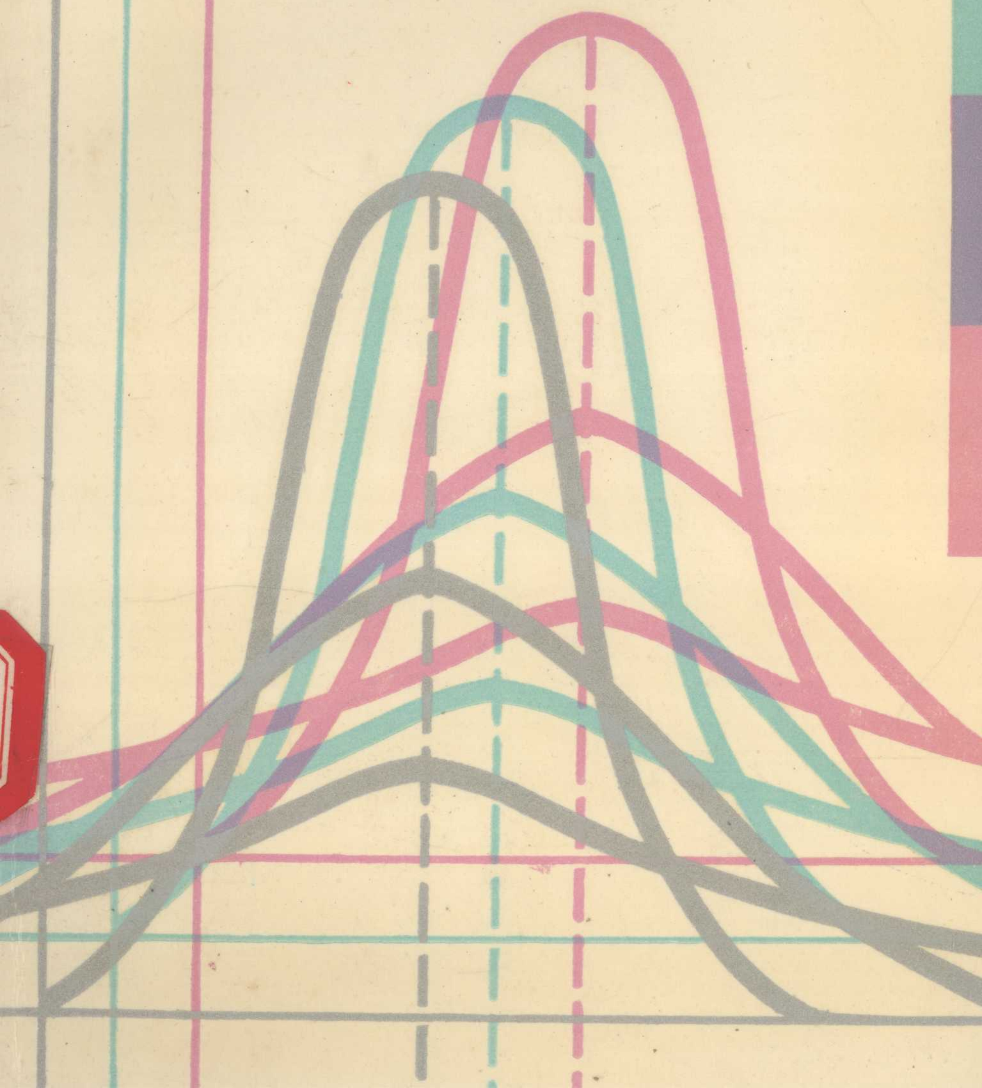
工程数学

刘建中　吴郁萍　编著

天津科学技术出版社



工程数学

刘建中　吴郁萍　编

天津科学技术出版社

津新登字（90）003号

责任编辑：张炳祥

工　程　数　学

刘建中　吴郁萍　编

*

天津科学技术出版社出版

天津市张自忠路189号　邮编300020

河北省永清县第一胶印厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本850×1168毫米 1/32 印张14 字数350 000

1994年5月第1版

1994年5月第1次印刷

印数：1—4 230

ISBN 7-5308-1291-2

O·62　定价：9.40元

内 容 简 介

本书可作为高等学校工科大专教材使用。

全书分四篇。第一篇线性代数，第二篇复变函数，第三篇积分变换，第四篇概率论。每章章末附有本章要点、习题及习题简答。叙述简明扼要，深入浅出，通俗易懂，便于接受。对成人高等教育而言，本书针对性、系统性和应用性极强，适于讲授和自学。

本书可作为成人高等学校教材、大专院校教材或参考书，以及工程技术人员自学、函授或岗位培训用书。

前　言

《工程数学》是成人高等学校中的一门必修课，迄今尚无统一教材。本书是在多年成人高等教育、教学实践的基础上，按照国家教育委员会(原教育部)颁发的职工高等专科学校工程数学教学大纲，针对成人教育的培养目标，结合教学对象而编写的。

全书由四部分组成。第一篇线性代数，第二篇复变函数，第三篇积分变换，第四篇概率论。每章章末附有本章要点、习题及习题简答。

成人教育的对象主要是在职和非在职的中青年；成人教育的目标是培养职业技术性的应用型人才。针对这些特点，本书力图概念引入自然直观，重点突出，深入浅出，通俗易懂和注意新旧知识的对比，及与后续课程的衔接；例题难易适度，注重解题思路和方法。书中特别需要说明的地方，都冠以“注意”或“注”之类的字样，以期唤起读者的思考。“本章要点”归纳了一章的主要内容，帮助读者总结复习；习题突出了理论的深化和方法的应用；习题简答为读者提供了参考性解题方法和答案，尽量减少读者的困难。此书易于讲授，非常适合自学。

