工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目
21 世纪高等学校规划教材

高等数学

（上册）

许峰 范自强 ◎ 主编
耿显亚 孙侠 ◎ 副主编

讲究概念背景，强调方法应用
编排严谨合理，讲解通俗易懂
例题分析透彻，习题难易适中
注重释疑解惑，适当归纳汇总

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目

21世纪高等学校规划教材

高等数学

（上册）

许峰 范自强 ◎ 主编

耿显亚 孙侠 ◎ 副主编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 许峰，范自强主编. -- 北京 :
人民邮电出版社，2016.8
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-115-42597-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①许… ②范… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第152599号

内 容 提 要

本套教材分为上、下两册。上册主要内容为函数、极限与连续，一元函数微分学，微分中值定理与导数的应用，一元函数积分学，定积分的应用，常微分方程。本书结构严谨，条理清晰，语言通俗易懂，论述简明扼要，例题与习题难度适中且题型丰富。

本书有配套辅导教程，内容包括教学基本内容与基本要求、释疑解惑、典型例题解析、配套作业、复习题、历年统考试题及解答等。

本书可作为高等学校非数学专业“高等数学”课程的教材，也可以作为科技工作者学习微积分知识的参考书。

◆ 主　　编　许　峰　范自强
副 主 编　耿显亚　孙　侠
责任编辑　张孟玮
责任印制　沈　蓉　彭志环

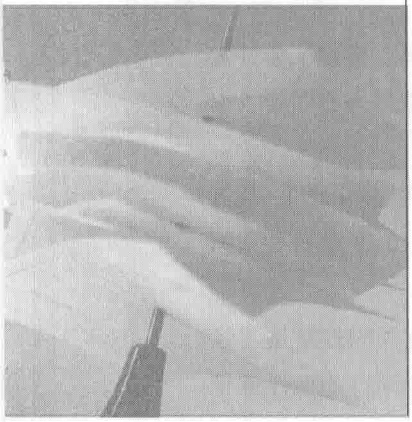
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市潮河印业有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：19.25　　2016 年 8 月第 1 版
字数：506 千字　　2016 年 8 月河北第 1 次印刷

定价：45.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言 Preface



随着科学技术的发展和进步，数学已日益渗透到自然科学、工程技术、经济、金融等各个领域，逐渐成为各学科进行科学研究的重要工具和手段。高等数学作为近代数学的基础，是理工类、经管类各专业大学生必修的重要数学基础课。

近十几年来，随着高等学校招生规模的不断扩大，高校的培养模式、教学方法、教学手段等逐渐呈现出多元化。高校教材也悄然发生着变化，由几花争艳逐步演变为百花齐放。每门课程不再是只有几种教材供选择，有些基础课程比如高等数学的教材已有上百种之多，而且还不断有新教材问世。

安徽理工大学的“高等数学”课程2004年入选安徽省第一批“省级精品课程”，安徽理工大学的公共数学教学团队获得“省级教学团队”称号，安徽理工大学数学系主编的《线性代数》和《概率论与数理统计》是安徽省“十一五”和“十二五”规划教材，并被多所高校选用。在长期的教学实践中，编者积累了较丰富的教学经验和教学资料，对高等数学教材也有不少自己的看法，这些为本书的编写奠定了一定的基础。为了使得本书区别于其他一般教材，避免低水平重复建设，编者在以下几个方面做了一些工作。

1. 一位哲人曾经说过：“科学只能给我们知识，而历史却能给我们智慧”。在教材的每一章的引言中，作者对本章要讨论的主要概念和问题的背景、起源、研究历程及一些数学家对此所做的贡献做了简要介绍。这样做不仅能使学生了解一点数学发展历史，接受一点数学文化的熏陶，而且能使学生知晓一点所学内容的来龙去脉和应用领域，提高学习兴趣。

2. 在内容与编排方面，与别的教材相比，本书做了一些变动。例如，将定积分与不定积分的内容相互融合；增加了函数图形描绘的应用、广义积分敛散性的判定法、伽马函数、定积分的近似计算、极值充分条件的证明、重积分的换元法及轮换对称性、空间曲线积分与路径无关的条件、绝对收敛级数的性质等。

