中学生数学思维方法丛书

4 改造命题

冯跃峰 著

中国科学技术大学出版社

中学生数学思维方法丛书

4 改造命题

冯跃峰 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了数学思维方法的一种形式：改造命题，详细讨论了改造命题的目的、相关形式及其方法与技巧. 许多研究内容都是本书首次提出的. 比如轮换叠合、顺序搭配、错位搭配、同构搭配、功能搭配、奉陪搭配、胜负局搭配、捆绑同类元素、捆绑相邻元素、操作捆绑等，这些都是作者潜心研究的成果.

本书适合高等院校数学系师生、中学数学教师、中学生和数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

改造命题/冯跃峰著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2017.1
(中学生数学思维方法丛书)
ISBN 978-7-312-03860-0

Ⅰ.改… Ⅱ.冯… Ⅲ.中学数学课—教学研究 Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 280809 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
https://zgkxjsdxcbs.tmall.com
印刷 安徽省瑞隆印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 880 mm×1230 mm 1/32
印张 10
字数 259 千
版次 2017 年 1 月第 1 版
印次 2017 年 1 月第 1 次印刷
定价 30.00 元

序

问题是数学的心脏，学数学离不开解题.我国著名数学家华罗庚教授曾说过：如果你读一本数学书，却不做书中的习题，那就犹如入宝山而空手归.因此，如何解题，也就成为了一个千古话题.

国外曾流传着这样一则有趣的故事，说的是当时数学在欧几里得的推动下，逐渐成为人们生活中的一个时髦话题（这与当今社会截然相反），以至于托勒密一世也想赶这一时髦，学点数学.虽然托勒密一世见多识广，但在学数学上却很吃力.一天，他向欧几里得请教数学问题，听了半天，还是云里雾里不知所云，便忍不住向欧几里得要求道："你能不能把问题讲得简单点呢?"欧几里得笑着回答："很抱歉，数学无王者之路." 欧几里得的意思是说，要想学好数学，就必须扎扎实实打好基础，没有捷径可走.后来人们常用这一故事讥讽那些凡事都想投机取巧之人.但从另一个角度想，托勒密一世的要求也未必过分，难道数学就只能是"神来之笔"，不能让其思路来得更自然一些吗?

记得我少年时期上学，每逢学期初发新书的那个时刻是最令我兴奋的，书一到手，总是迫不及待地看看书中有哪些新的内容，一方面是受好奇心的驱使，另一方面也是想测试一下自己，看能不能不用老师教也能读懂书中的内容.但每每都是失望而终：尽管书中介绍的知识都弄明白了，书中的例题也读懂了，但一做书中的练习题，却还

是不会.为此,我曾非常苦恼,却又万思不得其解.后来上了大学,更是对课堂中老师那些“神来之笔”惊叹不已,严密的逻辑推理常常令我折服.但我未能理解的是,为什么会想到这么做呢?

20世纪中叶,美国数学教育家G. Polya的数学名著《怎样解题》风靡全球,该书使我受益匪浅.这并不是说,我从书中学到了“怎样解题”,而是它引发了我对数学思维方法的思考.

实际上,数学解题是一项系统工程,有许许多多的因素影响着它的成败.本质的因素有知识、方法(指狭义的方法,即解决问题所使用的具体方法)、能力(指基本能力,即计算能力、推理能力、抽象能力、概括能力等)、经验等,由此构成解题基础;非本质的因素有兴趣、爱好、态度、习惯、情绪、意志、体质等,由此构成解题的主观状态;此外,还受时空、环境、工具的约束,这些构成了解题的客观条件.但是,具有扎实的解题基础,且有较好的客观条件,主观上也做了相应的努力,解题也不一定能获得成功.这是因为,数学中真正标准的、可以程序化的问题(像解一元二次方程)是很少的.解题中,要想把问题中的条件与结论沟通起来,光有雄厚的知识、灵活的方法和成功的解题经验是不够的.为了判断利用什么知识,选用什么方法,就必须对问题进行解剖、识别,对各种信息进行筛选、加工和组装,以创造利用知识、方法和经验的条件.这种复杂的、创造性的分析过程就是数学思维过程.这一过程能否顺利进行,取决于思维方法是否正确.因此,正确的思维方法亦是影响解题成败的重要因素之一.