本书曾以讲义的形式使用过多次，这次出版又进行了较大的修改。其中第篇由刘建中、吴郁萍执笔；第二、三篇由刘建中执笔；第四篇由吴郁萍执笔。全书由刘建中统稿。何冠山、魏文元、肖兴国曾审阅过本书的初稿，并提出了很多宝贵的意见，在此一并向他们表示感谢。

限于编者水平，书中的缺点和错误在所难免，恳请读者赐教。

编者

1992 年 4 月

目　录

第一篇　线性代数

第二篇 复变函数

第三篇 积分变换

第四篇　概　率　论

第一篇 线性代数

引 言

一、线性方程组问题的引入

在解析几何中我们知道，二元一次方程表示平面上的一条直线.求解二元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

可以讨论平面上两条直线的位置关系.当方程组有唯一的解时，表示这两条直线相交且只有一个交点；当方程组无解时，则表示这两条直线相互平行；当方程组有无穷多解时，则表示这两条直线重合.

同样，三元一次方程表示空间的一个平面，求解三元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$$

可以讨论空间两个平面的相互位置关系：相交、平行或重合.

在自然科学和工程技术中，大量遇到的是多个未知量、多个方程的联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 m 个 n 元一次联立方程组(m、n 均为自然数),以下简称线性方程组. 为了求解线性方程组,就需要我们研究:

(1)如何判断一个线性方程组有没有解?即解的存在性问题.

(2)如果线性方程组有解,是否只有一个解?即解的唯一性问题.

(3)如果线性方程组有多个解,这些解之间的关系怎样?即解的结构问题.

(4)如果一个线性方程组有解,如何求出它的解?即方程组的解法问题.

这是线性代数研究的重要课题之一.

二、二次型问题的引入

我们在解析几何中也知道,二元二次方程

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

表示平面上的一条曲线. 适当地选择坐标变换:如平移

$$\begin{cases} x = x' + p \\ y = y' + q \end{cases}$$

可以把方程化简,消去一次项和常数项,使其化成

$$a_1x'^2 + b_1x'y' + c_1y'^2 = d_1$$

的形式,再施以适当的坐标变换:如转轴

$$\begin{cases} x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta \\ y' = x''\sin\theta + y''\cos\theta \end{cases}$$

进而可以把二次方程化为

$$mx'' + ny'' = r$$

的形式,便于讨论二次曲线的性质和分类.

同样,三元二次方程

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + ez^2 + fyz + gx + hy + kz + i = 0$$

表示空间的一个曲面. 通过适当的坐标变换,它可以简化为

$$mx''^2 + ny''^2 + pz''^2 = q$$

的形式，便于讨论二次曲面的性质和分类.

大量的实际问题，要求我们对一般的多个变量的二次方程

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n = 0$$

(以下简称二次型)进行研究，给出适当的方法，消去变量的交叉项 $x_1x_2, x_1x_3, \cdots, x_{n-1}x_n$，化简原方程为

$$b_{11}x'^2 + b_{22}x_2'^2 + \cdots + b_{nn}x_n'^2 = d$$

的形式，以利讨论其几何性质等.

这也是线性代数研究的重要课题之一.

关于线性方程组和二次型问题的讨论，都要借助于行列式、矩阵、向量这些数学工具. 在本书第一篇中，我们将以上述提出的两个问题为主线，介绍有关行列式、矩阵、向量空间、线性方程组和二次型的基本知识. 也为读者今后学习较抽象的线性代数知识，打下良好的基础.

线性代数是一个古老的数学分支. 在数学的其它分支及别的学科中，作为数学工具均有广泛的应用.

第一章　行　列　式

行列式的概念是从线性方程组的问题中引出来的. 我们先由二、三阶行列式的讨论开始,找出规律,推广到 n 阶行列式上去. 然后,给出用行列式解 n 元线性方程组的一个直接应用.

§1　二、三阶行列式的回顾

一、二、三阶行列式的定义

我们早已知道,解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

要用到二阶行列式. 即当

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组有唯一的解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$

当 $D=0$ 时,方程组有无穷多组解或无解.

解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时,要用到三阶行列式. 当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组有唯一的解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

当 $D=0$ 时，方程组无解或有无穷多组解.

在此，我们应用的二、三阶行列式，其定义分别是：

设有 2^2 个数，按一定行和列的顺序，排成一个两行、两列的表，它表示一个不同行，不同列 2 个数之乘积的代数和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式.

设有 3^2 个数，按一定行和列的顺序，排成一个三行、三列的表，它表示一个不同行、不同列 3 个数之乘积的代数和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

称为三阶行列式.

其表中横的称为行，竖的称为列，而每一个数称为行列式的元素. 每个元素的下标，前者表示所在的行序号，称为行标，后者表示所在的列序号，称为列标.

注意　行列式只是一个记号，它表示的是一个代数和的数值.

二、三阶行列式的性质

由定义不难直接验证，二、三阶行列式具有如下性质（以三阶行列式为例）：

1. 行列式与其转置行列式（行、列互换）相等.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. 互换行列式的任意两行（列），行列式变一号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

特别，若行列式中某两行（列）相同，行列式为零.

3. 在行列式的任一行（列）中，可以提取公因子.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

特别，若行列式中某一行（列）为零，则行列式为零.

4. 行列式中的任意两行（列）成比例，行列式为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

5. 行列式的某一行（列）是两项之和，则此行列式可拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6. 行列式的某一行(列)乘以同一个数加到另一行(列)上去，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

有了这些性质，我们可以简化行列式的计算.

【例 1】 计算上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

解 由三阶行列式定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{13}$$

顺便指出，下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{13}$$

【例 2】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 $$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underline{\underline{(①\ ②)}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & c \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{①\times(-a)+②}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & a+c \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$