



特色专业

普通高等教育

自动化类

国家级特色专业系列规划教材

现代控制理论

(第二版)

夏超英 编著



科学出版社

普通高等教育自动化类国家级特色专业系列规划教材

现代控制理论

(第二版)

夏超英 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

“现代控制理论”是系统和控制科学的一门基础课程,也是自动化类专业的一门核心课程,主要讲解以状态空间方法为基础的系统分析和设计方法,主要内容包括系统的状态方程描述,状态方程的解,系统的能控性和能观性,李雅普诺夫稳定性理论,控制系统的状态空间设计方法,最优控制等。

本书与作者已出版的《自动控制原理》成上下册,这套教材的特点是强调基础性和系统性,注重基本概念及其工程意义的阐述;在内容安排上尽量满足不同教学计划的授课要求,做到层次分明;在写作上力求做到内容精简,逻辑严密,尽量避免复杂数学公式的推导,符合工科学生的思维特点和认识规律。

本书可作为高等院校自动化、电气工程及其自动化、机电一体化和其他相关专业的本科生或硕士生教材,也可供相关专业技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论 / 夏超英编著. —2 版. —北京: 科学出版社, 2016.6

普通高等教育自动化类国家级特色专业系列规划教材

ISBN 978-7-03-048109-2

I. ①现… II. ①夏… III. ①现代控制理论-高等学校-教材 IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 085817 号

责任编辑: 余 江 张丽花/责任校对: 高明虎

责任印制: 张 伟/封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年6月第一版 开本: 787×1092 1/16

2016年6月第二版 印张: 21 3/4

2016年6月第三次印刷 字数: 529 000

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

本书主要讲解以状态空间描述为基础的系统分析和设计方法,内容包括线性系统的分析和设计方法,李雅普诺夫稳定性理论和最优控制理论,是作者已出版的《自动控制原理》的配套教材。

“自动控制原理”和“现代控制理论”是控制工程学科的核心课程,一方面控制科学是奠定在坚实的数学基础之上的,理论性较强;另一方面控制科学的终极目标是工程应用,它又有很强的工程性和实践性。因此,教材如何在内容上做到理论联系实际,使学生能够深刻理解所学知识的工程背景和工程含义,而不是去死记一些干巴巴的数学公式和结论,这对学生运用所学知识解决实际问题能力的培养将是至关重要的。

出于上述考虑,作者有意识地加强了书中各知识点工程意义的解释,并注意结合经典控制理论的知识来加深对现代控制理论相关内容的理解,考虑到多变量系统零、极点的知识对学生从整体上把握多变量控制系统的结构特征,深刻理解能控性和能观性,建立经典和现代控制理论,乃至时域和频域方法之间的联系都是很有益处的,书中增加了相关内容的介绍。另外,结合作者的研究工作,以例题的形式给出了一类非线性时变系统稳定性的结果(例 4.24)、扩展最优调节器问题的解(例 6.12)和扩展最优输出跟踪器问题的解(例 6.14)。

注意到目前现代控制理论课程有所加强的趋势,和适应不同学时、本科生或研究生的不同教学要求,本书安排了传递函数矩阵的零、极点(2-6),系统连接后的零、极点(2-7),多输入多输出系统的标准型(2-8),串联和反馈连接系统的能控性和能观性(3-5),绝对稳定性理论(4-6),无源性设计(4-7),多输入多输出系统的极点配置(5-2),状态反馈去耦设计(5-6),渐近跟踪调节器设计(5-7)和最优控制理论(第 6 章)的内容。对于线性离散时间系统,在状态空间描述、传递函数、能控能观性、稳定性、标准型及系统设计方法等方面与连续时间系统有平行的结论,本书只做简单介绍。对于本科生 32 学时的教学计划来说,建议这些内容不讲,或有选择地选择其中的部分内容,对于本科生 48 学时或以上的教学计划来说,建议对上述内容的部分或全部进行系统地讲解。