3. 作者在编写本书时的一个指导思想是，力争使教材通俗易懂，易于自学。具体做法如下。(1)对于一些重要概念，都是通过浅显易懂的具体例子引入，以使学生更好地理解这些重要概念，同时也使学

生明白：数学概念不是数学家凭空想象出来的，而是来源于实际。（2）在提出本章节的主要问题和给出某些定理时，作者特别注意解说性文字的编写，使学生很容易明白为什么要讨论这个问题，这个问题与其他问题有什么联系，等等。

需要指出的是，与其他所有教材编写者一样，编者在编写本书时，参考、借鉴了多种优秀高等数学教材，这些教材在诸如内容编排、定理的论述、例题和习题的选择等方面给了编者许多有益的启示。在此，向这些教材的作者表示感谢和敬意。

本套教材分上、下两册，由安徽理工大学理学院数学系许峰（第 3 章和第 9 章）、范自强（第 4 章和第 11 章）、周继振（第 2 章和第 8 章）、耿显亚（第 5 章和第 10 章）、孙侠（第 1 章和第 6 章）、詹倩（第 7 章和第 12 章）编写，由许峰和殷志祥统稿。

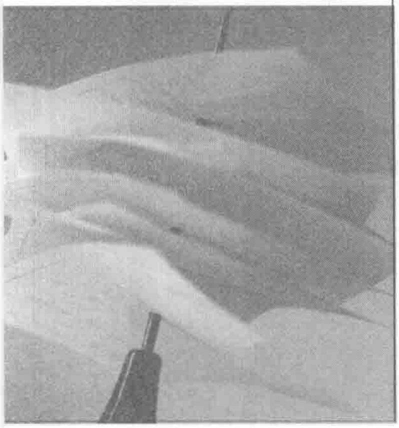
由于编者水平所限，加之时间仓促，本书不足之处在所难免。一本优秀的教材是要经过反复锤炼的，是要经得起时间检验的。作者期待着广大读者特别是各位同行的批评意见和建议。

最后，特别要感谢人民邮电出版社高等教育出版分社张孟玮副社长，正是他的鼓励和关心才使得编者有了编写本书的决心和信心。

编者

2016 年 5 月

目 录 Contents



第1章 函数、极限与连续 / 1

第2章 一元函数微分学 / 53

函数、极限与连续　第1章

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，也是高等数学的主要研究对象．而极限概念是研究函数的理论基础，极限方法是微积分学的基本分析方法，掌握极限方法是学好高等数学的关键．连续则是函数的一种性态，函数的连续性可以用极限来描述．本章将介绍函数、极限和连续的基本概念及基本方法，为后续章节的学习奠定基础．

1.1 函数

函数是微积分的主要研究对象，本节将在中学代数关于函数知识的基础上进一步讨论函数的概念和性质．

1.1.1 函数的定义

在中学代数里介绍过，实数由有理数和无理数两部分组成，实数集与数轴上的全体点形成一一对应关系，实数集有两类特殊的子集——区间和邻域．

设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，集合 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为以 a,b 为端点的开区间，记为 (a,b)．类似的还有闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$，左开右闭区间 $(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$ 和左闭右开区间 $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$．上述各个区间的端点都是点 a 和 b，区间的长度都是 $b-a$，由于 $b-a$ 为有限数，因此上述区间都称为有限区间．

如果区间的两个端点中至少有一个是 ∞（无限数），则称该区间为无限区间．例如 $[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$、$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$、$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$ 和 $(-\infty,b)=\{x\,|\,x\leqslant b\}$ 都是无限区间．实数集 $\mathbf{R}$ 可记作 $(-\infty,+\infty)$，也是无限区间．

在后面的章节中经常会用到一种特殊的开区间——邻域．我们把以点 x_0 为中心，某一很小的正数 δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$，即 $U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\,\|\,x-x_0|<\delta\}$．点 x_0 称为该邻域的中心，正数 δ 称为该邻域的半径．将邻域 $U(x_0,\delta)$ 中去掉中心点 x_0，则称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记为 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$，即 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)=\{x\,\big|\,0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$．其中 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为 x_0 的左 δ 邻域，$(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的右 δ 邻域．

