2016 全国勘察设计注册工程师执业资格考试用书

2016

注册土木工程师(水利水电工程)执业资格考试

基础考试复习教程

(上册)

注册工程师考试复习用书编委会 | 编
肖　宜　曹纬浚 | 主编

◇ 知名应试专家组织编写，内容紧扣考试大纲、紧随规范更新，为复习备考权威用书。

◇ 精选大量典型例题、经典练习，附两套模考真题，提供答案及详细解析。

◇ 多个科目配辅导视频，可扫描二维码，关注“微课程”，在线学习。

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

2016 全国勘察设计注册工程师执业资格考试用书

2016

注册土木工程师（水利水电工程）执业资格考试
基础考试复习教程

Zhuce Tumu Gongchengshi (Shuili Shuidian Gongcheng) Zhiye Zige Kaoshi
Jichu Kaoshi Fuxi Jiaocheng

（上册）

注册工程师考试复习用书编委会 | 编
肖　宜　曹纬浚 | 主编

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

内 容 提 要

本书以现行考试大纲为依据，最新规范、教材为基础进行编写，着重于对高频考点涉及的基础知识、基本概念和重要规范条文的理解运用，内容简明、扼要。书中典型例题和经典练习多选用近年考试真题，可帮助考生强化记忆、巩固所学知识。书后附两套试卷（含一套真题试卷），可便于考生考前模拟，提高实战能力。

本书各个科目均有配套辅导视频，考生可扫描书中二维码或登录“注考网”在线学习。

由于本书篇幅较大，分为上、下两册，以便于携带和翻阅。

本书可供参加注册水利水电工程师［也称注册土木工程师（水利水电工程）］基础考试的人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

注册土木工程师（水利水电工程）执业资格考试基础考试复习教程 / 肖宜，曹纬浚主编. — 北京 ：人民交通出版社股份有限公司，2016.4

ISBN 978-7-114-12768-7

Ⅰ. ①注… Ⅱ. ①肖… ②曹… Ⅲ. ①土木工程—工程师—资格考试—自学参考资料②水力发电工程—工程师—资格考试—自学参考资料 Ⅳ. ①TU②TV

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 018548 号

书　　名：注册土木工程师（水利水电工程）执业资格考试基础考试复习教程
著 作 者：肖　宜　曹纬浚
责任编辑：张江成　刘彩云
出版发行：人民交通出版社股份有限公司
地　　址：(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号
网　　址：http://www.ccpress.com.cn
销售电话：(010)59757973
总 经 销：人民交通出版社股份有限公司发行部
印　　刷：北京盈盛恒通印刷有限公司
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：85.25
字　　数：2112 千
版　　次：2016 年 4 月　第 1 版
印　　次：2016 年 4 月　第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-114-12768-7
定　　价：158.00 元（含上、下两册）

本书编委会

主　　编　肖　宜　曹纬浚

编　　委　（以姓氏笔画为序）

刘数华　刘　燕　许小重　许怡生

李兆年　李魁元　杨小亭　杨冬梅

肖　宜　吴昌泽　陈向东　范元玮

金银龙　周艳国　赵知敬　侯建国

钱民刚　曹纬浚　崔红军　谢亚勃

魏京花

前　言

根据原人事部、原建设部、水利部《关于印发＜注册土木工程师（水利水电工程）制度暂行规定＞、＜注册土木工程师（水利水电工程）资格考试实施办法＞和＜注册土木工程师（水利水电工程）资格考核认定办法＞的通知》（国人部发〔2005〕58 号）文件精神，从 2005 年起在全国范围内组织实施注册土木工程师（水利水电工程）资格考试，考试实行全国统一大纲、统一命题、统一组织、统一证书。注册土木工程师（水利水电工程）执业工作将于 2017 年 7 月 1 日起实施。

为帮助考生高效复习、顺利通过考试，人民交通出版社股份有限公司特组织本专业有较深造诣的教授和高级工程师（他们分别来自武汉大学、北京建筑大学、北京工业大学、北京交通大学、北京工商大学和北京市建筑设计研究院），根据多年的教学实践经验和考生的回馈意见，以最新考试大纲和现行教材、规范为基础，编写了本教程。本书内容简明扼要，与考试实际极度对接，着重于对高频考点涉及的基础知识、基本概念和重要规范条文的理解运用，是一套值得考生信赖的考前辅导和培训用书。

