

新世纪
教育教学
金典丛书

权威性 专业性 实践性

陶西平 作序

联合国教科文组织协会世界联合会副主席、国家总督学顾问

与 数学优秀生 一起思考

◎ 金荣生 著

特级教师
苏步青数学教育奖



- 资深一线特级教师现身说法
- 教育理论和实践的紧密结合
- 引领同行幸福成长高效教学

清华大学出版社

新世纪
教育教学
金典丛书

与
数学优秀生
一起思考

◎ 金荣生 著



清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

数学实质上是人们常识的系统化。数学的发展依赖于数学家的创造,数学学习要重视亲身体验,其核心是学生的“再创造”。在本书中,作者就如何培养数学优秀生,用学生自己的思维方式进行再创造做了详细的讲述。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究,侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

与数学优秀生一起思考/金荣生著. —北京:清华大学出版社, 2016

(新世纪教育教学金典丛书)

ISBN 978-7-302-41724-8

I. ①与… II. ①金… III. ①数学教学-研究 IV. ①01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 239620 号

责任编辑:张莹

封面设计:傅瑞学

责任校对:王荣静

责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市新茂装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170mm×240mm 印 张:14 字 数:272 千字

版 次:2016 年 4 月第 1 版 印 次:2016 年 4 月第 1 次印刷

定 价:39.00 元

《新世纪教育教学金典丛书》编委名单

顾问：陶西平

主编：宗介华

编委：马新龙 马建彬 厉小兰 朱 珠 吴双英 刘宁波 刘春华 李秀岚
宗介华 赵 虎 耿纪华 张云海 张赶英 张树旺 杨小娣 陈效东
柯尊文 喻永刚 蒋 敏 潘光钰

总序



平台·成果·摇篮

我们正处在这样一个时期，传统的教育理论在相当程度上仍然影响着我们的教学实践，而引进的多种现代教育理论，在给我们带来启示与借鉴的同时，尚难以通过与中国教育实践的整合形成体系。所以，努力创造适合我国国情的教育就成为深化教育的迫切任务。

《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020年）》指出，进一步提高我国基础教育水平，当前最重要的任务，一方面是推进教育公平，促进义务教育的均衡发展；另一方面是提高教育质量，全面推进素质教育。我国基础教育的规模发展已经取得令世人瞩目的成就，接受教育的机会公平问题已经基本解决，但是接受保证教育质量的机会公平问题依然突出，基础教育的主要任务已经从规模发展转向内涵发展，提高教育质量成为今后基础教育改革与发展的着力点。

提高教育质量，重要途径是深化教育改革，创新人才培养模式。基础教育将继续深化课程改革为重点，坚定不移地推进基础教育领域的各项改革，不断提升教育的整体水平。

中国的教育事业正伴随着社会的变化经历着艰难的转型。教育从来没有像今天这样有着这么多的利益相关体，引起社会这样广泛的关注；也从来没有像今天这样，人们借鉴国内外各种教育理论，从不同的视角来审视中国的教育问题；更没有像今天这样，每一种教育主张的提出，都会产生多种反响，引起不同的评价。这是社会转型期活力的张扬，也是社会转型期发展的困惑，归根结底是对教育工作者如何正确地回答中国面临的诸多教育问题的挑战。历史经验证明，由于社会转型期提出的教育问题最多，所以，也最需要和最可能有一批教育工作者从理论



和实践相结合的角度来进行回答，能够回答其中一个或者几个问题的人，就是教育家。我们现在所处的时代正是最需要和最可能产生教育家的时代。中国是世界上学校数量最多的国家，中国需要教育家办学当然不是只需要几个人，我们期待着每一位教育工作者，都正视当前教育存在的问题，都努力从自己的岗位上用革新者的姿态探索解决问题的途径，创造突出的业绩。这是当代教育工作者的历史使命与责任担当。

教育事业的发展需要理念与实践的引领与示范，转型期的教育事业更需要理念与实践的引领与示范。优质教育归根结底是优质学校和优质教师进行的教育，素质教育归根结底是高素质学校和高素质教师进行的教育。基础教育要聚焦于学校发展和教师队伍建设，进一步激发广大教育工作者的积极性和创造热情。教育是科学，教育是艺术，教育更是一种修炼。这套丛书的出版目的就是搭建一个教师专业发展的平台，展示广大教育工作者改革与创新的成果，使其成为促进教育家成长的摇篮。