在具体研究某一实际问题的过程中，我们发现问题中的变量并不是独立变化的，它们之间往往存在着相互依赖关系，当一个变量在它的变化域中任取一值时，另一个变量按照某种法则就有一个确定的值与之对应．把这种确定的依赖关系抽象出来，就是函数的概念．

定义 1.1.1　设非空数集 D 及变量 x,y，如果变量 x 在 D 内任取一个值，按照一定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之相对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x),x\in D$．其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域．所有函数值的全体 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的

值域.

关于函数的概念，有以下几点说明。

（1）定义域和对应法则是确定一个函数的两大要素，如果两个函数的定义域和对应法则都相同，那它们是相同的函数，否则就是不同的函数. 例如 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 和 $y=\sqrt{x^2}\ (x\in\mathbf{R})$ 不是同一个函数，虽然定义域相同，但对应法则不同，导致值域不同.

（2）当函数是用抽象的算式（解析式）表达时，其定义域是使算式有意义的一切实数构成的集合，例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$. 对于实际问题中的函数，其定义域不仅要使函数的表达式有意义，还要由实际意义来确定，例如某细胞繁殖的生长率函数为 $r=36t-t^2$，其中 t 表示时间，由实际意义知函数的定义域是 $[0,+\infty]$.

（3）平面点集 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形（或图像），$y=f(x)$ 称为 C 的方程.

（4）在函数定义 1.1.1 中，如果自变量 x 在 D 内任取一个值，对应的函数值 y 总是唯一的，这样的函数又称为单值函数. 否则称为多值函数. 例如在方程 $x^2+y^2=4$ 中，对于每一个 $x\in(-2,2)$，都有两个值与之对应，因此，方程 $x^2+y^2=4$ 确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的多值函数. 如果附加一些条件，将多值函数化为单值函数，这样得到的单值函数称为原来多值函数的单值分支. 例如限定 $y\geqslant 0$，则由方程 $x^2+y^2=4$ 确定的单值函数 $y=\sqrt{4-x^2}$，是原来多值函数的一个单值分支；同样地，$y=-\sqrt{4-x^2}$ 是另一个单值分支. 本书中，若无特别说明时，所称的函数都是指单值函数.

（5）函数的表示方式通常有三种：解析法、图像法和列表法，其中最常用的是解析法.

例 1.1.1 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0,\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{-1,0,1\}$，图形如图 1-1-1 所示.

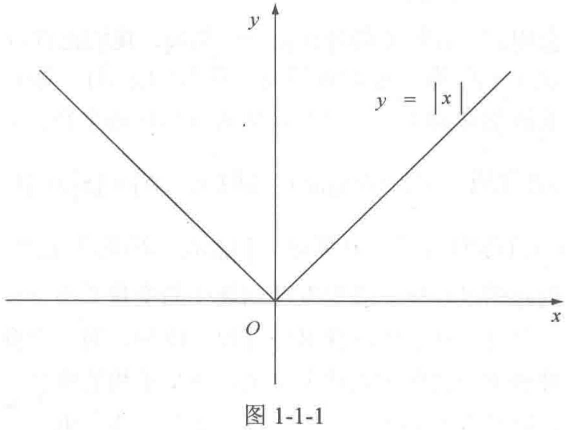


图 1-1-1

例 1.1.2 设 x 是任意实数，取整函数 $y=[x]$ 表示取不超过 x 的最大整数，例如 $[3.25]=3$，$[0.5]=0$，$[3]=3$，$[-2.2]=-3$，$[-0.75]=-1$. 其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. 图形

如图 1-1-2 所示. 这图形称为阶梯曲线，在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1.