经验不止一次地告诉我们:知识不足还可以补充,方法不够也可以积累,但若不善思考,即使再有知识和方法,不懂得如何运用它们解决问题,也是枉然.与此相反,掌握了正确的思维方法,知识就不再是孤立的,方法也不再是呆板的,它们都建立了有血有肉的联系,组成了生机勃勃的知识方法体系,数学思维活动也就充满了活力,得到了更完美的发挥与体现.

G. Polya 曾指出，解题的价值不是答案本身，而在于弄清“是怎样想到这个解法的”，“是什么促使你这样想、这样做的”. 这实际上都属于数学思维方法的范畴. 所谓数学思维方法，就是在基本数学观念系统作用下进行思维活动的心理过程. 简单地说，数学思维方法就是找出已有的数学知识和新遇的数学问题之间联系的一种分析、探索方法. 在一般情况下，问题与知识的联系并非是显然的，即使有时能在问题中看到某些知识的“影子”，但毕竟不是知识的原形，或是披上了“外衣”，或是减少了条件，或是改变了结构，从而没有现成的知识、方法可用，这就是我在学生时代“为什么知识都明白了，例题也看懂了，还是不会做习题”的原因. 为了利用有关的知识和方法解题，就必须创造一定的“条件”，这种创造条件的认识、探索过程，就是数学思维方法作用的过程.

但是，在当前数学解题教学中，由于“高考”指挥棒的影响，教师往往只注重学生对知识方法掌握的熟练程度，不少教师片面地强调基本知识和解决问题的具体方法的重要性，忽视思维方法方面的训练，造成学生解决一般问题的困难. 为了克服这一困难，各种各样的、非本质的、庞杂零乱的具体解题技巧统统被视为规律，成为教师谆谆告诫的教学重点，学生解题也就试图通过记忆、模仿来补偿思维能力的不足，利用胡猜乱碰代替有根据、有目的的探索. 这不仅不能提高学生的解题能力，而且对于系统数学知识的学习，对于数学思维结构的健康发展都是不利的.

数学思维方法通常又表现为一种解题的思维模式. 例如，G. Polya就在《怎样解题》中列出了一张著名的解题表. 容许我们大胆断言，任何一种解题模式均不可能囊括人们在解题过程中表现出来的各种思维特征，诸如观察、识别、猜想、尝试、回忆、比较、直觉、顿悟、联想、类比、归纳、演绎、想象、反例、一般化、特殊化等. 这些思维特征充满解题过程中的各个环节，要想用一个模式来概括，那就像用

数以千计的思维元件来构造一个复杂而庞大的解题机器.这在理论上也许是可行的,但在实际应用中却很不方便,难以被人们接受.更何况数学问题形形色色,任何一个模式都未必能适用所有的数学问题.因此,究竟如何解题,其核心内容还是学会如何思考.有鉴于此,笔者想到写这样一套关于数学思维方法的丛书.

本丛书也不可能穷尽所有的数学思维方法,只是选用一些典型的思维方法为代表做些介绍.这些方法,或是作者原创发现,或是作者从一个全新的角度对其进行了较为深入的分析与阐述.

囿于水平,书中观点可能片面武断,错误难免,敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2015年1月

目　　录

1 符号化

在数学解题中，有时原始问题难以直接解答，或是条件比较繁琐，或是结论比较复杂. 此时，我们需要对命题进行改造，由此发现问题隐含的特点，找到解题途径.

本章介绍改造命题的一种方式：符号化. 所谓符号化，就是用一些符号来表示有关的数学对象. 最常见的符号化方式有：数学语言刻画、引入记号、染色分类、编号染色分类等.

1.1 数学语言刻画

在有些数学问题中，所涉及的条件和解题目标都是用通常的自然语言来描述的，这样的语言通俗易懂，但不便于进行数学推理. 所谓数学语言刻画，就是要将那些通俗的语言用特定的数学符号语言来代替，为解题顺利进行奠定基础.

字母代数是数学语言刻画的最常见方式，它是用若干个字母参数来描述题中的对象，使有关状态相对确定.

例 1 求一个最大的平方数，使它的末两位不都是零，且去掉末两位后仍然是一个平方数.

分析与解 先看条件，考虑用怎样的数学语言表示“去掉末两位后仍然是一个平方数”. 于是，设所求的平方数为 n^2，它的末两位数

为 $b(1\leqslant b\leqslant 99)$，去掉末两位后的数是 a^2，则 $n^2=100a^2+b$.

至此，要求 n 的最大值，可先求 a 的最大值.