我祝贺它的出版，希望它能成为教育工作者的朋友，为我国新世纪伟大教育目标的实现增添一份助力！

2015年11月27日



前言

葆其天真，因材施教

上海市市北中学首任校长唐乃康早在百年前就指出：“教诲学子，首在葆其天真。”要培养数学优秀生，比知识更重要的是好奇心。首先要学生保持对世界、对数学的一种纯真的态度，再选择适合学生特点的方法来教育学生，发挥长处，弥补不足，促进全面发展。

如何切实落实《普通高中课程标准》中所提出的“高中数学课程应具有多样性和选择性，使不同的学生在数学上得到不同的发展”，真正做到“以学生的发展为本”，重视人的差异性和个性，重视社会对人才的多层次需求，使对数学有特殊兴趣或特殊天赋的学生有进一步发展的空间？可以说，中国学生的数学平均成绩在世界上处于领先地位，但是数学优秀生所受的数学教育远不如西方国家，对数学优秀生的学习特点和培养策略开展研究，具有十分重要的意义。

陈波宇是我最得意的学生之一。他关于维尔斯特拉斯函数的数学论文，在全球 582 个参赛队中脱颖而出，获得第三届丘成桐中学数学奖（Shing-Tung Yau High School Mathematics Award）唯一的金奖。

按常规的数学人才“擅长解题”的标准，陈波宇在我们班并非特别出挑。就他最后的高考数学分数 136 分而言，在我们班 46 人中排名第 21 位，仅比班级平均分高 2 分。但在高一开学前的家访中我就发现，他是真的喜欢数学，他沉迷于看《几何原本》等数学经典著作。在上课时，我喜欢引导学生大胆质疑，让学生发表自己的看法，有时我们会就一道题而展开激烈的争论。陈波宇就是一个喜欢与我争论的学生：他会发现我讲课中的漏洞；他会提出自己对数学问题的独到想法；有时候我们在课堂上提出一个数学猜想，过了若干时间，当我也把这个猜想忘记了的时候，陈波宇可能会来与我讨论这个猜想，他是能长时间地思考一个数学问题的人。陈波宇的这些特质在常规的考试中不见得能起作用，但我认为他非常适合做数学研究。



对陈波宇的教育，我的成功之处在于以下三点：

一、一份期待：天生他材必有用

陈波宇喜欢泡图书馆、读课外书，事实上他后面撰写的论文就是有关大学微积分的内容，其难度可以作为研究生的毕业论文，这些知识都是陈波宇在课余通过自学获得的。这些阅读和对新知识的入迷都需要花费大量的时间，他也曾经因此而迟交作业、上课迟到、影响高中学科的学习，但我一直相信天生他材必有用，对他的学习我经常提醒、鼓励，而不去限制。

二、一种氛围：哪里有事，哪里就有美

我的学生王梦桥曾说：“在市北没有被困于升学与竞赛的压力和指标，而是可以真切地去接触数学的有趣和美丽，从单纯应试做题的机械乏味转变为对理性之美的欣赏赞叹。TI 图形计算器上绘制的那些设想奇妙的画面，曼德布罗特分形构造出的斑斓图案，用乒乓球捏成的正二十面体，三年来我不知多少次感到惊奇与震撼。”

让学生因为数学理性思维的美而热爱数学，让学生在学数学的过程中体验成功，一直是我努力的方向，陈波宇对数学持久的热爱，也得益于他在一个热爱数学的班级。

三、一本杂志：创新，从《简单》开始

学习数学的兴趣总是和成功的喜悦紧密相连的，如独立地解决一道数学难题、做出一个数学猜想、想出一种新的解题方法等，都能使学生从这些“成功”中体验到创造的喜悦，激发起更高的学习热情。我鼓励学生将数学学习中的感悟以小论文的形式记录下来，编辑成“校本”（school based）杂志，杂志名字叫《简单》。学生自己写稿、审稿、编辑、排版。杂志中有数学小论文、数学小说、数学游戏攻略等，文章虽然“简单”，但都有学生自己的想法，对学生本人来说是一种创新，这些创作能唤起同学们对数学问题的思考。