本书后面的附录给出了与书中内容相关的 MATLAB 命令一览表,供读者参考。

本书由河北工业大学的安连祥教授和天津理工大学的高强教授主审,天津大学的李冬辉教授和左志强教授也为本书的内容提出了不少好的建议,在此一并表示感谢。

由于作者水平有限,书中难免存在不妥之处,希望读者不吝指正。

夏超英

2015 年 12 月于天津大学

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1-1 控制理论的形成与发展	1
1-2 现代控制理论的应用举例	2
1-3 本书的内容及教学建议	4
习题	4
第 2 章 系统的状态方程描述和状态方程的解	6
2-1 系统的状态方程和状态空间表达式	6
2-2 传递函数的几种标准实现	18
2-3 线性变换	28
2-4 线性系统状态方程的解	37
2-5 线性系统的稳定性分析	44
2-6 系统的传递函数矩阵	47
2-7 系统的连接	55
2-8 线性离散时间系统	61
习题	65
第 3 章 线性系统的能控性和能观性	71
3-1 连续时间线性系统的能控性和能观性	72
3-2 连续时间线性系统的能控性和能观性判据	78
3-3 用约当标准型判定系统的能控性和能观性	85
3-4 用传递函数矩阵判定系统的能控性和能观性	89
3-5 串联和反馈连接系统的能控性和能观性	94
3-6 离散时间线性系统的能控性和能观性	98
3-7 系统的结构分解	100
3-8 系统的标准型	115
习题	128
第 4 章 系统的稳定性分析	134
4-1 李雅普诺夫稳定性	134
4-2 李雅普诺夫第二法(直接法)	140
4-3 构造李雅普诺夫函数的规则化方法	148
4-4 李雅普诺夫第一法(间接法)	153
4-5 线性系统的稳定性分析	156
4-6 绝对稳定性理论	168
4-7 无源性设计	183

习题	192
第 5 章 控制系统状态空间设计方法	197
5-1 状态反馈及对系统特性的影响	197
5-2 极点配置问题	202
5-3 系统镇定问题	216
5-4 系统实现问题	219
5-5 状态观测器设计	225
5-6 输入输出解耦设计	239
5-7 渐近跟踪调节器设计	251
习题	258
第 6 章 动态系统的最优控制	264
6-1 最优控制问题的数学描述	264
6-2 泛函和泛函的极值	266
6-3 用变分法解决最优控制问题	276
6-4 线性系统的二次型性能指标最优控制	285
6-5 最小值原理	302
6-6 动态规划	310
6-7 用动态规划法解决最优控制问题	316
习题	323
参考文献	328
附录 MATLAB 函数一览表	329
部分习题参考答案	334

第 1 章 绪 论

系统控制的理论和实践被认为是 20 世纪中对人类生产活动和社会生活发生重大影响的科学领域之一。在过去的半个多世纪中,自动控制技术在社会经济各部门中的广泛应用,极大地促进了化工、造纸、电力、冶金、汽车、家电等工业行业的技术进步,改善了劳动条件,提高了产品质量和劳动生产率,促进了产品的更新换代。特别是近二三十年来,随着微电子技术和计算机技术的进步,控制理论的研究成果在航空航天、军事工业、核能发电等现代科学技术领域,在生物、医学、环保、智能交通、新能源利用、经济管理 etc 新兴领域,都起着非常重要的作用。

1-1 控制理论的形成与发展

控制理论与一切其他技术科学一样,也是在社会发展需求的推动下,从解决社会生产和工程问题的需求中产生和发展起来的。一般认为,控制理论的发展经历了“经典控制理论”和“现代控制理论”两个发展阶段。

早在控制理论形成之前,就有蒸汽机的飞轮调速器、鱼雷的航向控制系统、航海罗经的稳定器、放大电路的镇定器等自动控制装置,这些都是人们不自觉地应用了反馈控制的概念而构成的自动控制系统的例子。20 世纪二三十年代,马克斯威尔对装有调速器的蒸汽机动态特性的分析,马诺斯基对船舶驾驶控制的研究是控制理论最早期的研究成果。到 20 世纪 40 年代,以奈奎斯特的稳定判据、伯德的对数频率特性和伊万思的根轨迹法三项成果为标志,自动控制技术得到了迅速的发展,在第二次世界大战期间发挥了巨大的作用,其中雷达-火炮跟踪控制系统和 V2 火箭自动导航系统是其中最为突出的范例。至 50 年代中期,经典控制理论已经是一门十分成熟的理论,并在大量军事武器和工业过程的控制装置中得到了广泛应用。

经典控制理论采用传递函数描述控制对象,利用根轨迹法和频率特性法解决单输入单输出反馈控制系统的分析和综合问题。随着控制工程实践的不断深入,当人们试图应用经典控制理论的分析 and 设计方法,解决多回路和复杂系统的控制问题时,却遇到了难以克服的困难。

