令  $F(x) = f(x) - g(x)$ ,

求证  $F'(x) > 0$  且  $F(a) \geq 0$  即可.

事实上, 由  $F'(x) > 0$ , 可知  $F(x)$  单调递增, 从而  $F(x) > F(a) \geq 0$ ,

则  $F(x) = f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$ .

**例 3** 求证: 当  $x > 0$  时, 有  $e^x > 1 + x$ .

**证明:** 令  $F(x) = e^x - 1 - x, x \in (0, +\infty)$ .

$F'(x) = e^x - 1 > 0$ , 故  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单增, 又  $F(0) = 0$ ,

所以  $F(x) > F(0) = 0$ , 从而  $e^x > 1 + x$ .

**例 4** 证明: 当  $x > 1$  时,  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ .

**证明:** 令  $f(x) = 2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right)$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x\sqrt{x} - 1)$ ,

因  $f(x)$  在  $[1, +\infty]$  上连续, 在  $(1, +\infty)$  内  $f'(x) > 0$ , 因此在  $[1, +\infty]$  上

$f(x)$  单调增加, 从而当  $x > 1$  时,  $f(x) > f(1)$ .

由于  $f(1) = 0$ , 故  $f(x) > f(1) = 0$ , 即  $2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right) > 0$ ,

亦即  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} (x > 1)$ .

## 二、曲线的凹凸性与拐点

函数的单调性反映在图形上, 就是曲线的上升或下降. 但是, 曲线在上升或下降的过程中, 还有一个弯曲方向的问题. 例如, 图 3—5 中有两条曲线弧, 虽然它们都是上升的, 但图形却有显著的不同, 下面我们就来研究曲线的凹凸性及其判定法.

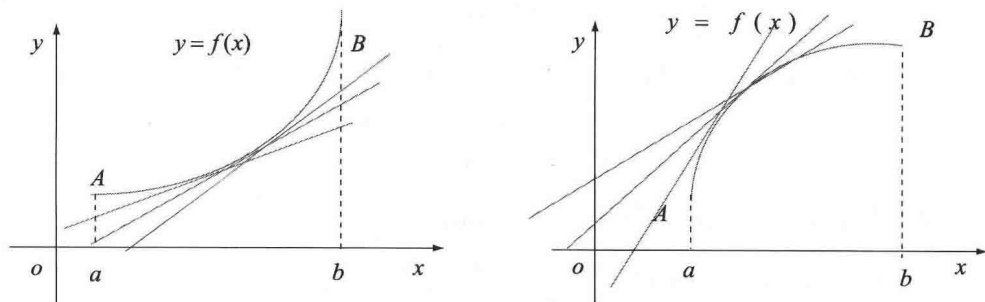


图 3—5

我们从几何上看到, 在有的曲线弧上, 如果任取两点, 则联结这两点间的弦总位于这两点间的弧段的上方 (图 3—6 (a)), 而有的曲线弧, 则正好相反 (图 3—6 (b)). 曲线的这种性质就是曲线的凹凸性. 因此曲线的凹凸性可以用联结曲线弧上任意两点的弦的中点与曲线弧上相应点 (即具有相同横坐标的点) 的位置关系来描述, 下面给出曲线凹凸性的定义.

**定义 2** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上连续, 如果

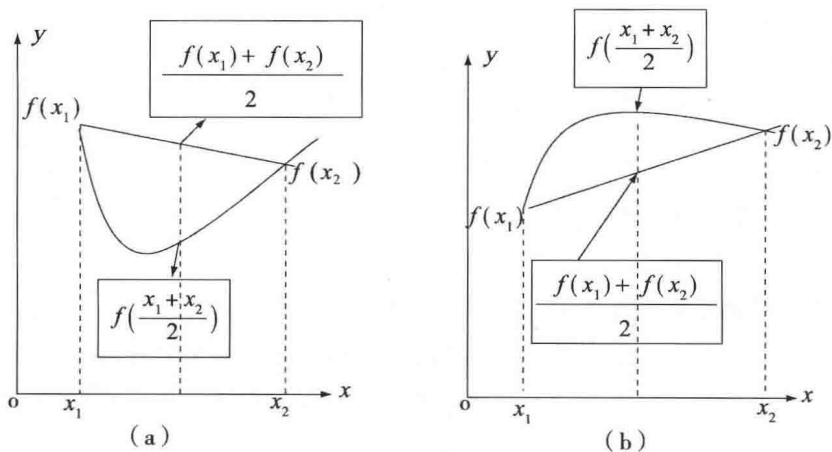


图 3—6

对  $I$  上任意两点  $x_1, x_2$  恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

那么称  $f(x)$  在  $I$  上的图形是凹的; 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

那么称  $f(x)$  在  $I$  上的图形是凸的.

