

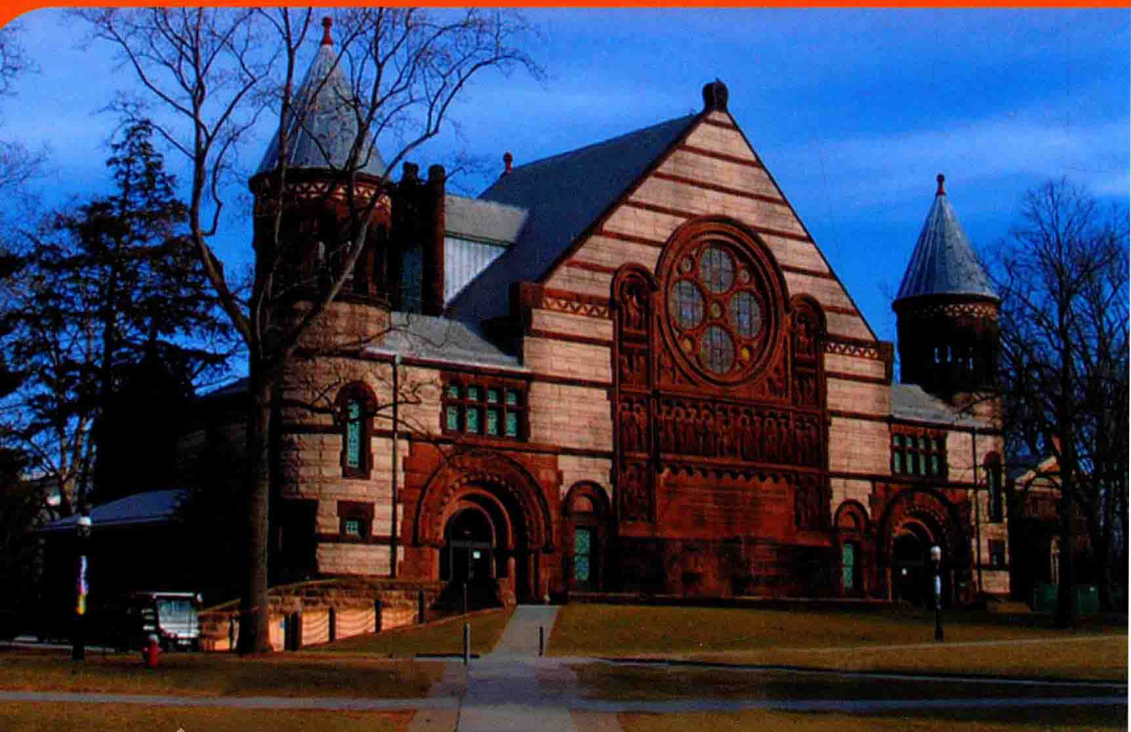
TURING

图灵数学·统计学丛书

普林斯顿 微积分读本 (修订版)

[美] Adrian Banner 著 杨爽 赵晓婷 高璞 译

The Calculus Lifesaver
All the Tools You Need to Excel at Calculus



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

图灵数学·统计学丛书

普林斯顿 微积分读本 (修订版)

[美] Adrian Banner 著 杨爽 赵晓婷 高璞 译

The Calculus Lifesaver
All the Tools You Need to Excel at Calculus



人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

普林斯顿微积分读本 / (美) 阿德里安·班纳著 ;
杨爽, 赵晓婷, 高璞译. -- 2版. -- 北京 : 人民邮电出
版社, 2016. 10

(图灵数学·统计学丛书)

书名原文: The Calculus Lifesaver: All the
Tools You Need to Excel at Calculus
ISBN 978-7-115-43559-0

I. ①普… II. ①阿… ②杨… ③赵… ④高… III.
①微积分 IV. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第216695号

内 容 提 要

本书阐述了求解微积分的技巧, 详细讲解了微积分基础、极限、连续、微分、导数的应用、积分、无穷级数、泰勒级数与幂级数等内容, 旨在教会读者如何思考问题从而找到解题所需的知识点, 着重训练大家自己解决问题的能力。