20 世纪五六十年代是控制理论发展的转折期,期间,维纳将控制问题和通信问题统一考虑,发展了有噪声情况下的信号滤波、预测和平滑,哈尔德的序列分析和贝尔曼的动态规划考虑了一大类动态系统的优化控制问题,特别是卡尔曼把分析力学中广泛采用的状态空间描述引入到控制理论中来,并在此基础上给出了对研究系统结构和控制具有基本意义的能控性和能观性的概念,而卡尔曼、布西递推滤波器的发现,摆脱了维纳滤波器关于平稳随机过程的假设和求解积分方程的限制。同一时期,苏联学者对包含非线性特性、饱和作用的控制系统最优控制的研究,导致了庞特里亚金等“极大值原理”的发现,与变分法和贝尔曼的最优性原理相联系,又进一步刺激了与非线性泛函分析相关的优化问题的研究,并最终形成了最优控制理论。这些新理论加深了人们对控制系统自身规律性的认识,为 60 年代蓬勃兴起的航天技术的发展做出了巨大贡献,特别是在美国组织实施的载人登月工程中取得了辉煌成就。

这一时期控制理论的发展以状态空间法为特征,以解析计算为主要手段,通过严谨的数

学结构和对设计指标的明确描述为控制工程提供了新的分析和设计方法，同时，将控制系统看成因果系统，将控制作用表示成系统当前状态的函数，是控制工程在设计理念上的一次突破。现代控制理论所阐述的状态空间法既适用于线性系统，也适用于非线性系统，甚至时变系统，极大地扩展了控制理论的研究范围和解决各种复杂控制问题的能力。而就多回路线性系统而言，70年代末基于输入输出频域特性描述的系统分析与设计方法也得到了发展，在这方面主要是罗森布罗克和麦克法伦的工作，他们利用矩阵对角优势的概念进行多变量反馈系统的设计，由此得到的理论和方法可以通过计算机辅助设计方便地用于系统综合，有物理直观性强，便于综合和调整的优点。到80年代末，现代控制理论的其他分支如系统辨识理论、随机控制理论、非线性系统理论、鲁棒控制、自适应控制等相继提出并得到发展，现代控制理论的基本框架已经基本形成。

现代控制理论以及各分支和经典控制理论之间，并非谁能够包含谁，谁可以替代谁的关系。在控制理论的实践过程中，不同设计理念和设计方法都取得了巨大的成功，但适用范围和应用对象不同，各有所长，各有所短，如图 1.1 所示。

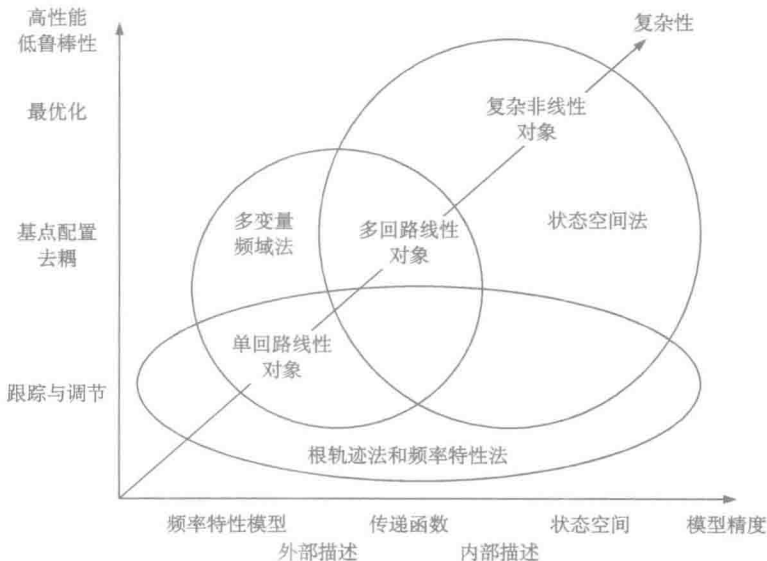


图 1.1 控制系统设计方法及适用对象

1-2 现代控制理论的应用举例

现代控制理论基于状态空间的系统分析和设计方法，阐明了状态空间模型反映的系统内部状态信息对高性能复杂控制系统设计的必要性。在经典控制理论单回路反馈控制系统设计中，随开环放大倍数的增大，会出现系统静态控制精度和动态特性、快速性和稳定性之间的矛盾，采用一阶滞后、一阶超前或二阶滞后、超前调节器，通过开环放大倍数和调节器参数的调整，只能对系统根轨迹主分支的走向、中频段幅值穿越频率和稳定裕度进行调整，控制系统达到的性能指标被限制在一定的限度以内。为提高系统的控制性能，可以采用更复杂的高阶串联调节器，除此以外，在反馈校正内环中应用输出的微分反馈，即测速反馈，这样控