为方便考生复习、携带，本教程依据考试大纲，分上、下册出版。

上册（第一章至第十一章）为上午段公共基础考试内容。每章初始有一篇“复习指导”，帮助考生在复习每章之前先了解该科目的考试大纲和复习重点。每章的习题按照其所考查的知识点分别放在各节之后，“提示”和“答案”放在每章最后，考生可在复习完每一节后及时做题练习。

下册（第一章至第七章）为下午段专业基础考试内容。每章初始有“考题和分数配置”，便于考生了解本科目分值占整张试卷总分值的比例。每节含“考试大纲”、“必备基础知识”、“典型例题”、“经典练习”（答案和提示放在本章最后）。书后附两套试卷（含一套真题试卷），考生可在考前模拟，以提高实战能力。

为了更好地服务考生，我们依托现行考试大纲和历年真题，配套了多个科目的辅导视频，考生们可手机扫描书中的二维码进行视频学习，或刮开封面处“学习卡”，登录“注考网”（www.zhukaowang.com.cn）在线学习。

本教程上册由曹纬浚负责统稿，主要编写人员有：吴昌泽、范元玮（第一章），魏京花（第二章），谢亚勃（第三章），刘燕（第四章），钱民刚（第五章），李兆年（第六章），许怡生（第七章、第八章），许小重（第九章），陈向东（第十章），李魁元（第十一章）。

本教程下册由肖宜负责统稿，主要编写人员有：杨小亭（第一章），崔红军（第二章），周艳国（第三章），杨冬梅、侯建国（第四章），金银龙（第五章），刘数华（第六章），肖宜（第七章）。

参与编写本教程的老师还有：孙静月、宋伟、贾玲华、程学平、毛怀珍、朋改非、吴景坤、吴扬、张翠兰、王彬、张超艳、张文娟、李平、邓华、冯嘉骝、钱程、李广秋、韩雪、陈启佳、翟平、郭虹、曹京、孙琳、李智民、赵思儒、吴越恺、许博超、张云龙、王坤、刘若禹、楼香林、莫培佳、段修谓、王蓓、宋方佳、杨守俊、王志刚。

考生在复习本教程时，应结合阅读相应的教材、规范，以加深理解和记忆，同时，多做习题，这将对考生巩固、检验复习效果和准备好考试大有帮助。

祝各位考生考试取得好成绩！

肖　宜

2015 年 12 月

目　录

上　册

第一章　高等数学

复习指导

在注册工程师基础考试中，基础部分试卷试题总数为120道题，其中高等数学占24题。高等数学题微积分部分有16道题，线性代数、概率、矢量代数有8道题。数学题的数量占上午试题总量的$\frac{1}{5}$，因而复习好数学是至关重要的。

一、考试大纲

1.1　空间解析几何

向量的线性运算；向量的数量积、向量积及混合积；两向量垂直、平行的条件；直线方程；平面方程；平面与平面、直线与直线、平面与直线之间的位置关系；点到平面、直线的距离；球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程；常用的二次曲面方程；空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

1.2　微分学

函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；数列极限与函数极限的定义及其性质；无穷小和无穷大的概念及其关系；无穷小的性质及无穷小的比较；极限的四则运算；函数连续的概念；函数间断点及其类型；导数与微分的概念；导数的几何意义和物理意义；平面曲线的切线和法线；导数和微分的四则运算；高阶导数；微分中值定理；洛必达法则；一元函数的切线与法线，空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面及法线；函数单调性的判别；函数的极值；函数曲线的凹凸性、拐点；偏导数与全微分的概念；二阶偏导数；多元函数的极值和条件极值；多元函数的最大、最小值及其简单应用。

1.3　积分学

原函数与不定积分的概念；不定积分的基本性质；基本积分公式；定积分的基本概念和性质(包括定积分中值定理)；积分上限的函数及其导数；牛顿-莱布尼兹公式；不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法；有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分；广义积分；二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用；两类曲线积分的概念、性质和计算；求平面图形的面积、平面曲线的弧长和旋转体的体积。

1.4　无穷级数

数项级数的敛散性概念；收敛级数的和；级数的基本性质与级数收敛的必要条件；几何级数与p级数及其收敛性；正项级数敛散性的判别法；任意项级数的绝对收敛与条件收敛；幂级数及其收敛半径、收敛区间和收敛域；幂级数的和函数；函数的泰勒级数展开；函数的傅里叶系数与傅里叶级数。