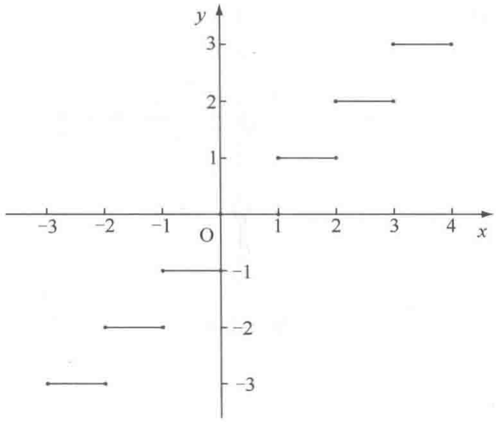


图 1-1-2

在表示变量 x 和 y 的函数关系时，往往需要引入中间变量（例如 t），通过建立 x 与 t 和 y 与 t 的函数关系 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$，来表达 y 与 x 的函数关系，这类函数称为参变量函数，即

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} t\in I.$$

下面介绍高等数学中经常用到的几种曲线的参数方程及图形.

（1）圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=x_0+R\cos t, \\ y=y_0+R\sin t, \end{cases} t\in[0,2\pi]$.

（2）椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} t\in[0,2\pi]$.

（3）摆线的参数方程是 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} a>0, t\in[0,+\infty)$. 图形如图 1-1-3 所示. 它是将半径为 a 的圆沿直线滚动（无滑动），圆上一点所形成的轨迹. 限定 $t\in[0,2\pi]$，则为摆线的一拱.

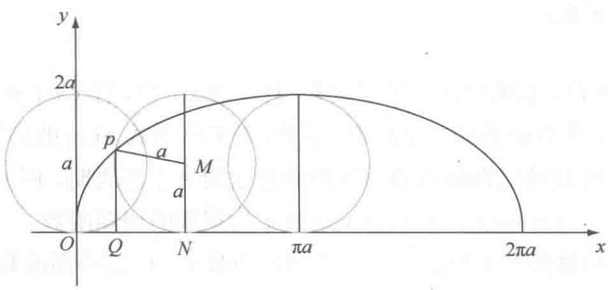


图 1-1-3

（4）星形线的方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}, (a>0)$，其参数方程是 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t, \end{cases} t\in[0,2\pi]$. 图形如图 1-1-4 所示. 它是半径为 $\dfrac{a}{4}$ 的圆在半径为 a 的圆上（里边）滚动而形成的轨迹.

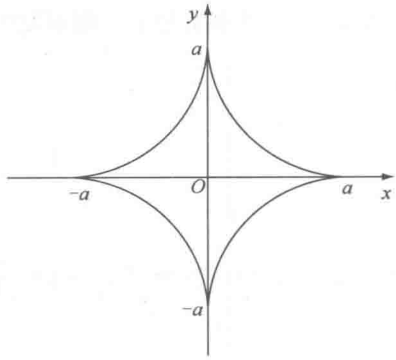


图 1-1-4

1.1.2 函数的几种特性

1. 单调性

设函数 $y=f(x),x\in D$，如果对于 D 内任意两点 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 D 内是单调增加的（或单调减少的）. 单调增加函数和单调减少的函数统称为单调函数. 若当 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 D 内是严格单调增加的（或严格单调减少的）. 严格单调增加函数和严格单调减少的函数统称为严格单调函数.

例如函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是严格单调减少的，但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不具有单调性. 所以研究函数 $f(x)$ 的单调性时，必须指明所讨论的区间.

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x),x\in D$，定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$）. 若对于任意 $x\in D$，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数. 奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如 $y=\sin x$，$y=x^3$ 都是奇函数，$y=x^2$，$y=\cos x$ 都是偶函数，$y=\mathrm{e}^x$，$y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

3. 周期性

设函数 $y=f(x),x\in D$，如果存在非零常数 T，对任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，T 称为函数的一个周期. 显然，若 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则 $kT,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 也是 $f(x)$ 的周期，通常所说的周期函数的周期指的是它的最小正周期. 例如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

但并非所有的周期函数都有最小正周期，例如常函数 $y=C$ 是周期函数，任意实数都是它的周期，因而不存在最小正周期.