如果函数  $f(x)$  在  $I$  内具有二阶导数, 那么可以利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性, 这就是下面的曲线凹凸性的判定定理. 我们仅就  $I$  为闭区间的情形来叙述定理, 当  $I$  不是闭区间时, 定理类同.

**定理 2** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有二阶导数, 那么

- (1) 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的图形是凹的;
- (2) 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的图形是凸的.

**证明:**

(1) 设  $x_1, x_2 \in [a, b]$  且  $x_1 < x_2$ , 记  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , 并记  $x_0 - x_1 = x_2 - x_0 = h$ ,

则  $x_1 = x_0 - h, x_2 = x_0 + h$ .

在区间  $[x_1, x_0]$  应用拉格朗日中值定理得

$$f(x_0) - f(x_0 - h) = f'(\xi_1)h \quad ①$$

其中  $x_1 < \xi_1 < x_0$ .

在区间  $[x_0, x_2]$  应用拉格朗日中值定理得

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(\xi_2)h \quad ②$$

其中  $x_0 < \xi_2 < x_2$ .

② - ①式得

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]h \quad ③$$

③式右端继续应用拉格朗日中值定理得

$$f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1), (\xi_1 < \xi < \xi_2). \quad ④$$

由③和④可知

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1)h > 0, \text{ 即}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

由定义可知曲线  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内为凹.

(2) 同理可证.

**定义 3** 曲线上凹弧与凸弧的分界点称为曲线的拐点.

拐点既然是凹与凸的分界点, 所以在拐点左右邻域  $f''(x)$  必然异号, 因而在拐点处  $f''(x) = 0$  或  $f''(x)$  不存在. 用二阶导数等于零的点和二阶导数不存在点划分函数定义域后, 就可确定曲线的凹凸区间和拐点.

下面介绍曲线凹凸区间和拐点的确定方法.

**定义 4** 函数  $f(x)$  的二阶导数等于零的点和二阶导数不存在的点统称为  $f(x)$  的二阶可疑点.

**【注】** 曲线  $y = f(x)$  拐点的横坐标是  $f(x)$  的二阶可疑点, 反之不然.

**求曲线  $y = f(x)$  的凹凸区间和拐点的步骤:**

- (1) 求函数  $f(x)$  的定义域;
- (2) 求  $f''(x)$ ;
- (3) 求  $f(x)$  的二阶可疑点;
- (4) 用  $f(x)$  的二阶可疑点把  $f(x)$  的定义域分开后列表判定.

**例3** 求曲线  $y = \ln(1 + x^2)$  的凹凸区间和拐点.

解:

① 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ;

$$\textcircled{2} y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2};$$

③ 令  $y'' = 0$  得  $x = \pm 1$ ;

④

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$y''$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	凸	拐点 $(-1, \ln 2)$	凹	拐点 $(1, \ln 2)$	凸

**例4** 求曲线  $y = (x - 2)^{\frac{1}{3}}$  的凹凸区间和拐点.

解:

① 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ;

$$\textcircled{2} y' = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}, \quad y'' = -\frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}};$$

③  $y'' = 0$  无解,  $x = 2$  时  $y''$  不存在;

④

$x$	$(-\infty, 2)$	$2$	$(2, +\infty)$
$y''$	$+$	不存在	$-$
$y$	凹	拐点 $(2, 0)$	凸

### 三、学法建议

本节重点是函数单调性与凹凸性的判定方法以及单调区间、凹凸区间和拐点的求法.



## 习题 3—3

## 一、计算题

1. 求下列函数的单调区间

$$(1) f(x) = \frac{4x}{1+x^2} + \frac{x}{2}; \quad (2) f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}; \quad (3) f(x) = (x^2-2x)e^x.$$

2. 求下列曲线的凹凸区间和拐点

$$(1) y = x^4 - 2x^3 - 1; \quad (2) y = x \arctan x; \quad (3) y = e^{-x^2}.$$

## 二、证明题

1. 求证:  $x > 0$  时,  $x > \ln(1+x)$ .
2. 证明方程  $x^5 + x - 1 = 0$  只有一个实根.

## 习题 3—3 答案与提示

## 一、

1. (1) 在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增.  
 (2)  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$  上单调递增,  $(-1, 1) \cup (1, 3)$  上单调递减.  
 (3)  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$  上单调递增,  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  上单调递减.
2. (1) 区间  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$  凹, 区间  $(0, 1)$  凸; 点  $(0, 1)$  和  $(1, 0)$  是拐点.  
 (2)  $(-\infty, +\infty)$  凹.  
 (3) 区间  $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$  凹, 区间  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  凸, 点  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$  和  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$  是拐点.

## 二、

1. 利用单调性证明.
2. 利用单调性和零点存在定理证明.