子目标为"$a\leqslant ?$".

因为题目条件中并没有关于字母 a 的不等式信息，但有关于字母 b 的不等式信息：$1\leqslant b\leqslant 99$. 于是想到要由"$1\leqslant b\leqslant 99$"得到"$a\leqslant ?$".

这可等价变换为寻找 $b\geqslant g(a)$（新的子目标），即

$$n^2-100a^2\geqslant g(a)$$

至此，只需 $n\geqslant t(a)$ 即可. 因为

$$n^2=100a^2+b\geqslant 100a^2+1$$

所以

$$n\geqslant 10a+1$$

于是

$$b=n^2-100a^2\geqslant(10a+1)^2-100a^2=20a+1$$

所以

$$20a+1\leqslant b\leqslant 99$$

解得

$$a\leqslant 4$$

于是

$$n^2=100a^2+b\leqslant 1600+b\leqslant 1699$$

所以 $n<42$，即 $n\leqslant 41$.

当 $n=41$ 时，$n^2=41^2=1681$ 合乎条件.

综上所述，所求最大数为 1681.

另解 设 $n^2=100a^2+b(1\leqslant b\leqslant 99)$，则

$$b=n^2-100a^2=(n+10a)(n-10a)$$

所以

$$n+10a\mid b,\quad n-10a>0$$

所以

$$n + 10a \leqslant b \leqslant 99, \quad n > 10a$$

$$99 \geqslant n + 10a > 10a + 10a = 20a$$

所以 $a<5$,即 $a\leqslant 4$(下略).

例 2 给定 4 个不全等的数字,用它们组成一个最大的四位数,又用它们组成一个最小的四位数(允许首位数字为 0),然后做差,称为一次运算,对差中的 4 个数字再进行类似的运算.求证:可以经过有限次操作,使最终运算得到 6174.

分析与证明 首先考虑如何用数学语言描述题中"最大的四位数"与"最小的四位数",想到设例题给定的 4 个数字为 a,b,c,d,其中 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$,$a<d$.

此外,为了确定做相应的减法时是否有借位,需分 $b=c$ 和 $b<c$ 两种情况讨论.

(1) 若 $b=c$,则操作一次后,有

最大数$\overline{dcba}$ - 最小数$\overline{abcd}$ $= \overline{(d-a-1)99(10+a-d)}$

算式如下:

$$\begin{array}{c} d\ c\ b\ a \\ a\ b\ c\ d \\ \hline \hline (d-a-1)99(10+a-d) \end{array}$$

所以操作一次以后,四位数的 4 个数字为 $9,9,d-a-1,10+a-d$.

注意到$(d-a-1)+(10+a-d)=9$,从而 $abcd$ 操作一次以后得到的四位数的 4 个数字具有形式:$9,9,x,9-x$,只需对 $x=0,1,2,3,4$ 进行讨论即可.逐一验证 9990,9981,9972,9963,9954,都可得到 6174.

(2) 若 $b<c$,则操作一次后,有

$$\overline{dcba} - \overline{abcd} = \overline{(d-a)(c-b-1)(9+b-c)(10+a-d)}$$

算式如下:

$$\begin{array}{cccc} d & c & b & a \\ a & b & c & d \\ \hline \hline (d-a) & (c-b-1) & (9+b-c) & (10+a-d) \end{array}$$

注意到$(d-a)+(10+a-d)=10$,$(c-b-1)+(9+b-c)=8$,从而 $abcd$ 操作一次以后得到的四位数的 4 个数字具有形式:$x,y,10-x,8-y$,只需对 $x=1,2,3,4,5$ 及 $y=0,1,2,3,4$ 进行讨论即可.逐一验证,都可得到 6174.

综上所述,命题获证.

例 3 已知正整数 n 是一个可以写成某正整数的 k 次幂的数(其中 $k\in\mathbf{N},k\geqslant 2$),且 n 具有如下性质:

(1) 其末尾 k 个数字不全为 0;

(2) 划去它的末尾 k 个数字后所得到的数仍是一个正整数的 k 次幂.

试求所有符合题意的正整数 n 的个数.

分析与证明 首先考虑如何用数学语言描述题中 n 具有的性质"划去它的末尾 k 个数字后所得到的数仍是一个正整数的 k 次幂",想到设题给的正整数

$$n=c^k=(10a)^k+b$$

其中 $a,b,c\in\mathbf{N}^+,k\geqslant 2$.