陈波宇在高中阶段写了两篇论文，第一篇是《简单》第一期的第一篇；第二篇是《简单》第二期的第一篇，就是后来获得了丘成桐奖的这一篇。

由于陈波宇在英语等学科上的基础较差，我也担心他的升学和考试成绩。无心插柳柳成荫，学生的数学学习兴趣和信心的提升，也促进了学生的全面发展，陈波宇的弱势学科在高中最后一年取得了长足的进步。

教育学生不能只看学生眼前的成绩，要看到他未来 20 年的发展。

在我 20 多年教学工作中，培养了许多让我引以为傲的学生，如温州中学第

一个进奥林匹克数学国家集训队的学生陈然、温州中学第一个进浙江省队参加数学冬令营的学生王中要、市北中学第一个参加数学冬令营的学生江昊琛等。本书也是对《数学，引导学生创新》^①的扩写，是我培养数学优秀生实践与思考的总结。

本书能够成稿并得以出版，离不开顾鸿达先生、杭顺清先生、李大元先生、方仁工先生、温州中学校长胡海帆先生和市北中学校长陈军先生的鼓励与指导，离不开我的学生的帮助与支持，在这里深表感谢！宗介华先生为我们的工作付出了大量的劳动，在此一并致谢！

金荣生
2015年6月



^① 金荣生. 数学，引导学生创新 [M]. 上海：上海教育出版社，2011.



目录

总序	I
前言	III
第 1 章 数学教学的核心是学生的“再创造”	1
1. 探究性学习, 一种优秀生的培养策略	2
1.1 优秀生的培养模式	2
1.2 国内外数学探究性学习的研究现状	5
1.3 数学优秀生的学习特点	7
一个源于 Weierstrass 函数的数学问题	8
2. 数学课堂内的探究性学习	9
2.1 数学概念课的探究教学	10
抛物线及其标准方程	11
2.2 数学命题课的探究教学	14
基本不等式及其应用	15
等比数列的前 n 项和公式	19
2.3 数学解题课的探究教学	24
距离	25
3. 在小课题研究中体验“亚研究”的过程	28
3.1 确定研究课题	28
3.2 寻找研究策略	29
3.3 交流研究结果	30
关于四边形重心坐标的讨论	31
人民路红绿灯设置合理性研究	35

第2章 做一个热爱数学的学生	43
1. 兴趣,学习的动力源泉	43
1.1 数学,理性的艺术	43
怎样证明 $3 < \pi < 4$?	46
1.2 哪里有数,哪里就有美	47
神奇的黄金分割	49
1.3 好玩的数学	50
“我爱你”的逆否命题	53
1.4 大哉,数学之为用	54
最优逃生线路	56
2. 提问,创新的起点	58
2.1 质疑	58
同年同月同日生的概率究竟是多少?	62
2.2 类比	67
三项式定理	71
2.3 归纳	73
关于 $\sin nx$ 展开式的猜想	76
2.4 考虑逆向问题	77
记一堂数列探究课	81
2.5 从不同的角度看问题	84
证 2003 年联赛不等式题的多种方法	88
求二元一次不等式表示区域的一种新方法	90
线面垂直判定定理的一种新证法	91
一道数列题的多种解法	91
2.6 生活中的问题	92
汽车转弯路宽的估计	96
3. 从简单开始,一种探究的策略	99
3.1 特例探路	100



不含孤立元的子集个数的探索	103
一个反例的构造	108
3.2 着眼于极端情况	110
圆锥曲线中的蝴蝶定理及其应用	112
一个下界的探求	116
3.3 分类讨论	117
三阶幻方的性质研究	119
“井”字游戏讨论	122
再论与空间不共面的四点距离为定比的平面个数	130
一类轨迹问题的探求	132
3.4 爬坡式推理	135
怎样求 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$?	137
高斯求和的推广	138
关于两点的球面距离的探究	141
4. 信息技术, 一种帮助我们思考的工具	143
4.1 作图	143
顶点在圆锥曲线上的直角三角形的一个性质	147
利用几何画板探索函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 的性质	148
运用几何画板的迭代功能画曼德布罗特分形集	150
4.2 计算	152
折角过道问题	155
用 TI 编程求整点最优解	159
最优解问题的处理方式	161
用编程求解简单的数论问题	167
利用几何画板探索 $ x-x_1 + x-x_2 + \cdots + x-x_n $ 的最小值	168
4.3 模拟	170
用随机数求 π 的近似值	171