1.5　常微分方程

常微分方程的基本概念；变量可分离的微分方程；齐次微分方程；一阶线性微分方程；全微

分方程；可降阶的高阶微分方程；线性微分方程解的性质及解的结构定理；二阶常系数齐次线性微分方程。

1.6 线性代数

行列式的性质及计算；行列式按行按列展开定理的应用；矩阵的运算；逆矩阵的概念、性质及求法；矩阵的初等变换和初等矩阵；矩阵的秩；等价矩阵的概念和性质；向量的线性表示；向量组的线性相关和线性无关；线性方程组有解的判定；线性方程组求解；矩阵的特征值和特征向量的概念与性质；相似矩阵的概念和性质；矩阵的相似对角化；二次型及其矩阵表示；合同矩阵的概念和性质；二次型的秩；惯性定理；二次型及其矩阵的正定性。

1.7 概率论与数理统计

随机事件与样本空间；事件的关系与运算；概率的基本性质；古典型概率；条件概率；概率的基本公式；事件的独立性；独立重复试验；随机变量；随机变量的分布函数；离散型随机变量的概率分布；连续型随机变量的概率密度；常见随机变量的分布；随机变量的数学期望、方差、标准差及其性质；随机变量函数的数学期望；矩、协方差、相关系数及其性质；总体；个体；简单随机样本；统计量；样本均值；样本方差和样本矩；χ^2 分布；t 分布；F 分布；点估计的概念；估计量与估计值；矩估计法；最大似然估计法；估计量的评选标准；区间估计的概念；单个正态总体的均值和方差的区间估计；两个正态总体的均值差和方差比的区间估计；显著性检验；单个正态总体的均值和方差的假设检验。

二、复习指导

在复习中，首先要熟悉大纲，按大纲的要求分清哪些属于考试要求，哪些不属于考试要求，有的放矢地做好复习工作。建议考生除了复习本复习教程上的内容外，还可结合同济大学编的高等数学上、下册(第四版或第五版)课本一起复习。由于复习教程篇幅所限，有的内容显得简单了，结合书本复习，可进一步充实相关的内容。另外在教科书中还附有大量的习题，可在复习时做练习题用。

关于考试的试题基础部分在上午考，时间为 4 个小时，考题有 120 道，也就是要在 240 分钟内做完 120 道题，平均 2 分钟做 1 道题，这一点也是我们在复习中应该注意的。这样，大的定理证明、复杂的计算题、计算量大大超过 2 分钟的题目就不可能在试题中出现。试题的形式都是单选题，从给出的四个选项中挑一个。如果题目是以计算题形式给出的，可通过正确的计算选择其中一个答案。

有的从形式上看也是计算题，但涉及的内容有奇偶函数，不妨先去判定一下。有的题目属于概念题，应认真回顾所学过的概念作出正确的选择，有的题目要求根据学过的定义、定理判定，要很好想一下这些定义、定理的具体内容，经分析后选出要求的答案。因而熟记书本的定义、定理性质是必要的，另外，熟悉一些题目的计算步骤，记住曾做过一些题目的结论也是必要的。另外注意根据题目的要求，当能肯定选出某一选项后，其余三个选项，不论它所给出的内容是什么，也不再去验证它为什么错。除了有的题目给了四个选项，一时判定不了的，可以采取逐一排除的方法，得到最后的结论。这些做法在具体做题时需要灵活掌握。但可以肯定的是选择题往往是从涉及概念性较强，计算比较灵活，而计算量又不很大的一类题目中选出。了解以上情况之后，从一开始复习就要加以注意。最后通过系统的复习达到对考试要求的内容有一个全面了解，应该记忆的定义、定理、性质和一些推导出来的结论要记住，应该记忆的公式要记牢，对各种类型的计算题解题的步骤要记住，只有这样，才能较好地应对这次考试。

下面按章、节讲一下每一部分的重点和难点，按复习教程所写的内容顺序进行。

(一)空间解析几何与向量代数

重点:(1)掌握利用向量的基本向量分解式或坐标表示式进行向量运算，如加法、减法、数乘，数量积、向量积、混合积的计算。

(2)熟练掌握利用两向量平行、两向量垂直坐标所具备的性质，设 $\vec{a},\vec{b}$ 为非零向量，$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则①$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$；②$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$。会利用前述条件求直线方程、平面方程，或判定直线和平面间的某种位置关系，空间曲线在坐标面上的投影曲线。