制作用不再只是输出误差和调节器状态的函数，还增加了被控对象的状态变量，这正是现代控制理论应用状态反馈进行系统动态设计的简单例子。在现代控制理论多变量控制系统设计中，状态反馈是内环，输出反馈是外环，用状态反馈实现的极点配置、系统镇定、去耦设计是一种用定量化方法完成的定性设计。模型不确定、参数偏差会影响极点配置和去耦设计的精度，但只要输出变量被准确测量，由于输出反馈外环的存在，闭环系统的性能对极点配置和去耦设计的误差并不敏感，即使在最优控制系统中，由状态反馈实现的最优控制策略对系统建模误差也同样具有鲁棒性。控制工程近三十年来的实践说明，建立在系统状态空间模型基础之上的状态空间方法已经成为现代控制工程分析和设计的主流方法，除航空航天和军事领域以外，工程应用中理论与实际之间存在的差距正在逐渐缩小，下面是这方面的一些实例。

在传统的电力传动领域，20世纪80年代以来，由于可关断功率器件的出现和微处理器技术的高速发展，交流传动领域一直是现代控制理论应用最为活跃和最有成效的领域之一。应用旋转变换和磁场观测，将控制算法由静止坐标系旋转到电机同步坐标系下，实现了磁场和转矩的去耦控制，使出现于20世纪70年代的矢量控制策略得以实现。除此以外，为实现无速度传感器控制，各种转速观测器的设计方案，基于卡尔曼滤波器的设计方案，基于李雅普诺夫稳定性、超稳定性理论的设计方案在实际中得到了开发和应用。为解决电机参数随温度变化对系统控制性能带来的影响，各种参数辨识算法得到了开发应用。经过二十多年的发展，交流传动系统的理论和实践取得了巨大的成功，交流传动系统的性能不仅可以与直流传动系统相媲美，更一举成为变速传动的主流。

在电力变换和应用领域，近三十年来电力电子技术起到了越来越重要的作用。电力电子技术涉及电力电子器件、微处理器和控制理论，其中电力电子器件是基础，而变流控制技术的核心。在电力电子变换装置中，功率器件工作在高频开关状态，引起电路拓扑结构的快速切换，不同的电路拓扑结构有不同的状态空间描述，状态空间平均模型在电力电子控制装置的分析与设计中被广泛采用。在已经普及应用的有源功率因数校正装置和谐波补偿装置中，谐波观测、去耦控制、重复控制、非线性反馈线性化等先进控制算法得到了开发与应用。近十年来，新能源的开发与利用，包括光伏发电和风能发电系统中的并网逆变技术，效率最大化控制技术，混合动力汽车、纯电动汽车和燃料电池汽车中的电机控制技术和多能源优化利用，都是控制理论重要的应用领域。

在电力行业，现代大型发电厂为妥善处理生产过程中的各个变量的关系，如压力、氧气含量、温度、速度等，以提高发电量，广泛采用了越来越多的计算机控制，并集中采用了许多现代控制工程最新和最突出的研究成果。另外，电力系统中常常发生大的扰动，这些扰动来源于负荷的突变、线路事故或切合操作。当发生诸如短路这样大的事故使系统脱离稳态工作点进入故障暂态中时，继电保护装置检测出事故并断开事故线路需要一定时间。为保证供电安全和防止大范围停电事故的发生，电力系统暂态稳定性分析所要解决的问题是，应用李雅普诺夫稳定性的分析方法对系统重新回到稳定工作点的能力、稳定域和临界清除时间做出一个估计。

目前我国正处在社会主义现代化建设的新时期，能源短缺已经成为限制社会发展的关键因素，节能降耗，建设资源节约型环境友好新社会，是全社会将要面临的首要课题和艰巨任务。分布式智能电网是今后的一个发展方向，其优势在于可以充分开发利用各种分散存在的能源，并进行优化配置，以提高能源的利用效率，降低污染，其中涉及分散并网风电、太阳能发电技术、风光储发电互补技术、余热余压发电技术、电热多联供技术等，将对输配电系统的安全稳定运行产生极

大影响。分布式电网的稳定性分析与控制,各供电设备和储能装置间的动态优化管理与控制,都将是控制理论特别是现代控制理论的重要应用领域。

1-3 本书的内容及教学建议

本课程主要学习现代控制理论的状态空间部分,包括线性系统分析与设计的内容,李雅普诺夫稳定性和最优控制三部分内容。

本书各章节的内容安排如下。

第1章包括控制理论的形成与发展,现代控制理论的应用举例等。通过对本章内容的学习,可以使学生对控制理论的知识体系,各部分间的相互关系及解决的问题,有一个整体性的了解。本章的建议学时为2学时。

第2章主要介绍连续时间系统的状态空间描述,非线性系统在工作点处的线性化,传递函数的几种标准实现,状态变换和状态方程的解,线性系统的稳定性,系统的传递函数矩阵描述和传递函数矩阵的零、极点,系统的连接,离散时间系统等。本章的建议学时为12学时。