TI 中利用随机数画分形曲线	172
让学生用几何画板做数学	173
利用几何画板探索一类最短距离问题	177
第 3 章 不能急, 我们都需要鼓励的目光	179
成长	179
1. 把学生一辈子的成长装在心里	180
1.1 要让学生学会思考	182
三折线段构成三角形的概率问题及其推广	183
1.2 润物还需细无声	189
追求自然的数学课堂	192
1.3 失误也能带来精彩	193
2. 《简单》, 我们自己的数学杂志	197
2.1 《简单》创刊了	197
给我们的刊物起名	198
为什么要办这本杂志?	198
如何办好这本杂志?	199
给谁看?	200
现在我来向大家介绍一下这本杂志的第一期	200
我来谈谈第二期	201
Mandelbrot 集	202
卷首语	203
2.2 想法从哪里来	203
一定要有自己的想法	203
数学有趣的一面更需要被我们发现和重视	204
数学武侠小说——刀刀斩出玲珑面	205
2.3 你的路未止于此	207
参考文献	210



第 1 章



数学教学的核心是学生的“再创造”

著名数学教育学家弗赖登塔尔认为，数学教学的核心是学生的“再创造”，数学是最容易创造的一门科学。

数学实质上是人们常识的系统化。数学的发展依赖于数学家的创造，学习数学同样要重视学生的亲身体验，用学生自己的思维方式，重新创造有关的数学知识。教师不必将各种规则、定律灌输给学生，而是应该创造合适的条件，提供具体的例子，让学生在实践的过程中，自己“再创造”出各种运算法则，或是发现有关的各种定律。

建构主义学习理论认为学习者存在个体差异，这不仅是指主体已具有的知识，而且也包含了认知风格、学习态度、信心、观念和学习动机等，学习活动在很大程度上取决于主体已有的知识和经验。知识不能简单地通过教师传授得到，而是每个学生在一定的情境即社会文化背景下，借助教师和同学的帮助，利用必要的学习资料，通过人际间的协作活动，依据已有的知识和经验主动地加以意义建构。因此，“情境”“协作”“交流”和“意义建构”是学习环境中的四大要素。其理论核心可以概括为：以学生为中心，强调学生对知识的主动探索、主动发现和对所学知识意义的主动建构。因此数学学习是主体对数学知识的认识过程，学生的数学学习活动不应只限于接受、记忆、模仿、练习等被动的吸收过程，而应是在教师指导下的主动建构学习的过程；这个建构过程依赖于学习者已有的认知结构，因此必须具有个体的特殊性。

当我们在进行优秀生的分班培养是否与教育平等相违背的争论时，2500 多年前孔子早就给出了答案，既要“有教无类”也要“因材施教”。“因材施教”是宋代“二程”（北宋思想家、教育家程颢、程颐的并称）和朱熹从孔子的教育实践活动中概括出来的，曰：“夫子教人，各因其材”。孔子能够针对学生的性格特点和智力水平，用不同的方法进行教育，把学生培养成各种不同的人才。孔子在《论语·雍也》中指出“中人以上，可以语上也；中人以下，不可以语上也”，就是说：“中等水平以上的人，可以告诉他高深学问；中等水平以下的人，不可以告诉他高深学问”。

加德纳的多元智能理论指出，人的智能领域是多方面的，每个学生都有自己的智力强项和学习风格。多元智能理论强调每个个体不可能拥有完全相同的智



能,单个个体有很高的某种智能,却不一定有同样程度的其他智能.这种内隐的智能差异的外显化就是学生的个体差异性,只有当这种差异性被考虑到时,教学才是有效的.

相对于教师主导取向的有意义接受学习,数学优秀生更需要自主取向的深度学习.^①对数学优秀生的培养,最重要的是学习能力的培养.教是为了不教,就是做“授之以渔”的工作,教学生学会思考问题,然后让他们用自己的创造思维去学习.

1. 探究性学习,一种优秀生的培养策略

1.1 优秀生的培养模式

世界范围的综合国力竞争,归根到底是人才特别是创新型人才的竞争.我国科技人才总量居世界前列,但创新创业拔尖人才和领军人才严重不足.