难点:利用两向量平行或垂直的条件求直线方程、平面方程，判定直线和平面的位置关系又是其中的难点。

(二)一元函数微分学

重点:(1)熟练掌握函数奇偶性、单调性、周期性、有界性的判定办法。

(2)熟练掌握求函数极限的方法，把两个重要极限、利用等价无穷小求极限等方法和用洛必达法则求极限方法灵活地结合在一起，解决求极限的问题。

(3)掌握利用函数在一点连续的定义，判定函数在一点的连续性或求某一个数值。

(4)掌握用在一点导数的定义的两种形式求函数在一点的导数，并会利用在一点左、右导数的定义判定分段函数在交界点的可导性。掌握利用在一点导数的几何意义求切线方程、法线方程。

(5)熟练掌握复合函数、参数方程、隐函数、幂指函数的一阶导数以及高阶导数的计算。

(6)熟练掌握三个中值定理结论中的 ξ 值求法，会求函数的单调区间、函数的极值、函数的最值、函数的凹凸区间、拐点，会求函数的渐近线。其中，求各种给出函数的导数，确定函数曲线的单调性、凹凸区间等，又是这一节的**难点**。

(三)一元函数积分学

重点:(1)掌握原函数的概念，并要求把原函数的概念灵活地运用到求函数的不定积分中，计算出不定积分。

(2)熟练掌握利用不定积分公式、换元法、分部积分法，求不定积分。

其中，涉及利用原函数概念的不定积分计算，用换元积分法计算不定积分，是难点。

(3)掌握积分上限函数求导的方法，熟练掌握利用定积分的性质、奇偶函数在对称区间上积分的知识，利用定积分的换元积分和分部积分等求定积分。

(4)熟练掌握利用定积分求平面图形的面积和旋转体的体积、平面曲线的弧长、计算变力沿直线运动所做的功等。

(5)熟练掌握广义积分的计算，判定广义积分敛散性。

难点:计算不定积分、定积分及利用定积分求平面图形的面积和旋转体的体积。

(四)多元函数微分学

重点:(1)熟练掌握复合函数偏导数和全微分的计算，隐函数偏导数和全微分的计算。

(2)掌握二元函数在一点的连续性，偏导存在和全微分的概念及它们之间的联系。

(3)熟练掌握求空间曲线的切线和法平面、空间曲面的切平面和法线的方程的方法。

难点:二元函数连续性、偏导存在和可微概念之间的关系，求二元复合函数和隐函数的偏

导、全微分是难点。

（五）多元函数积分学

重点：(1)熟练掌握二重积分的计算，并会在直角坐标系下把二重积分写成两种积分顺序下的二次积分，会把二重积分化为极坐标系下的二次积分。

(2)熟练掌握把三重积分化为在直角坐标系下、柱面坐标系下、球面坐标系下的三次积分（计算三重积分不是重点）。

(3)熟练掌握对弧长和坐标的曲线积分的计算。在对坐标的曲线积分中，一定要会利用与路径无关的条件，应用格林公式计算曲线积分。

难点：把三重积分化为直角、柱面、球面坐标系下三次积分，对弧长的曲线积分。

（六）级数

重点：(1)熟练掌握数项级数敛散性的判定。

(2)熟练掌握幂级数的收敛半经和收敛区间的求法。

(3)熟练掌握利用已知函数展开式，采用间接展开法，把函数展开成幂级数。

(4)掌握用狄利克雷收敛定理确定傅里叶级数的和函数，求在某点傅里叶级数的和。

难点：(1)数项级数敛散性的判定。

(2)用间接展开法把函数展开成幂级数。

（七）常微分方程

重点：(1)熟练掌握一阶微分方程中可分离变量方程、一阶线性方程通解的求法。

(2)熟练掌握二阶常系数线性齐次方程通解的计算方法。

(3)掌握列微分方程、解应用题方法。

难点：列微分方程、解应用题。

（八）线性代数

根据考试大纲的要求，线性代数需要掌握以下内容：行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型。

行列式是线性代数的基本工具，而高阶行列式的计算一般都要用到行列式的相关性质。

矩阵是线性代数研究的主要对象，是求解线性方程组的有力工具。除了会矩阵的基本运算外，还应会求逆矩阵、矩阵的秩，进而会求解矩阵方程。

在求解线性方程组时会涉及解向量的最大线性无关组的问题，对于向量组要会求它的最大线性无关组。能熟练利用齐次及非齐次线性方程组解的性质，写出方程组的通解。

特征值与特征向量是矩阵理论中最基本的概念之一，对此，应熟练掌握。

关于二次型，首先要会写出它的矩阵形式，即找出它所对应的实对称阵。将一般二次型化为标准型时，也会遇到求二次型所对应矩阵的特征根的问题。

（九）概率论与数理统计

概率论与数理统计需要掌握的内容如下。

随机事件与概率、古典概型、一维随机变量的分布和数字特征、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。