本书适用于大学低年级学生、高中高年级学生、想学习微积分的数学爱好者以及广大数学教师, 既可作为教材、习题集, 也可作为学习指南, 同时还有利于教师备课。

-
- ◆ 著 [美] Adrian Banner
译 杨爽 赵晓婷 高璞
责任编辑 傅志红
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
固安县铭成印刷有限公司印刷
 - ◆ 开本: 700×1000 1/16
印张: 41.75
字数: 895千字 2016年10月第2版
印数: 11 500-15 500册 2016年10月河北第1次印刷
著作权合同登记号 图字: 01-2009-3812号

定价: 99.00元

读者服务热线: (010)51095186 转 600 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

广告经营许可证: 京东工商广字第 8052 号

站在巨人的肩上
Standing on Shoulders of Giants



iTuring.cn

版 权 声 明

Original edition, entitled *The Calculus Lifesaver : All the Tools You Need to Excel at Calculus* by Adrian Banner, ISBN: 978-0-691-13088-0, published by Princeton University Press. Copyright 2007 by Princeton University Press.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from Princeton University Press.

Simplified Chinese translation copyright 2016 by Posts & Telecom Press.

本书简体中文版由普林斯顿大学出版社授权人民邮电出版社独家出版。未经出版者许可,不得以任何方式复制本书内容。仅限于中华人民共和国境内(香港、澳门特别行政区和台湾地区除外)销售发行。

版权所有,侵权必究。

献给亚里

译者序

对于大多数学生来说,微积分或许是他们曾经上过的倍感迷茫且最受挫折的一门课程了.而本书,不仅让学生能有效地学习微积分,更重要的是提供了战胜微积分的必备工具.

本书源于风靡美国普林斯顿大学的阿德里安·班纳的微积分复习课程.他激励了一些考试前想获得优秀但考试结果却平平的学生.

对于任何单变量微积分的课程,本书既可以作为教科书,也可以用作学习指南,对于全英文授课的教师来说更是一个得力助手.作者班纳是美国普林斯顿大学的著名数学教授并担任新技术研究中心主任.班纳教授的授课风格是非正式、有吸引力并完全不强求的,甚至在不失其详尽性的基础上又增添了许多娱乐性,而且他不会跳过讨论一个问题的任何步骤.

作者独创的“内心独白”方式,即写出问题求解过程中学生们应遵循的思考过程,为我们提供了不可或缺的推理过程以及求解方案.本书的重点在于培养问题求解的能力,其中涉及的例题从简单到复杂并对微积分理论进行了深入探讨.读者会在非正式的对话语境中体会到微积分的无穷魅力.

本书特点:

- 可作为任何单变量微积分教科书的学习指南;
- 非正式的、娱乐性的且非强求的对话语境风格;
- 丰富的在线视频;
- 大量精选例题(从简单到复杂)提供了一步一步的推理过程;
- 定理和方法有证明,还有诸多实际应用;
- 详细探讨了诸如无穷级数这样的难点问题.

这样的一本经典著作将易用性与可读性以及内容的深度与数学的严谨完美地结合在一起.对于每一个想要掌握微积分的学生来说,本书都是极好的资源.当然,非数学专业的学生也将大大受益.

在翻译本书的过程中,译者虽然尽最大努力尊重原文,并尽可能避免直译产生的歧义,但是由于才疏学浅,难免存在翻译不当之处,敬请广大读者批评指正,以便再版时更正.

本书能得以顺利出版,首先要感谢人民邮电出版社图灵公司的大力支持;同时,首都经济贸易大学华侨学院信管系的全体教师也给予了无私的帮助,在此一并表示

衷心感谢. 最后感谢我的家人在本书翻译过程中所给予的支持与鼓励, 尤其是爱女芮绮!