4. 有界性

设函数 $y=f(x),x\in D$，如果存在常数 K_1（或 K_2），对于任意 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant K_1$（或 $f(x)\geqslant K_2$），则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界（或下界），K_1（或 K_2）就是 $f(x)$ 的一个上界（或下界）. 如果存在正数 M，对于任意 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，也称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数. 否则，称 $f(x)$ 是 D 上的无界函数. 容易证明，函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必

要条件是它在 D 上既有上界又有下界.

需要注意的是，说一个函数有界还是无界，必须指明讨论的区间. 如函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，函数 $y=\ln x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是无界的. 如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，但在区间 $[1,2]$ 却是有界的.

1.1.3 反函数和复合函数

我们知道，通过函数的运算，可以由简单函数构造复杂的函数. 函数的运算主要包括函数的四则运算、反函数运算和复合运算，其中四则运算是大家已经熟悉的了，所以在此仅讨论函数的反函数运算和复合运算.

1. 反函数

在函数定义中的两个变量，一个叫作自变量，一个叫作因变量，但在实际问题中，哪个是自变量，哪个是因变量并不是绝对的，要根据所研究的具体问题而定. 例如，设函数 $y=x+2, x\in\mathbf{R}$，其中 x 为自变量，y 为因变量，值域为 $\mathbf{R}$. 从中解出 $x=y-2$，对于值域 R 中的任一个值 y，都有唯一确定的一个 x 与之相对应，我们称 $x=y-2$ 是 $y=x+2$ 的反函数. 由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，于是 $y=x-2, x\in\mathbf{R}$. $y=x+2$ 的反函数通常写作 $y=x-2, x\in\mathbf{R}$.

定义 1.1.2 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数，值域为 W. 如果对每一个 $y\in W$ 都有唯一的且满足关系式 $y=f(x)$ 的 x 与之对应，则确定了一个定义在 W 上、以 y 为自变量、x 为因变量的新函数，称之为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 而原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数，或称它们互为反函数.

我们通常习惯上用 x 表示自变量、y 表示因变量，因此，可以把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x), x\in W$，这时我们说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 由定义可知，反函数的定义域、值域分别是它的直接函数的值域、定义域. 反函数和直接函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

我们说的函数是单值函数，在这个意义上，并不是所有函数都有反函数. 例如函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在（单值）反函数，因为对于值域 $W=[0,+\infty)$ 中的每一个值 y，通过关系式 $y=x^2$ 确定的 x 不唯一. 不过在许多情形下，当我们限定 x 的取值范围时，仍有可能存在反函数. 例如限定 $x\geqslant 0$，则存在反函数 $y=\sqrt{x}$；如果限定 $x\leqslant 0$，则存在反函数 $y=-\sqrt{x}$.

一般地，若函数 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的严格单调函数，则一定存在反函数.

有些函数的反函数存在，但不一定能够用一个显函数表示出来，即由 $y=f(x)$ 可能解不出 $x=g(y)$，但反函数存在，这时 $y=f(x)$ 的反函数表示为隐函数形式.

2. 复合函数

定义 1.1.3 设函数 $y=f(u), u\in D$ 和函数 $u=g(x), x\in E$. 若函数 $u=g(x)$ 的值域 W 是 D 的子集，则称函数 $y=f[g(x)], x\in E$ 是 x 的复合函数，其中称 x 为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$，即 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

$y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$ 可以复合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x}}$，其定义域是 $[0,+\infty)$. 值得注意的是，并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数，如函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 就不能复合成 $y=\arcsin(x^2+2)$，因为函数 $u=x^2+2$ 的值域是 $[2,+\infty)$，但 $y=\arcsin u$ 的定义域是 $[-1,1]$.

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数通常包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 在中学数学课程中已经介绍过这些函数，这里只简单复习一下.

（1）常数函数 $y=C, x\in(-\infty,+\infty)$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{C\}$，图形是一条过点 $(0,C)$ 且平行于 x 轴的直线，如图 1-1-5 所示. 常数函数是有界函数、周期函数（没有最小正周期）、偶函数，特别地，当 $C=0$ 时它也是奇函数.