美国有英才教育的政策和法律,1958年颁布的《国防教育法》指出:“为了国家的安全,必须选拔大批的天才儿童,并努力进行天才教育”,1973年通过了《天才教育法》.^②

法国的教育受拿破仑的影响很深,拿破仑认为“教育好20%的人口很重要,因为这20%的人是带动法国前进的火车头”.^③

在日本,精英教育曾被视为违反教育民主的制度而受到批判,但过度的教育平等严重阻碍优秀人才的培养.1978年,当时的首相福田赳夫指出:“日本在经济赶超的时代依靠的是模仿,但是今后必须具有独创性的能力.因此,实施‘英才教育’的时代来临了.”日本文部科学省2002年公布的《劝学》,及稍后由日本文部科学大臣远山敦子发布的《开拓新时代——培养有能力的日本人,从整齐划一到自立和创造》都强调了“英才教育”的理念.^④

英^{⑤⑥}、德^⑦、俄^⑧、韩^⑨等国家也都有针对英才培养的措施和政策.

在我国,1993年教育部基础教育司委托北大附中、清华附中、北师大附中、

① 巩子坤,宋乃庆.数学优秀生培养中需明确的几个观点[J].当代教育科学,2004(21):61-62.

② 潘发勤,杨得国.英才教育·素质教育·学科结构[J].上海教育科学,1997(1):16-18,21.

③ 袁震东.教育公平与英才教育——数学教育改革中的一个重大问题[J].数学教学,2003(7):封2.

④ 赵晋平.从理科高中看日本的精英教育[J].外国教育研究,2004(5):24-28.

⑤ 吴明海.英国伊顿公学的英才教育[J].中国教师,2005(5):53-55.

⑥ 原青林.英国公学英才教育的主要特点探析[J].外国中小学教育,2006(12):12-18.

⑦ 闫瑾.德国培养科研后备人才的政策措施[J].世界教育信息,2008(3):15-17.

⑧ 倪明.从战略上重视数学英才教育——俄罗斯数学物理学校的启示[J].数学教学,2006(12):封2,49.

⑨ 李水山.韩国的“平准化教育”和英才教育的发展[J].基础教育参考,2007(8):29-30.

华师大二附中四所学校办高中理科实验班. 受此影响, 许多省市重点中学也办了针对数学或理科优秀生的实验班. 10 多年来, 理科实验班在优秀学生的教育教学方面进行了积极探索和有益尝试, 但是也引起了社会上对教育公平、学科竞赛的利弊等问题的争论. 2004 年教育部办公厅下发了《关于全国理科实验班停止招生的通知》, 于是大部分学校又停止了或名义上停止了理科实验班的招生. 在轰轰烈烈的理科实验班教育的实验中, 常见各个学校理科竞赛成绩的罗列, 少见教育得失的探讨, 更少见优秀生教育规律的研究.

近二十年来对英才教育与素质教育的探讨一直异常激烈. 有人将英才教育与素质教育相对立, 认为我国教育的弊端在于只重视英才而忽略了大多数. 而教育家吕型伟认为: “我国为什么没有涌现世界级大师, 没有涌现特别出类拔萃的顶尖人才, 甚至没有超过前辈顶尖人物的人才, 在国内没有一个得诺贝尔奖的. 一个原因是只讲全面发展, 不许讲个性发展, 结果是实行‘求全责备, 扼长补短, 求同去异’, 学生的才能受到压制, 特别是压制了那些奇才、怪才、偏才和狂才, 不少有才华的学生被扼杀在摇篮里了.”^① 教育家张奠宙指出: “高考体制, 是制约数学优秀生成长的瓶颈, 减负且深挖洞, 形成了陷阱式的考试题, 大家一齐陪着做, 没有多少数学含量.”^② 正所谓“高考减负一刀平, 数学英才何处寻?”

从“不懂几何者莫入”的柏拉图的学园到现在各国普遍开设的数学物理学校, 人类在数学优秀生的培养上积累了丰富的经验.

数学优秀生培养历史中的标志性事件是匈牙利男爵埃特沃斯在 1894 年举办的匈牙利中学生数学竞赛, 及建立数学物理特设学校, 由此鼓舞了一批数学天才, 后来匈牙利产生了许多著名科学家, 比如分析学家费叶尔、舍贵、拉多、哈尔、里斯, 组合数学家寇尼希, 以及著名力学家冯·卡门, 著名经济学家、1994 年因博弈论而获诺贝尔经济学奖的豪尔绍尼等鼎鼎大名的人物.