《普林斯顿微积分读本》
微笑着面对数学的世界
积累着超越无穷的力量
分化出化解疑难的翅膀
求解出优化问题的阳光
生成了数学天空的晴朗
秘籍 —— 放飞自己的理想

谨以此诗献给爱女芮绮以及喜爱数学的新生代!

杨 爽
首都经济贸易大学华侨学院信管系

前 言

本书旨在帮助你学习单变量微积分的主要概念,同时也致力于教会你求解问题的技巧.无论你是第一次接触微积分,还是为了准备一次测验,或是已经学过微积分还想再温习一遍,我都希望本书能够对你有所帮助.

写作本书的灵感来自我在普林斯顿大学的学生们.他们在过去的几年里发现,与课堂授课、作业讲解以及他们的教科书一样,本书的初稿是很有帮助的学习指南.以下是他们在学习过程中提出的一些你可能也想问的问题.

这本书为什么这么厚? 我是假设你真的想要掌握这门课程,而不只是想囫圇吞枣,一知半解,所以你已经准备好投入一些时间和精力,去阅读并理解这些详尽的阐述.

阅读之前,我需要知道些什么? 你需要了解一些基本的代数知识,并且要知道如何求解简单的方程式.本书的前两章涵盖了你所需要的大部分的微积分预备知识.

啊!下周就要期末考试了,我还什么都不知道呢!从哪里开始啊? 接下来的几页就会介绍如何使用本书来备考.

例题的求解过程在哪里?我所看到的只是大量的文字与少量的公式. 首先,看一个求解过程并不能教会你应该怎样思考.所以我通常试图给出一种“内心独白”,即当你尝试求解问题的时候,脑海中应该经历怎样的思考过程.最后,你想到了求解问题的所有知识点,但仍然需要用正确的方式把它们全部写出来.我的建议是,先看懂并理解问题的求解方法,然后再返回来尝试自己解答.

定理的证明哪儿去了? 本书中的大部分定理都以某种方式被验证了.在附录A中可以找到更多正式证明过程.

主题没有次序!我该怎么办呢? 学习微积分没有什么标准次序.我选择的顺序是有效的,但你可能还得通过搜索目录来查找你需要的主题,其余的可以先忽略.我也可能遗漏了一些主题.为什么不尝试给我发送电子邮件呢?地址是 adrian@calclifesaver.com.你一定想不到,我可能会为你写一个附加章节(也为下一版写,如果有的话!).

你使用的一些方法和我学到的不一样.到底谁的正确,我的任课老师的还是你的? 希望我们都没错!如果还有疑问,就请教你的任课老师什么是对的吧.

页边空白处怎么没有微积分的历史和有趣的史实呢? 本书中有一点微积分历史内容,但不在这里过多分散我们的注意力.如果你想记下这些历史内容,就请

阅读一本关于微积分历史的书^①吧, 那才更有趣, 而且比零零散散的几句话更值得关注.

我们学校可以用这本书作为教材吗? 这本书配有很好的习题集, 可以作为一本教材, 也可以用作一本学习指南. 你的任课老师也会发现这本书很有助于备课, 特别是在问题求解的技巧方面.

这些录像是什么? 在网站 www.calclifesaver.com 上, 你可以找到我过去复习课的录像, 其中涉及了很多 (但不是全部) 本书的章节和例题.

如何使用这本书备考

如果你快要参加考试了, 那么发挥本书效用的机会就来了. 我很同情你的处境, 因为你没有时间阅读整本书的内容! 但是你不用担心, 后面的那张表会标出本书的主要章节, 来帮助你备考. 此外, 纵观整本书, 下列图标会出现在书中页边空白处, 让你快速识别什么是重要内容.

- 例题求解过程始于此行.
- 这里非常重要.
- 你应当自己尝试解答本题.
- 注意: 这部分内容大多是为感兴趣的读者准备的. 如果时间有限, 就请跳到下一节.

此外, 一些重要的公式或定理带有边框, 一定要好好学啊.