对事件运算、古典概型、全概率公式、独立重复试验要会灵活运用这些工具解决具体问题。

对于随机变量可以有三种描述工具：分布函数、离散型随机变量的分布律、连续型随机变

量的概率密度,需要熟悉它们的定义、性质,并且要会使用。比如,概率密度 $f(x)$ 中如果含未知数 A,则可用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 定出 A。而对正态 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布的随机变量要转化成标准正态 $N(0,1)$ 分布才可查表。

数字特征可从某个侧面反映随机变量分布的特点,数学期望和方差的性质及有关计算公式属于基本内容,用它们可以解决一些实际问题,应该予以关注。

统计量,比如样本均值 $\overline{X}$ 和方差 S^2,抽样分布是参数估计、假设检验的基础。

总之,大家应在基本概念清晰的基础上,熟练掌握有关的计算问题,特别是比较简捷的计算。

第一节　空间解析几何与向量代数

一、空间直角坐标

(一)坐标轴的平移

设旧坐标系为 $Oxyz$,新坐标系为 $O'x'y'z'$,新轴与旧轴平行,点 O' 的旧坐标为 (a,b,c),点 M 的旧、新坐标依次为 (x,y,z) 及 (x',y',z'),则

$$x=a+x',y=b+y',z=c+z' \tag{1-1}$$

(二)两点间的距离

在空间直角坐标系中,$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(三)定比分点

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为两定点,点 $M(x,y,z)$ 将 $\overline{M_1M_2}$ 分为两段 $\overline{M_1M}$、$\overline{MM_2}$,使 $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$,则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{1-2}$$

当 $\lambda=1$ 时,M 为 $\overline{M_1M_2}$ 的中点,则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{1-3}$$

(四)空间方向的确定

设有一条有向直线 L,它与三个坐标轴正向的夹角分别为 α、β、$\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$,称为直线 L 的方向角;$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 称为直线 L 的方向余弦,三个方向余弦有如下关系

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{1-4}$$

二、向量代数

(一)向量的概念

空间具有一定长度和方向的线段称为向量。以 A 为起点,B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$,或简记作 $\vec{a}$。向量 $\vec{a}$ 的长记作 $|\vec{a}|$,又称为向量 $\vec{a}$ 的模,两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 若满足:① $|\vec{a}|=|\vec{b}|$,② $\vec{a}//\vec{b}$,③ $\vec{a}$,$\vec{b}$ 指向同一侧,则称 $\vec{a}=\vec{b}$。

与 $\vec{a}$ 方向一致的单位向量 $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$。

（二）向量的运算

1. 两向量的和

以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边的平行四边形的对角线（图 1-1）所表示的向量 $\vec{c}$ 称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b} \tag{1-5}$$

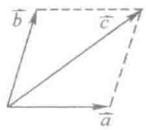

图 1-1

一般说，n 个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 的和可定义如下：先作向量 $\vec{a}_1$，再以 $\vec{a}_1$ 的终点为起点作向量 $\vec{a}_2$，…，最后以向量 $\vec{a}_{n-1}$ 的终点为起点作向量 $\vec{a}_n$，则以向量 $\vec{a}_1$ 的起点为起点、以向量 $\vec{a}_n$ 的终点为终点的向量 $\vec{b}$ 称为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 的和，即

$$\vec{b}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n \tag{1-6}$$

2. 两向量的差

设 $\vec{a}$ 为一向量，与 $\vec{a}$ 的模相同，而方向相反的向量叫做 $\vec{a}$ 的负向量，记作 $-\vec{a}$，规定两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差为

