高

中南五省(区)师专高等

中国地质大学出版社

高 等 代 数

主编　　熊廷煌

中国地质大学出版社

高 等 代 数

熊廷煌 主编

责任编辑 姚金成 耿小云

中国地质大学出版社出版发行

仙桃市新华印刷厂印刷

•

开本787×1092 1/32 印张16.75 字数 300 千字

1989年7月第一版 1989年7月 第一次印刷

印数 1—6,800 册

ISBN 7-5625-0349-4 O·19

定价：4.80 元

前言

教材建设是学校三大建设之一。长期以来，高等师范专科教育没有一套具有自己特点、较为系统的教材，影响了教学质量的提高。为了深化高等师范教育的改革，为普及九年制义务教育培养更多的合格教师，中南五省（区）教委（高教局）高教（教学）处，共同组织五省（区）师专及部分有关高校的教师，协作编写了师专12个专业85门主干课程的通用教材。

编写这套教材的指导思想是，从高等师范专科教育人才培养的目标出发，根据国家教委新制定的二年制师专教学计划、教学大纲的要求，兼顾三年制和双科制专业的需要，力求突出适用性、科学性及高等师范专科教育的特点。因此，这套教材，不仅适用于普通高等师范专科教育，而且也适用于教育学院和电大普通师范教育相关专业的教学，同时，还可作在职初中教师的培训和自修教材。

本书由熊廷煌主编。参加编写的有（按姓氏笔划排列）：

千知觉（河南平顶山师专讲师）

甘世燊（广西玉林师专〈副主编单位〉副教授）

汪士元（广州师专副教授）

李少初（湖南岳阳师专副教授）

陈汉藻（湖北黄冈师专副教授）
陈宏基（广东惠阳师专〈副主编单位〉副教授）
杨秋锁（河南安阳师专〈副主编单位〉副教授）
夏泽苗（湖南益阳师专〈副主编单位〉副教授）
黄培基（广西柳州师专讲师）
熊廷煌（湖北荆州师专〈主编单位〉教授）

本书是在现行湖北省各师专通用教材《高等代数简明教程》（熊廷煌主编、郝锕新审，湖北教育出版社1987年版）的基础上，吸收各参编同志多年的教学经验和国内外许多名家同类著作（见附录Ⅲ）的长处，集体编写而成的。稿成后，再次请郝锕新教授进行了审阅。对于他的大力支持，谨在此致以最诚挚的谢意！

本书在编写中试图做到：取材少而精，结构简而明；论证选用最捷途径，叙述采用最简形式；当详之处不惜笔墨，当略之处留有余味；习题分有层次，答案、提示适度，以便易教宜学。在内容的布局上，鉴于高等代数的主要部分是线性代数，故以线性代数为基准进行总体设计；多项式则从属于这一需要，放在中间讲。至于线性代数部分，则以有限维向量空间及其线性变换为重心，以“数值化”（通过向量的坐标和线性变换的矩阵）为纽带，故而以数向量空间为基础，以矩阵为基本工具。因此，我们让消无法开路，尽早引出数向量和矩阵这两个基本的数值化工具。这样既能突出重点，以简驭繁；又能由浅入深，便于接受。

使用本书教学，约需180学时（含习题课）。十章教学时数的分配建议如下： $180=12+12+16+16+32+24+24+14+12+18$ 。对于打星号的内容，可酌情删减。

这套教材是按主编负责，分工编写的原则成书的。由于这样大规模有组织地进行教材编写，在我们还是第一次，因而错误缺点在所难免，恳请读者批评教正。

中南五省（区）师专协作教材编委会

1988年3月

目　录

预 章 基础知识

本章旨在为全书的学习提供一些概念和方法方面的预备知识。对这些知识的介绍，大体以够用为度，不拟作全面深入的研讨。

§1 集合与映射

一、集　合

(一) 集合的概念

现代数学的逻辑表明，许多数学概念都可以用集合这一概念来定义或说明。集合已成为数学中最一般、最基本的概念。正因为它太一般，要给出一个逻辑上无争议的定义，反而很困难。㊀ 然而，极其一般的概念，其现实原型必到处可见。常言道："物以类聚，人以群分"。这"类"、"群"，便是集合概念的原型。所以，我们不妨直接从现实中抽象出集合这一概念。

集合论的创始人康托 (G. Cantor) 说，"在我们直觉上或思想上，确定的和不同的对象的一个总体"就叫做一个**集合**，简称为**集**。例如，某个家庭的所有成员构成一个集合。又如，太阳系的所有行星，某平面上所有的圆，某个代数方程的所有的实数根，等等，都是集合。每个集合里，通

㊀ 集合定义的公理化的严格讨论，属数学基础范围，本书不拟介绍。

常都包含有若干个体。集合里所含有的个体，称为集合中的**元素**，简称为**元**。同一集合中的元素都具有某种共同的性质。人们就是根据这种性质来判定某一讨论范围内的事物是否属于该集合。"讨论的范围"，也就是被讨论的全体对象，称为**论域**或**全集**。例如，我们在研究某个方程的实数根的问题时，可以限定在实数范围内，即把全体实数作为全集；或者放宽一点，取全体复数作为全集。