第3章主要介绍系统的能控性和能观性的概念,能控和不能控、能观与不能观子空间的结构,能控性和能观性的代数判据,用约当标准型和传递函数矩阵判定系统的能控性能观性,串联和反馈连接系统的能控性能观性,能控能观结构分解和标准型等。本章的建议学时为12学时。

第4章介绍李雅普诺夫稳定性理论,主要内容包括李雅普诺夫稳定性的概念,李雅普诺夫第二法及其基本定理,构造李雅普诺夫函数的规则化方法,李雅普诺夫第一法,线性系统的稳定性分析,绝对稳定性理论和无源性设计等。本章的建议学时为12学时。

第5章先介绍状态反馈对系统性能的影响,极点配置、系统镇定和系统实现问题,然后介绍状态观测器、输入输出解耦和渐近跟踪调节器的设计方法。本章的建议学时为12学时。

第6章介绍最优控制理论,包括泛函变分法的主要内容和结果及其在最优控制问题中的应用,线性系统二次型性能指标最优控制,最小值原理及其应用,动态规划和最优性原理,贝尔曼方程及其与最小值原理的一致性。本章的建议学时为12学时。

总之,控制工程是一个跨学科的综合性的工程学科,现代控制理论是它的核心课程之一,它的理论性较强,同时又有很强的工程性和实践性。如前言中所述,任课教师可以根据本科生或研究生不同的教学要求和课时,有选择地安排教学内容。在本课程的讲授过程中,教师还应该根据专业的特点,有意识地结合实例来加深学生对知识的理解,重点讲解分析问题和解决问题的思路和方法,并由此激发学生的学习热情。

习 题

1-1 请分别简述经典控制理论和现代控制理论的内容,采用的分析、设计方法及其适用范围,它们有哪些相同和不同?

1-2 请回顾一下自动控制原理课程中所讲授的控制系统时域和频域两种分析和设计方法,它们各自的特点和适用范围如何?各有什么优缺点?两者间的关系如何?

1-3 如果遇到多输入多输出控制系统设计,非线性控制系统的设计,控制量少于被控量的系统设计,等等,

请回顾一下自动控制原理课程所讲授的内容，其中哪些是有效的，哪些会失效，可能遇到的问题是什么？

1-4 根据指令和输出的偏差来决定控制量，称为反馈控制。反馈控制根据控制效果改变控制量，这种事后诸葛亮式的控制方式，会给系统带来哪些优点和弊端？在反馈控制的基础上，控制量还和系统的状态有关，这会带来什么好处？

1-5 如何理解被控对象的因果性和控制系统的因果性？设系统当前控制只与系统当前状态和当前指令有关，或设系统当前控制除与系统当前状态和当前指令有关外，还与今后指令(即计划)有关，后者与前者相比较，可能获得的好处是什么？对于因果的被控对象及其控制系统，除系统当前状态外，控制量还与系统以前的状态相关，这有意义吗？为什么？

1-6 如何理解经典控制理论和现代控制理论之间的关系？经典控制理论可以解决的控制问题，现代控制理论一定可以解决吗？如果回答是肯定的，请问学习经典控制理论的意义是什么？反之，同样的问题也请认真考虑一下。

1-7 系统和状态的概念对你来说应该并不陌生，请回顾一下前序课程的相关内容，系统的状态变量是如何定义的，它有些什么特点？

1-8 简单叙述一下控制理论的发展历程，不同发展阶段的标志性成果是什么？

第2章 系统的状态方程描述和状态方程的解

在经典控制理论中,用传递函数研究系统的动态响应过程。传递函数是在零初始条件下定义的,应用传递函数可以研究系统静止状态下的响应过程,或系统从上一个稳态到下一个稳态的响应过程,并不便于用来对非零初始状态下和未进入稳态时系统的响应过程进行分析。另外,只有线性定常系统才有传递函数,对于时变系统和非线性系统,传递函数的概念和分析方法是无效的。系统在工作点附近的线性化模型只能较好地描述系统对小信号的响应特性。随着科学技术的不断发展,自动控制系统的性能和要求越来越高,所面临的控制问题也越来越复杂多样,其中包括多输入多输出系统、非线性复杂系统、最优控制系统等。经典控制理论基于系统输入输出描述的输出反馈误差调节的系统设计理念和方法,在很多情况下无法满足控制工程实际的需求,逐渐暴露出了它的局限性。