两个通用的学习小贴士

- 把你自己总结的所有重要的知识点和公式都写出来, 以便记忆. 虽说数学不是死记硬背, 但也有一些关键的公式和方法, 最好是你能自己写得出来. 好记性不如烂笔头嘛! 通常来说, 做总结足以巩固和加强你对所学知识的理解. 这也是我没有在每一章的结尾部分做要点总结的主要原因. 如果你自己去, 那将会更有价值.
- 尝试自己做一些类似的考试题, 比如你们学校以前的期末试题, 并在恰当的条件下进行测验. 这将意味着遵守不间断, 不吃饭, 不看书, 不打手机, 不发电子邮件, 不发信息等诸如此类的考试规则. 完成之后, 再看看你是否可以得到一套标准答案来评阅试卷, 或请人帮你评阅.

^① 对微积分历史感兴趣的读者, 可参阅《微积分的历程: 从牛顿到勒贝格》(人民邮电出版社, 2010).

考试复习的重要章节 (按主题划分)

| 主题 | 子主题 | 节 |
|-------|--------------------------------|---------------|
| 微积分基础 | 直线 | 1.5 |
| | 其他常用图像 | 1.6 |
| | 三角学基础 | 2.1 |
| | $[0, \pi/2]$ 以外的三角函数 | 2.2 |
| | 三角函数的图像 | 2.3 |
| | 三角恒等式 | 2.4 |
| | 指数函数与对数函数 | 9.1 |
| 极限 | 三明治定理 | 3.6 |
| | 多项式的极限 | 第 4 章全部 |
| | 导数伪装的极限 | 6.5 |
| | 三角函数的极限 | 7.1(跳过 7.1.5) |
| | 指数函数与对数函数的极限 | 9.4 |
| | 洛必达法则 | 14.1 |
| | 极限问题的总结 | 14.2 |
| 连续性 | 定义 | 5.1 |
| | 介值定理 | 5.1.4 |
| 微分 | 定义 | 6.1 |
| | 求导法则 (例如, 乘积法则/商法则/ 链式求导法则) | 6.2 |
| | 求切线方程 | 6.3 |
| | 分段函数的导数 | 6.6 |
| | 画导函数图像 | 6.7 |
| | 三角函数的导数 | 7.2, 7.2.1 |
| | 隐函数求导 | 8.1 |
| | 指数函数与对数函数求导 | 9.3 |
| | 取对数求导法 | 9.5 |
| | 双曲函数 | 9.7 |
| | 反函数 | 10.1 |
| | 反三角函数 | 10.2 |
| | 反双曲函数 | 10.3 |
| | 求导定积分 | 17.5 |

(续)

| 主题 | 子主题 | 节 |
|----------|--------------|-----------------|
| 导数的应用 | 相关变化率 | 8.2 |
| | 指数增长与指数衰变 | 9.6 |
| | 求全局最大值与全局最小值 | 11.1.3 |
| | 罗尔定理/中值定理 | 11.2, 11.3 |
| | 临界点的分类 | 11.5, 12:1.1 |
| | 求拐点 | 11.4, 12.1.2 |
| | 画图 | 12.2, 12.3 |
| | 最优化 | 13.1 |
| | 线性化/微分 | 13.2 |
| | 牛顿法 | 13.3 |
| 积分 | 定义 | 16.2(跳过 16.2.1) |
| | 基本性质 | 16.3 |
| | 求面积 | 16.4 |
| | 估算积分 | 16.5, 附录 B |
| | 平均值/中值定理 | 16.6 |
| | 基本例子 | 17.4, 17.6 |
| | 换元法 | 18.1 |
| | 分部积分法 | 18.2 |
| | 部分分式 | 18.3 |
| | 三角函数的积分 | 19.1, 19.2 |
| | 三角换元法 | 19.3(跳过 19.3.6) |
| | 积分技巧的总结 | 19.4 |
| 运动 | 速度与加速度 | 6.4 |
| | 负常数加速度 | 6.4.1 |
| | 简谐运动 | 7.2.2 |
| | 求位移 | 16.1.1 |
| 反常积分 | 基本知识 | 20.1, 20.2 |
| | 求解技巧 | 第 21 章全部 |
| 无穷级数 | 基本知识 | 22.1.2, 22.2 |
| | 求解技巧 | 第 23 章全部 |
| 泰勒级数与幂级数 | 估算和误差估算 | 第 25 章全部 |
| | 幂级数/泰勒级数问题 | 第 26 章全部 |