数学竞赛成为培养和发现数学英才的一个重要途径. 在苏联, 人们把数学竞赛称作“数学奥林匹克”, 认为数学是“思维的体操”. 1934 年在列宁格勒(今圣彼得堡), 著名数学家狄隆涅主持举办了中学生数学竞赛; 1935 年, 莫斯科也开始举办数学竞赛; 1961 年全俄(后改“全苏”)数学竞赛举办. 在美国, 1938 年开始举办普特南数学竞赛, 获奖者中有的后来成为杰出人物——菲尔兹奖获得者芒福德、米尔诺、奎伦和诺贝尔物理学奖得主费曼、威尔逊等; 1972 年起, 开始举办美国数学奥林匹克, 最终选拔出来的国家队队员得以与父母一同到白宫接受总统接见. 1956 年, 在著名数学家华罗庚、苏步青等人的倡导下, 由中国数学会发起, 北京、天津、上海、武汉首先举办了高中数学竞赛, 此后由于

① 吕型伟. 要重视英才教育问题 [J]. 教育发展研究, 1999 (5): 12-15.

② 张奠宙, 赵小平. 高校自主招生和数学英才培养 [J]. 数学教学, 2006 (12): 封底.



各种原因而中断. 1978 年, 随着“科学的春天”的到来, 华罗庚主持了全国八省市的中学数学竞赛. 1981 年, 中国数学会决定举行全国高中数学联合竞赛. 从 1985 年开始我国派队参加了 IMO (国际数学奥林匹克), 并且在 IMO 上取得了非常优异的成绩. 可以说我国的数学竞赛起步较晚, 但后劲十足. 第一届 IMO 于 1959 年在罗马尼亚举办, IMO 为发现数学人才做出了突出贡献, 许多 IMO 优胜者后来成了杰出的数学家, 如沃尔夫奖获得者卢瓦兹、菲尔兹奖获得者德林菲尔德、约克兹、博切兹、高尔斯、马古利斯、拉佛阁、佩雷尔曼、陶哲轩、吴宝珠等.^①曾获 2000 年第 41 届 IMO 满分金牌的恽之玮, 因在“表示论、代数几何和数论等方向诸多基本性的贡献”荣获 2012 年“拉马努金”奖, 这标志着我国的 IMO 获奖者, 开始走向数学研究领域的最前沿.

匈牙利的特设学校成了苏联数学物理学校的模型, 再以后苏联数学物理学校引起了美国、英国和其他国家精英学校的产生, 由此拉开了区别一般学生教育的精英教育的序幕, 并建立了一整套特长生培养的课程安排、学生选择、培养措施、发展规划等培养体系. 20 世纪 80 年代末, 苏联有各种类型的数学中学近 300 所, 每年的毕业生约占全国中学毕业生的 3%, 因解决了庞加莱猜想而在 2006 年世界数学家大会上获菲尔兹奖的佩雷尔曼, 就是从列宁格勒数学物理中学成长起来的.^②

数学优秀生的数学课程安排, 主要有两种模式.

一种注重数学知识的学习, 把大学的数学内容提早渗透到高中课程中, 强调数学知识加深, 教学进度加快. 如大数学家 A. H. 柯尔莫哥罗夫为莫斯科大学附属数学物理寄宿学校制定的“深入学习数学的学校或班级的教学大纲”的指导思想是: 包含宽广的知识面, 基本原理和基本理论, 以及这些原理和理论建立和发展的历史过程、思想实质、相应的事实、丰富的具体材料——联系于当前和可以预见的未来的社会实践. 其中的《几何学》内容包括: 综合几何、向量几何、球面几何、仿射几何, 以及相对论中的几何.^③在美国弗吉尼亚的 Fairfax 郡的中学, 学校让数学单科突出的学生直接进入适合他们的高年级单科班学习, 甚至对数学成绩特别优异的学生, 学校会派校车送他到附近的大学由教授专门辅导.^④美国高中开设的 AP 课程 (美国大学预修课程) 和 Honor 课程 (荣誉课程), 都是为那些对数学特别有兴趣或有特殊天赋的学生开设的, 学生学习 AP 课程并通

① 熊斌, 葛之. 历史与现实: 中国奥林匹克数学竞赛现象的背后 [N]. 中华读书报, 2005-04-27.

② 倪明. 从战略上重视数学英才教育——俄罗斯数学物理学校的启示 [J]. 数学教学, 2006 (12): 封 2, 49.

③ 同上.

④ 李永智. 美国的英才教育与因材施教 [J]. 基础教育参考, 2004 (4): 15.