系统的状态空间描述是控制系统状态空间分析和设计的基础,状态空间描述是系统内部特性的描述,反映了系统输入、输出和系统内部状态变量的关系。控制工程中处理的大多数被控对象或系统都是因果的,控制决策应该是系统状态的函数,依据这一理念,控制理论在20世纪60年代前后开始了从经典理论到现代理论的过渡。反映这一过渡的重要标志是卡尔曼把分析力学中广泛采用的状态空间描述引入到了控制理论中来,并在此基础上形成了系统分析与设计的状态空间方法。状态方程描述对线性和非线性系统、定常和时变系统、单输入单输出和多输入多输出系统都适用,便于研究复杂的控制策略,便于计算机求解。

本章将首先介绍系统和系统状态的概念,给出状态方程和状态空间表达式的一般形式,对如何建立系统的状态空间描述进行一些必要的讨论,然后介绍非线性系统在工作点附近的线性化方法,线性变换及其特性,系统矩阵的约当化,状态方程的解和线性定常系统稳定性的判别方法,系统传递函数矩阵和它的零点与极点,系统的连接,最后对离散时间系统进行简单的介绍。

2-1 系统的状态方程和状态空间表达式

本节先介绍系统的一些基本概念,然后从一些简单的实例开始,阐述建立系统状态空间描述的方法和原则,给出系统状态方程描述的几种形式,最后介绍系统在工作点附近的线性化方法。

1. 系统和系统的状态

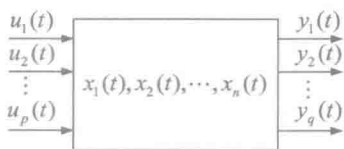


图2.1 控制系统中的系统描述

控制工程中讨论的系统,通常用图2.1所示的方框图描述,图中指向方框的箭头上方的变量 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$ 表示系统的输入, p 表示输入的个数;方框中表示系统内部状态的一组变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为系统的状态变量, n 表示状态变量的个数,状态变量通过微分方程和系统的输入变量相联系,微分方程表明了输入作用是如何对系统状态产生影响的,状态变量一般不能通过直接测量得

到;从方框引出的箭头上方的变量 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$ 表示系统的输出, q 表示输出的个数, 在控制系统中, 一般只有被控量才被作为输出变量, 它或者是系统的某个状态变量, 或者是系统状态变量的代数函数, 通常可以由直接测量得到。

一般来说, 系统状态变量的选取并不唯一, 但它的最小个数却是一定的, 它是描述系统内部动态特性个数最小的一组变量, 对因果系统而言, 它满足下述两个条件。

(1) 在初始时刻 $t = t_0$, 状态变量 $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ 给出系统的初始状态。

(2) 一旦给出 $t \geq t_0$ 时系统的输入作用和系统 t_0 时刻的初始状态, 则系统 $t \geq t_0$ 时的状态便被唯一确定。

下面分别用

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

表示系统的状态向量、输入向量和输出向量, 其中状态向量中状态变量的个数 n 称为状态的维数, 也称为系统的阶数。

2. 系统的状态方程描述

对于 n 阶动态系统, 输入变量和状态变量间的关系可以用 n 个一阶微分方程联立组成的微分方程组来描述, 这个联立的一阶微分方程组称为系统的状态方程, 状态方程的解 $\mathbf{x}(t)$ 是 n 维状态空间中的一个点, 它随时间变化的情况描述了系统的运行轨迹。系统的输出一般是系统状态变量和输入变量的函数, 反映这种函数关系的表达式称为输出方程。系统的状态方程和输出方程一起称为系统的状态空间模型或状态空间表达式。当状态方程和输出方程都是状态变量和输入变量的线性函数时, 称系统为线性的, 否则称系统为非线性的。当系统的响应特性不随时间发生变化, 即在相同初始条件和相同输入信号作用下, 系统的状态响应和输出响应是相同的, 不受起始时刻不同的影响, 则称系统为定常的, 否则称为时变的。

建立系统或对象状态空间表达式的方法有机理建模方法, 根据系统方框图的建模方法, 以及由系统的输入输出微分方程描述、输入输出传递函数描述建模的方法等。由不同建模方法得到的系统状态空间描述, 其内涵和意义是有区别的, 这在后面的章节中将逐渐给以论述。

先来看机理建模的三个例子。

例 2.1 电阻网络如图 2.2 所示, 设电压源电压 u 为输入, 电阻 R_4 上的电压 y 为输出, 试推导输入变量和输出变量间的关系, 它是动态系统吗?