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \tag{1-7}$$

3. 向量与数的乘法

设 λ 是一个数，向量 $\vec{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 规定为：

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 表示一个向量，它的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同，它的模等于 $|\vec{a}|$ 的 λ 倍，即 $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 是零向量，即 $\lambda\vec{a}=\vec{0}$；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 表示一个向量，它的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反，模等于 $|\vec{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$。

4. 两向量的数量积

两向量的数量积为一数量，表示为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}) \tag{1-8}$$

5. 两向量的向量积

两向量的向量积为一向量，记作 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$。

①$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$，$|\vec{c}|$ 的几何意义为以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边作出的平行四边形的面积；②$\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$；③$\vec{c}$ 的正向按右手规则四个手指从 $\vec{a}$ 以不超过 π 的角度转向 $\vec{b}$，则大拇指的指向即为 $\vec{c}$ 的方向。

6. 三个向量的混合积

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的混合积，记作 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ 的几何意义表示以 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积。可推出，当向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面时，混合积 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$，即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$。

（三）向量运算的性质（$\vec{a}$、$\vec{b}$ 为向量，λ、μ 为数量）

交换律

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$，$\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

结合律

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$，$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$

$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$，$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

分配律

$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$，$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$，$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

向量的数量积满足交换律，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

向量的向量积不满足交换律，即 $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$。

(四)向量在轴上的投影

给定向量$\overline{AB}$及 u 轴,过 A、B 点分别向 u 轴作垂直平面,与 u 轴交于 A_1、B_1,则有向线段$\overline{A_1B_1}$的值 A_1B_1 称为$\overline{AB}$在 u 轴上的投影,记作 $\mathrm{Prj}_u\,\overline{AB}$,向量的投影是一个数量。

设$\overline{AB}$与 u 轴的夹角为 α,则

$$\mathrm{Prj}_u\,\overline{AB}=|\overline{AB}|\cos\alpha$$

n 个向量的和在 u 轴上的投影为

$$\mathrm{Prj}_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\vec{a}_1+\mathrm{Prj}_u\vec{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\vec{a}_n \tag{1-9}$$

(五)向量的投影表示

设 $\vec{a}$ 的起点 A 坐标为(x_1,y_1,z_1),终点 B 坐标为(x_2,y_2,z_2),则 $\vec{a}=\overline{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$,记 $a_x=x_2-x_1$,$a_y=y_2-y_1$,$a_z=z_2-z_1$,a_x、a_y、a_z 称为向量 $\vec{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影。又设 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 依次为与 x、y、z 轴正向一致的单位向量,则

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k} \tag{1-10}$$

又可写成

$$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\} \tag{1-11}$$

式(1-10)又称为向量 $\vec{a}$ 按基本单位向量的分解式,式(1-11)又叫做向量 $\vec{a}$ 的坐标表示式。

(六)向量运算的坐标表示式

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,$\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$,则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}$$

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\vec{k} \tag{1-12}$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

$$=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_y&b_z\\c_y&c_z\end{vmatrix}a_x-\begin{vmatrix}b_x&b_z\\c_x&c_z\end{vmatrix}a_y+\begin{vmatrix}b_x&b_y\\c_x&c_y\end{vmatrix}a_z$$

向量的模和方向余弦的坐标表示式:

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,α、β、γ 为 $\vec{a}$ 的方向角,$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$,则

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \tag{1-13}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

且满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。

(七)两向量的夹角、平行与垂直坐标表示

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \tag{1-14}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

三、平面

(一)平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中，平面法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$。

(二)平面的点法式方程

过定点 (x_0,y_0,z_0)，以 $\vec{n}=\{A,B,C\}$ 为法线向量的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

称为平面的点法式方程。

(三)平面的截距式方程

设 a,b,c 为平面在三个坐标轴上的截距，平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{1-15}$$

称平面的截距式方程。

(四)两平面的夹角(通常指锐角)

设两平面方程为

$$\pi_1\qquad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2\qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

则两平面夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{1-16}$$

两平面平行的充分必要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2} \tag{1-17}$$

两平面垂直的充分必要条件为

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{1-18}$$

(五)三平面的交点

设三个平面方程为 $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$(其中，$i=1,2,3$)，若系数行列式 $D\neq0$，则三平面有唯一交点，交点坐标即方程组的解。

(六)点到平面的距离

若平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，平面外一点 $M(x_1,y_1,z_1)$，则点 M 到平面的距离为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{1-19}$$

(七)点到直线的距离

设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是直线 L 外的一点，$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是直线 L 上的任意取定的点，且直线 L