全集通常用大写的拉丁字母U表示。一般的集合及其元素，通常分别用大写和小写的拉丁字母来表示。对一些常用的数的集合，我们约定用一些特定的黑体字母来表示：

$\mathbf{N}$——全体自然数的集；

$\mathbf{Z}$——全体整数的集；

$\mathbf{Q}$——全体有理数的集；

$\mathbf{R}$——全体实数的集；

$\mathbf{C}$——全体复数的集。

从全集中任取一个元素u和一个集合A（A由U某些元素构成）。在u与A之间，要么u属于A（记作$u \in A$），要么u不属于A（记作$u \notin A$），二者必居且仅居其一。这是集合论中最起码的要求。所谓"给出"U中一个集合A，也就是要使人能对U中任一元素u，在两个关系$u \in A$和$u \notin A$之间作出选择。

给出一个集合的方法通常有两种：枚举法和描述法。

所谓枚举法，就是把集合的所有元素一一枚举出来，左右用花括号一围。例如，由前5个自然数所组成的集合M可表为：

$$M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

然而，集合常常是无法枚举或不便枚举的。这时可用描述法，即用集合中元素的共性描述。其形式为

$$A=\{u|\cdots\cdots\}$$

花括号里竖线右方写对u的一种解释，它给出了A中元素的特性。仍如上例中的集合M，用描述法就可表为

$$M=\{u|u\text{是小于6的自然数}\}$$

我们看到，同一个集合可以有不同的表达形式。集合论中有一条“外延原则”，说集合是由它的元素决定的。也就是说，如果两个集合A与B的元素相同，我们就认为它们是同一个集合。这时，我们就称集合A与B相等，记作$A=B$集

如果集合A的每个元素都是集合B的元素，我们就说集合A是集合B的**子集**，记作$A\subset B$，读作“A（包）含于B”。或记作$B\supset A$，读作“B包含A”。例如，实数集是复数集的一个子集：$R\subset C$。

由定义，任何集合都是它自己的一个子集。

为方便计，我们约定：存在一个不含任何元素的集合，称为**空集**，记作ϕ。例如，我们可以说，方程$x^2+1=0$的实根的集合是空集。我们还约定：空集是一切集合的子集。这样，任何集合A都有两个当然的子集：A和ϕ。它们称为A的**平凡子集**。

如果$A\subset B$，且B中存在不属于A的元素，则称A是B的**真子集**，记作$A\subsetneqq B$。例如$R\subsetneqq C$。

为了叙述的方便，我们引入几个记号：

“$\forall x$”表示“对于一切x”（或“对于任意的x”）；

“$\exists x$”表示“存在x”；

"$p \Longrightarrow q$" 表示"由p可以推出q"。即表示p是q的充分条件，q是p的必要条件。"$p \Longleftrightarrow q$" 表示"p与q可以互推"（称p与q逻辑上等价）。即p与q互为充分必要条件。（或"p真，当且仅当q真"；"p真，必要且只要q真"）。

这样，"A是B的子集"就可表示为：

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x,\ x \in A \Longrightarrow x \in B$$

而"A不是B的子集"（记作$A \not\subset B$）就可表示为：

$$A \not\subset B \Longleftrightarrow \exists x, x \in A \text{但} x \notin B$$

又由集合相等的定义，便有

$$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \text{且} B \subset A$$

上式右端是证明两个集合相等时常用的。例如平面几何中的一个轨迹问题："验证到E，F两点距离相等的点的轨迹是线段EF的垂直平分线"。记A为到E，F两点等距的点的集合；B为EF的垂直平分线上的点的集合。那么中学里所做的验证工作实际上就是证明$A \subset B$，且$B \subset A$。

（二）集合的初等运算

设A，B是两个集合。由A和B的全部元素合在一起所成的集合，称为A与B的**并集**（简称并），记作$A \cup B$；由A和B的一切公共元素所成的集合，称为A与B的**交集**（简称交），记作$A \cap B$。即[一]

$$A \cup B \triangleq \{u \mid u \in A \text{或} u \in B\}$$

$$A \cap B \triangleq \{u \mid u \in A \text{且} u \in B\}$$

由此可知

[一] 记号"$\triangleq$"表示"被定义作"或"按定义相等。"

$$u \in A \cup B \Longleftrightarrow u \in A \text{或} u \in B$$

$$u \in A \cap B \Longleftrightarrow u \in A \text{且} u \in B$$

并且易见

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

$$A \cap B \subset B \subset A \cup B$$

集合的并与交的例子是很多的。比如，设$f(x)$，$g(x)$是两个多项式，

$$A \triangleq \{x \mid f(x)=0\}, B \triangleq \{x \mid g(x)=0\}$$

则

$$A \cup B = \{x \mid f(x)g(x)=0\}$$

$$A \cap B = \left\{x \;\middle|\; \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}\right\}$$