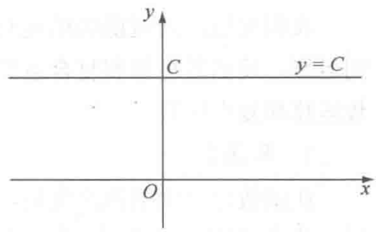


图 1-1-5

（2）幂函数 $y=x^{\mu}, \mu\neq 0$

幂函数的定义域根据 μ 值的不同而不同. 当 μ 为有理数 $\dfrac{p}{q}$（其中 p,q 是整数，且 p,q 互质）时，其定义域见表 1-1-1. 当 μ 为无理数时， $y=x^{\mu}, \mu\neq 0$ 定义为 $y=10^{\mu\lg x}$，其定义域为 $(0,+\infty)$.

表 1-1-1

$y=x^{\mu},\mu\neq 0$	$\mu=\dfrac{p}{q}$ 为有理数	定义域
$\mu>0$	q 为奇数	$(-\infty,+\infty)$
	q 为偶数	$[0,+\infty)$
$\mu<0$	q 为奇数	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
	q 为偶数	$(0,+\infty)$

当 $x>0$ 时， $x^{\mu}>0$，此时函数 $y=x^{\mu}$ 的图形在第一象限，且总经过点 $(1,1)$，当 $\mu>0$ 时，函数 $y=x^{\mu}$ 单调增加；当 $\mu<0$ 时，函数 $y=x^{\mu}$ 单调减少. 函数 $y=x^{\mu}$ 和 $y=x^{\frac{1}{\mu}}$ 互为反函数，其图形关于 $y=x$ 对称（如图 1-1-6 所示）.

（3）指数函数 $y=a^{x}, (a>0且a\neq 1)$

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $(0,+\infty)$，图形总过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时函数单调增加，当 $0<a<1$ 时函数单调减少，如图 1-1-7 所示.

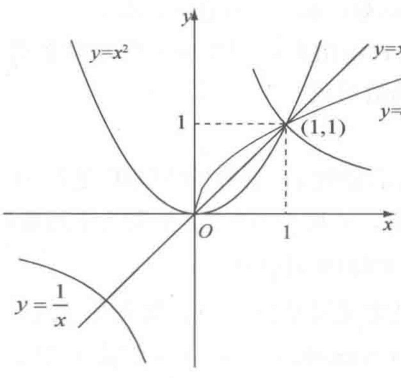


图 1-1-6

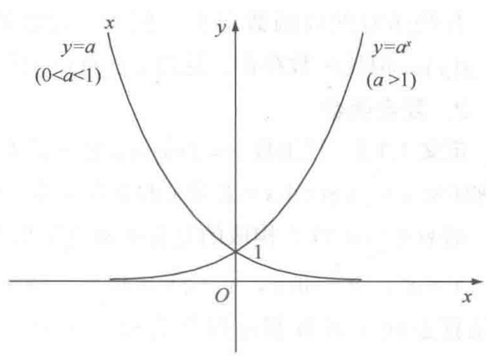


图 1-1-7

（4）对数函数 $y=\log_a x, (a>0且a\neq 1)$

对数函数和指数函数互为反函数，因此由指数函数的性质知，对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 不论 a 取何值，函数的图形都经过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时函数单调增加，当 $0<a<1$ 时函数单调减少，如图 1-1-8 所示.

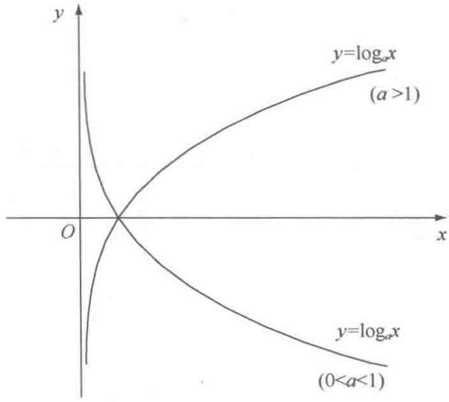


图 1-1-8

（5）三角函数

常用的三角函数有：

① 正弦函数 $y=\sin x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $[-1,1]$，它是奇函数、有界函数，又是周期为 2π 的周期函数，其图像如图 1-1-9 所示.