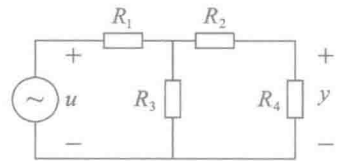


图 2.2 例 2.1 的电阻网络

解 这是一个纯电阻网络, 没有储能元件, 系统在 t 时刻的输出完全由 t 时刻系统的输入 u 来决定, 即有

$$y = \frac{(R_2 + R_4) \parallel R_3}{R_1 + (R_2 + R_4) \parallel R_3} \frac{R_4}{R_2 + R_4} u$$

系统用代数方程来描述, 没有内部状态变量, 阶数为零, 是静态系统, 不是动态系统。

例 2.2 RLC 网络如图 2.3 所示, 设输入为电压 u_r , 输出为电容上的电压 u_c , 试选取状态变量, 给出系统的状态空间表达式。

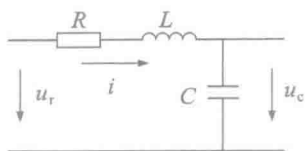


图 2.3 例 2.2 的 RLC 网络

解 图 2.3 所示 RLC 电路的回路方程为

$$u_r(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

选取回路电流 i 和电容上的电压 u_c 作为状态变量, 即 $x_1(t) = i(t)$,

$x_2(t) = u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$, 则有系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_r$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1$$

输出方程为

$$y = x_2$$

写成矩阵方程的形式即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_r$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

这是一个单输入单输出系统的例子。

例 2.3 某一弹簧、阻尼、质量块系统如图 2.4 所示, 输入为两质量块上的作用力 F_1 、 F_2 , 输出为两质量块的位移 y_1 、 y_2 , 试列写其状态空间表达式。

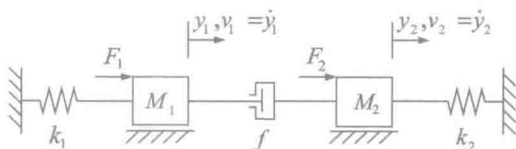


图 2.4 例 2.3 的系统

解 如图 2.4 所示选取坐标系和力的参考方向, 取 $F_1 = F_2 = 0$ 时系统的静止位置为位置 y_1 和 y_2 的零点, 根据牛顿运动定理, 分别列写两质量块力的平衡方程有

$$M_1 \ddot{y}_1 = F_1 - k_1 y_1 - f(v_1 - v_2)$$

$$M_2 \ddot{y}_2 = F_2 - k_2 y_2 - f(v_2 - v_1)$$

分别选取两质量块的位移和速度作为状态变量, 即 $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1 = v_1$, $x_3 = y_2$, $x_4 = \dot{y}_2 = v_2$, 注意到 $x_2 = \dot{y}_1 = \dot{x}_1$, $x_4 = \dot{y}_2 = \dot{x}_3$, 得到状态方程和输出方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_1}{M_1}x_1 - \frac{f}{M_1}x_2 + \frac{f}{M_1}x_4 + \frac{1}{M_1}F_1$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{f}{M_2}x_2 - \frac{k_2}{M_2}x_3 - \frac{f}{M_2}x_4 + \frac{1}{M_2}F_2$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3$$

写成矩阵方程的形式即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M_1} & -\frac{f}{M_1} & 0 & \frac{f}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{f}{M_2} & -\frac{k_2}{M_2} & -\frac{f}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

这是一个 2 输入 2 输出系统的例子。

下面是根据方框图建模的两个例子。

例 2.4 图 2.5 是电枢电压控制的直流电动机的动态结构图, 图中电枢电压 u_a 减去反电动势 e_b 后作用在电枢回路的电感 L_a 和电阻 R_a 上得到电枢电流 i_a , i_a 乘以电机的转矩系数 C_m 得到电机的电磁转矩 m_m , m_m 减去负载转矩 m_L 后为转动惯量 J_m 加速得到电机转速 ω , ω 乘以电机的反电势系数 C_e 得到电机的反电动势 e_b 。试以电枢电压和负载转矩作为输入, 电机转速作为输出, 给出直流电动机的状态空间表达式。

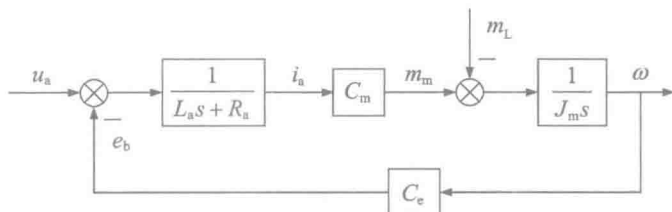


图 2.5 直流电动机的动态结构图

解 根据动态结构图, 选取电机转速 ω 和电机电枢电流 i_a 作为状态变量, 即 $x_1 = \omega$, $x_2 = i_a$, $u_1 = u_a$, $u_2 = m_L$, 则有