其代数含意，读者是明白的。

并和交作为集合的两种运算，还有下列性质：

1） 交换律：$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

2） 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3） 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

性质1），2)容易证明。这里仅证性质3）中的第一个等式。事实上，我们有

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\Longleftrightarrow x \in A \text{且} x \in B \cup C$$

$$\Longleftrightarrow x \in A \text{且}(x \in B \text{或} x \in C)$$

$\Longleftrightarrow (x \in A$且$x \in B)$或$(x \in A$且$x \in C)$

$\Longleftrightarrow x \in A \cap B$或$x \in A \cap C$

$\Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

所以有

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

并与交的概念还可以推广到多个集合的情形。设A_1，$A_2, \cdots, A_n$是给定的n（$\geqslant 2$）个集合。由A_1，A_2，$\cdots$，A_n的所有元素合在一起所成的集合称为A_1，A_2，$\cdots A_n$的并，记作$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$或$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$；由$A_1$，$A_2$，$\cdots A_n$的一切公共元素所成的集合称为$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$的交，记作$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$或$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_n$。

除了并集和交集，有时我们还要用到差集和余集的概念。

设A，B是两个集。由所有属于A但不属于B的元素所成的集称为A与B的**差集**，记作$A-B$（或A/B）。即

$$A - B \triangleq \{u \mid u \in A \text{但} u \notin B\}$$

特别地，当$B \subset A$时，$A-B$称为B在A中的**余集（或补集）**。当A是全集U时，$U-B$记作$\overline{B}$，就称为B的余集。它是由（全集中）一切不属于B的元素构成的。

例如，设$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{4, 5, 6, 7\}$，则$A-B=\{1,2,3\}$。又如$\mathbf{R}-\mathbf{Q}$就是全体无理数的集，它是有理数集在实数集中的余集。如果以实数为全集（即只在实数范围内讨论问题）的话，则$\mathbf{R}-\mathbf{Q}$就是$\overline{\mathbf{Q}}$，意即非有理数的集。

由定义，差集和余集可以互相表示：

$$A-B=A\cap\overline{B}；\ \overline{B}=U-B$$

所以集合的初等运算就只并、交、余三种。

二、映　　射

任何事物都不是孤立的，静止的。着眼于事物的关联和变化，从中寻求分析和解决问题的门径和方法，体现在数学上，就引出了集合之间的映射这一重要概念。

（一） 映射的定义

定义1　设A，B是两个非空集合。如果按照某个法则f，使得A中的每一个元素x，都对应着B中一个唯一确定的元素y，那么就称法则f是A到B的一个映射，记作

$$f:A\longrightarrow B \quad 或 A\xrightarrow{f}B$$

y叫做元素x在映射f之下的象，记作

$$f:x\longmapsto y 或 y=f(x)$$

而x叫做y在映射f之下的原象。A中所有元素x的象$f(x)$的集台记作$f(A)$。即

$$f(A)\triangleq\{f(x)\mid x\in A\}$$

称为集台A在映射f之下的象，或简称为映射f的象。

显然，$f(A)$是B的一个子集。

特别地，集台A形自身的一个映射，称为集台A的一个变换。

映射常用小写的拉丁字母f，g，h等或小写的希腊字母ρ，σ，τ等表示。

例1 设$A=\{x|x\in R, x>0\}$。令

$$f: A\longrightarrow R; x\longmapsto \lg x$$

则f是A到R的一个映射。这就是我们熟知的常用对数函数。

例2 设$A=\{3, 4\}$，$B=\{0, 1, -3\}$。令

$$g: A\longrightarrow B; 3\longmapsto 0, 4\longmapsto 1$$

则g是A到B的一个映射。

例3 设A是一非空集台。对于任意的$a\in A$，定义

$$j: A\longrightarrow A; a\longmapsto a$$

则j是A的一个变换，称为A的恒等变换或单位变换。集合A的恒等变换常记作j_A。

例4 设B是非负实数的集。令

$$h: R\longrightarrow B; x\longmapsto x^2$$

则h是R到B的一个映射。

从这些例子可以看到，映射概念实际上是函数概念的推广。所以广义而言，A到B的映射也称为定义在A上，取值在B内的函数。

要正确理解映射的概念，首先应明确映射的"三要素"——两个非空集合A与B（A，B可以是同一个集合）和一个对应法则f（这是三要素的核心）；其次应特别注意法则f必须满足的"三条件"——存在性，唯一性和封闭性。即对于A中每个元a，$f(a)$都存在，唯一，且必须$f(a)\in B$。这三条缺一不可。读者不妨试着举一些条件欠缺的例子。

（二）映射的相等与合成

定义2 设f，g都是集合A到B的映射。如果$\forall x\in A$都有$f(x)=g(x)$，那么就称映射A与B相等，记作$f=g$。