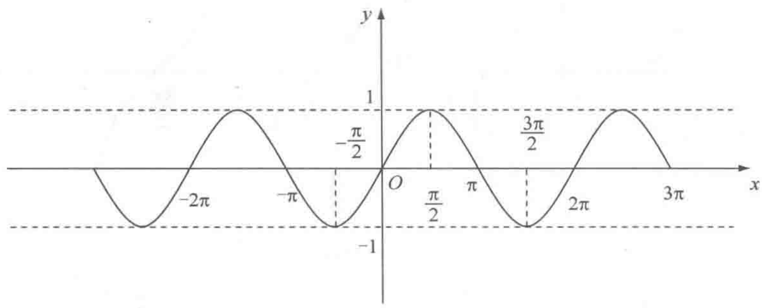


图 1-1-9

② 余弦函数 $y=\cos x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $[-1,1]$，它是偶函数、有界函数，又是周期为 2π 的周期函数，其图像如图 1-1-10 所示.

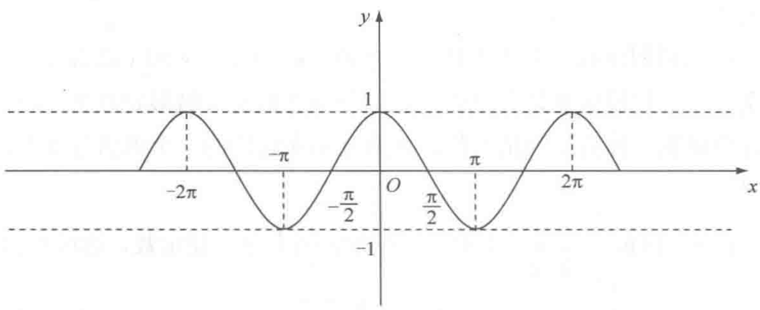


图 1-1-10

③ 正切函数 $y=\tan x$，定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，它是奇函数、无界函数，又是周期为 π 的周期函数，其图像如图 1-1-11 所示.

④ 余切函数 $y=\cot x$，定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，它是奇函数、无界函数，又是周期为 π 的周期函数，其图像如图 1-1-12 所示.

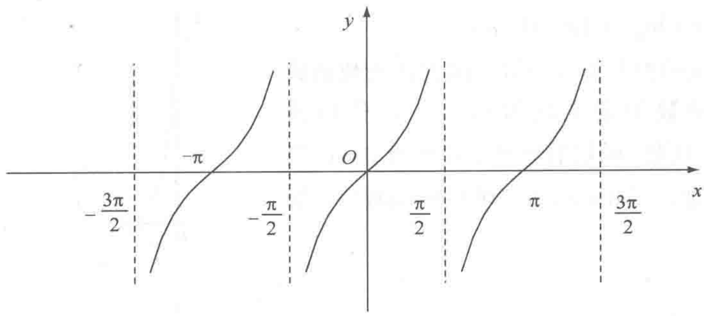


图 1-1-11

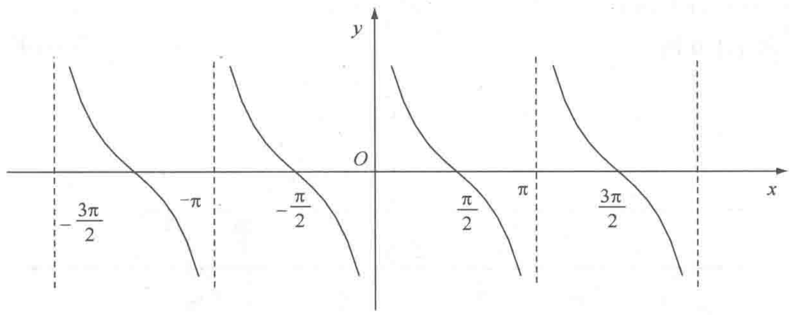


图 1-1-12

⑤ 正割函数 $y=\sec x$，定义域为 $\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，它是偶函数、无界函数，又是周期为 2π 的周期函数.