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J_m}(m_m - m_L) = \frac{C_m}{J_m}i_a - \frac{1}{J_m}m_L$$

$$\dot{i}_a = \frac{1}{L_a}(u_a - R_a i_a - e_b) = \frac{1}{L_a}(u_a - R_a i_a - C_e \omega)$$

得到直流电动机的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_m}{J_m} \\ -\frac{C_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J_m} \\ \frac{1}{L_a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

例 2.5 某含有操作非线性的反馈系统如图 2.6 所示, 其中控制量是误差的非线性函数 $u = f(e)$, 满足 $f(0) = 0$, 系统的线性部分是输入输出微分方程描述的二阶系统。试取系统输出 y 及其各阶导数为状态变量, 给出系统的状态空间表达式。

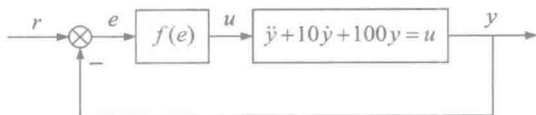


图 2.6 例 2.5 的非线性反馈系统

解 由图 2.6 得

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 100y = u = f(e) = f(r - y)$$

设 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$, 系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -10x_2 - 100x_1 + f(r - x_1) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, r) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, r) = -10x_2 - 100x_1 + f(r - x_1) \\ y &= g(x_1, x_2, r) = x_1 \end{aligned}$$

这是一个二阶的非线性系统。

实际上, 对于由输入输出微分方程描述的 n 阶系统

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y^{(1)}, y, r) = 0$$

设函数 F 可就输出 y 的 n 阶导数解出, 即有 $y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y^{(1)}, y, r)$, 且函数 F 中不含输入作用 r 的导数, 此时可取输出 y 及其 $n-1$ 阶导数作为状态变量, 即取 $x_1 = y, x_2 = y^{(1)}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$, 则有系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x^{(n)} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1, r) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

将输出及其 $n-1$ 阶导数作为状态变量时, 称为相变量形式的状态变量。一般来讲, 当系统的输入输出描述中不含输入作用的导数时, 可以取相变量形式的状态变量, 否则不能这样做。请看下面由传递函数建立系统状态空间描述的例子。

例 2.6 已知某被控对象的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s + 2}{s^2 + 6s + 11}$$

将对象的实际结构假想为含有两个串联的积分器, 控制作用直接连接到第一个积分器的输入, 各积分器输出也反馈到第一个积分器的输入, 试给出对象的状态空间表达式。

解 将传递函数写成

$$Y(s) = \frac{3s+2}{s^2+6s+11}U(s) = (3s+2) \times \frac{1}{s^2+6s+11}U(s)$$

容易得到如图 2.7 所示的动态方框图，它的传递函数与题中给出的传递函数相同。

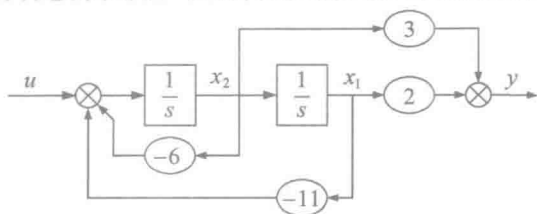


图 2.7 例 2.6 的系统方框图

取两个串联积分器的输出为状态变量，得系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

根据对象的传递函数可以得到它的输入输出微分方程描述为

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 3\dot{u} + 2u$$

即

$$\ddot{y} = -6\dot{y} - 11y + 3\dot{u} + 2u$$

若选取对象的输出及其导数作为状态变量，即取相变量 $\tilde{x}_1 = y$ ， $\tilde{x}_2 = \dot{y} = \dot{\tilde{x}}_1$ ，则有

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

状态方程中含有输入的导数项，不符合状态空间描述的形式要求。

类似的问题也发生在例 2.4 中。在例 2.4 中若取输出及输出的导数为状态变量，即取 $\tilde{x}_1 = \omega$ ， $\tilde{x}_2 = \dot{\omega}$ ，注意到 $\tilde{x}_1 = x_1$ ， $\tilde{x}_2 = C_m i_a - m_L = C_m x_2 - u_2$ ，将它们代入到例 2.4 的结果中有

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_m} \\ -\frac{C_m C_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_m}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

因为状态方程的右边含有输入的导数，所以它不是希望的形式。实际上，从上述状态方程的第二行，得到电枢电压控制电机转速的电动机输入输出微分方程描述为

$$\ddot{\omega} + \frac{R_a}{L_a} \dot{\omega} + \frac{C_m C_e}{L_a} \omega = \frac{C_m}{L_a} u_a - \frac{R_a}{L_a} m_L - \dot{m}_L$$

它含有负载转矩输入的导数。