注意$(10a)^k$的末尾k 个数字都为 0,而 b 是c^k的末尾k 位数,从而 $b<10^k$.又因为 $b>0$,所以 $c>10a$,于是

$$\begin{aligned} b &= c^k-(10a)^k \\ &=(c-10a)\left[c^{k-1}+c^{k-2}\cdot 10a+c^{k-3}\cdot(10a)^2+\cdots+(10a)^{k-1}\right] \\ &\geqslant c^{k-1}+c^{k-2}\cdot 10a+c^{k-3}\cdot(10a)^2+\cdots+(10a)^{k-1} \\ &>(10a)^{k-1}+(10a)^{k-1}+\cdots+(10a)^{k-1} \\ &=k\cdot(10a)^{k-1} \end{aligned}$$

所以 $k\cdot(10a)^{k-1}<b<10^k$,故

$$a^{k-1} \cdot k < 10 \quad ①$$

因为 $k \geqslant 2$,所以由式①,知

$$1 \leqslant a \leqslant 4, \quad 2 \leqslant k \leqslant 9$$

若 $a=1$,当 $k=9$ 时,由于 $b=c^9-10^9 \geqslant 11^9-10^9>10^9$,与 $b<10^9$ 矛盾,所以,$k \neq 9$;

当 $k=8$ 时,由于 $b=c^8-10^8 \geqslant 11^8-10^8>10^8$,与 $b<10^8$ 矛盾,所以,$k \neq 8$;

可以验证当 $a=1$ 且 $c=11$ 时,有 $2 \leqslant k \leqslant 7$ 均符合题意;

当 $a=1$ 且 $c=12$ 时,$k=2,3$ 都符合题意;

当 $a=1$ 且 $c=13$ 时,$k=2$ 符合题意;

当 $a=1$ 且 $c \geqslant 14$ 时,不存在符合题意的整数 k.

若 $a>1$,当 $a=2$ 时,$k=2$,此时 $b=c^2-20^2<10^2$,得 $c=21$ 或 22;

当 $a=3$ 时,$k=2$,此时 $b=c^2-30^2<10^2$,得 $c=31$;

当 $a=4$ 时,$k=2$,此时 $b=c^2-40^2<10^2$,得 $c=41$;

当 $a \geqslant 5$ 时,不存在符合题意的整数 k.

综上所述,符合题意的正整数 n 共有 13 个.

例 4(原创题) 过桥问题:有一士兵要通过一座由敌人封锁的浮桥,经过侦察发现,桥两端关口的守卫在 8:00～9:00 的时间内都会打一次时长为 10 分钟的瞌睡,而士兵通过浮桥所需要的时间为 15 分钟.为了保证有足够的时间过桥,士兵在某日 8:00 前就来到桥头等待,当发现桥头的守卫开始瞌睡时则立即通过关口.当士兵到达桥末端的时候,如果发现那里的守卫此时没有打瞌睡,就可以潜伏在桥上等待时机,直到桥末端的守卫开始瞌睡时就立即通过关口.求士兵能在桥两端守卫分别打瞌睡时平安通过浮桥两端关口的概率,其中假定过桥士兵不在桥两端关口时,守卫不能发现过桥士兵.

分析与解 显然,事件"士兵平安通过浮桥两端关口"由以下两

个事件复合而成.一是事件 A:"士兵在 8:00~8:45 平安通过浮桥始端关口"(因为士兵通过浮桥所需要的时间为 15 分钟);二是事件 B:"士兵在 8:15~9:00 平安通过浮桥末端关口".现在考虑如何用数学语言来描述事件 A 和 B.

对于事件 A,可假设桥始端守卫在 8 点 x 分钟开始打瞌睡,则总体事件所包括的基本事件可表示为区间 $0\leqslant x\leqslant 60$,而事件 A 包括的基本事件可表示为区间 $0\leqslant x\leqslant 45$,于是

$$P(A)=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$$

对于事件 B,再设桥末端守卫在 8 点 y 分钟开始打瞌睡,则事件 B 可表示为:$0\leqslant x\leqslant 45, 0\leqslant y\leqslant 60, x+15\leqslant y+10\leqslant 60$.