⑥ 余割函数 $y=\csc x$，定义域为 $\{x|x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，它是奇函数、无界函数，又是周期为 2π 的周期函数.

（6）反三角函数

由于三角函数都是周期函数，对于值域的每个值 y，与之对应的 x 值有无穷多个，因此，在三角函数的整个定义域上，其反函数是不存在的，必须将它的定义域限定在某一个单调区间内，这样得到的函数就存在反函数，称为反三角函数．下面分别在它们的一个单值分支上讨论反三角函数.

① 反正弦函数

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调，在此区间上存在反函数，称此反函数为反正弦函数，记为 $y=\arcsin x$，它的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，它是奇函数，且是单调增加的函数，它的图像如图 1-1-13 所示.

② 反余弦函数

余弦函数 $y=\cos x$，在区间 $[0,\pi]$ 上单调，在此区间上反函数存在，称此反函数为反余弦函数，记为 $y=\arccos x$，它的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，它是单调减少的函数，它的图像如图 1-1-14 所示.

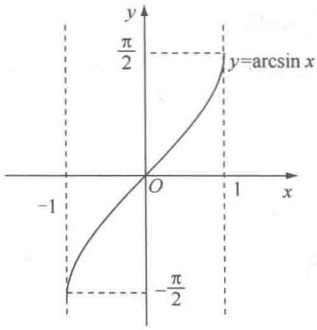


图 1-1-13

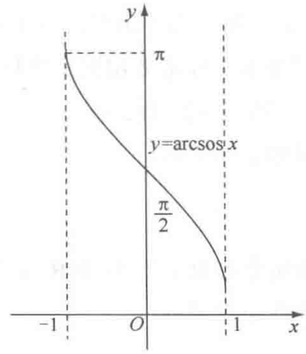


图 1-1-14

③ 反正切函数

正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调，在此区间上反函数存在，称此反函数为反正切函数，记为 $y=\arctan x$，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，它是奇函数，且是单调增加的函数，它的图像如图 1-1-15 所示.

④ 反余切函数

余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调，在此区间上反函数存在，称此反函数为反余切函数，记为 $y=\operatorname{arc}\cot x$，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，它是单调减少的函数，它的图像如图 1-1-16 所示.

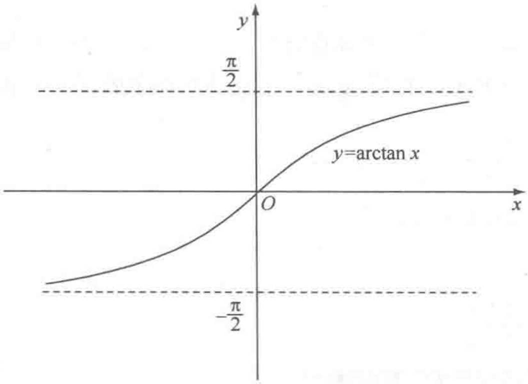


图 1-1-15

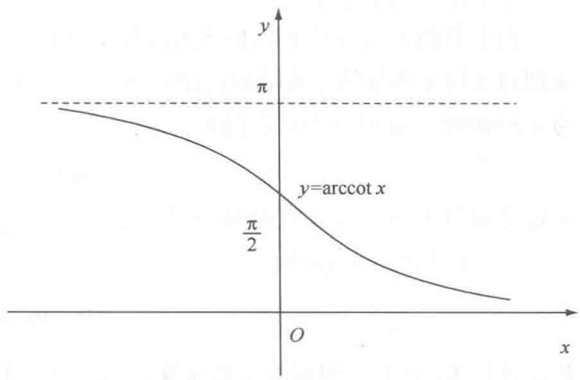


图 1-1-16

上述各反三角函数中 y 所在区间称为主值区间．反正弦函数和反正切函数在主值区间内单调增加且是奇函数，反余弦函数和反余切函数在主值区间内单调减少.

2. 初等函数

定义 1.1.4 由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算所构成的且仅用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

如函数 $y=\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x}}$， $y=\ln(x^2+1)$，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x,x>0\\0,x=0\\-x,x<0\end{cases}$，多项式函数 $P_n(x)=a_0$