由于 x 在$[0,45]$区间内等可能地独立随机取值(它实际上是桥始端守卫以$\frac{3}{4}$的概率在这个时间内开始打瞌睡),且 y 在$[0,60]$区间内等可能地独立随机取值,从而总体事件包括的基本事件可表示为区域 $M=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 45, 0\leqslant y\leqslant 60\}$;而事件 B 包括的基本事件可表示为区域$N=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y-5\leqslant 45\}$(图 1.1).于是

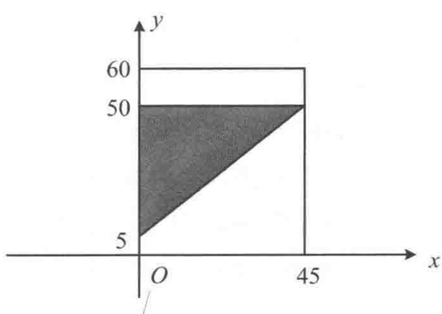

图 1.1

$$P(B)=\frac{S(N)}{S(M)}=\frac{\frac{1}{2}(45\times 45)}{45\times 60}=\frac{3}{8}$$

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{32}$$

故士兵能平安通过浮桥两端关口的概率为$\frac{9}{32}$.

例 5(2013 年清华大学招收保送生试题) 蒲丰投针问题:平行平面内间距为 d 的平行直线,任意放一长度为 l 的针($l<d$),求针与直线相交的概率.

分析与解 先弄清题意,所谓"平行平面内间距为 d 的平行直线",其实际意义是指:平面上无穷多条平行直线,每相邻两条平行直线之间的距离为 d.现在,我们要用数学语言描述"任意放一长度为 l 的针($l<d$)"这一随机事件.怎样才能使"长度为 l 的针"在平面上的位置相对确定呢?选用不同的参数,可得到不同的数学语言描述,从而本题是一个开放性问题,不同参数(等可能取值)的选择会导致不同的结果.

方案 1:选用长度为 l 的针的中点 P 及针的倾斜角 α 确定针的位置.此时,点 P 的位置可用 P 到距离最近的直线的距离 x 来确定,显然 $0\leqslant x\leqslant\frac{d}{2}$,$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$.如果认定 x 在$\left[0,\frac{d}{2}\right]$上及 α 在$[0,\pi]$上都是等可能地随机取值,那么基本事件集合可用二维随机变量(x,α)构成的区域:$A=\{(x,\alpha)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{d}{2},0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$来表示,即图 1.2 中的矩形.

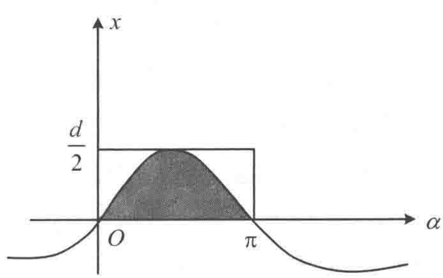

图 1.2

现在，我们用数学语言来描述“针与直线相交”. 也就是说，当二维随机变量(x,α)中的x,α分别取怎样的值时，针与直线相交.

从反面考虑，如果针与直线不相交，则针的两端点位于同一个带形中，此时针的中点O到最近直线的距离

$$x = ON > OM = \frac{l}{2}\sin\alpha$$

反之亦然(图1.3). 于是，当且仅当$0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\sin\alpha$时针与直线相交. 概率事件所包含的基本事件集合可用二维随机变量(x,α)构成的区域：$B=\left\{(x,\alpha)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\sin\alpha\right\}$来表示，见图1.2中的阴影部分. 由于$l<d$，正弦曲线在区间$[0,\pi]$上的部分与$x$轴围成的区域完全在前述矩形中，于是，所求的概率

$$P=\frac{S(B)}{S(A)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\frac{d}{2}\cdot\pi}=\frac{2l}{d\pi}$$

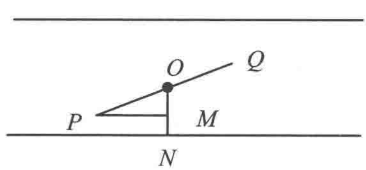

图1.3

方案2：选用长度为l的针的两端点P,Q确定针的位置. 此时，对针的任一位置，称平行直线中与针的中点距离最近的直线为该位置的“近直线”. 当针的中点位于相邻两条平行线之间的中线上时，相应位置有两条与中点距离最近的直线，由于此时的图形关于针的中点对称，从而取其中任意一条作为近直线即可. 于是，点P,Q的位置可用P,Q到“近直线”的有向距离x,y来确定，其中规定平行直线是水平方向，点位于直线上方时，点到直线的距离为正，否则为负.