(续)

| 主题 | 子主题 | 节 |
|------|------|-------------|
| 微分方程 | 可分一阶 | 30.2 |
| | 一阶线性 | 30.3 |
| | 常系数 | 30.4 |
| | 建模 | 30.5 |
| 其他话题 | 参数方程 | 27.1 |
| | 极坐标 | 27.2 |
| | 复数 | 28.1 ~ 28.5 |
| | 体积 | 29.1, 29.2 |
| | 弧长 | 29.3 |
| | 表面积 | 29.4 |

除非特殊说明, 标明“节”的一栏包括其下所有小节. 例如, 6.2 节包括从 6.2.1 到 6.2.7 的所有小节.

致 谢

感谢所有在我写作本书过程中给予我支持和帮助的人。我的学生们长久以来在给我教益、喜悦和快乐，他们的意见使我受益匪浅。特别感谢我的编辑 Vickie Kearn、制作编辑 Linny Schenck 和设计师 Lorraine Doneker，感谢他们对我的所有帮助和支持，还要感谢 Gerald Folland，他的很多真知灼见对本书的改善有很大的贡献。此外，感谢 Ed Nelson、Maria Klawe、Christine Miranda、Lior Braunstein、Emily Sands、Jamaal Clue、Alison Ralph、Marcher Thompson、Ioannis Avramides、Kristen Molloy、Dave Uppal、Nwanneka Onvekwusi、Ellen Zuckerman、Charles MacCluer 和 Gary Slezak，本书中的很多修正都得益于他们的意见和建议。

感谢下列普林斯顿大学数学系的教员和工作人员对我的大力支持：Eli Stein、Simon Kochen、Matthew Ferszt 和 Cott Kenny。我也要感谢我在 INTECH 的同事们给予的支持，特别是 Bob Fernholz、Camm Maguire、Marie D'Albero 和 Vassilios Papathanakos，他们提出了一些优秀的审读建议。我还要感谢我高二、高三的数学老师——William Pender，他绝对是世界上最好的微积分老师。这本书中很多方法都是从他的教学中获得了启发。我希望他能原谅我曲线不画箭头，所有的坐标轴上没有标注，以及在每一个 $+C$ 后都没有写“对于任意一个常数 C ”。

我的朋友和家人都给了我无私的支持，尤其是我的父母 Freda 和 Michael、姐姐 Carly、祖母 Rena，还有姻亲 Marianna 和 Michael。最后，我要特别感谢我的妻子 Amy 在我写书过程中对我的帮助和理解，她总是陪伴在我身边。（还要感谢她为我画的“爬山者图标”。）

目 录

| | | | |
|---------------------------------|----|--|----|
| 第 1 章 函数、图像和直线 | 1 | 3.7 极限的基本类型小结 | 45 |
| 1.1 函数 | 1 | 第 4 章 求解多项式的极限问题 | 47 |
| 1.1.1 区间表示法 | 3 | 4.1 $x \rightarrow a$ 时的有理函数的极限 | 47 |
| 1.1.2 求定义域 | 3 | 4.2 $x \rightarrow a$ 时的平方根的极限 | 50 |
| 1.1.3 利用图像求值域 | 4 | 4.3 $x \rightarrow \infty$ 时的有理函数的极限 | 51 |
| 1.1.4 垂线检验 | 5 | 4.4 $x \rightarrow \infty$ 时的多项式型函数的 极限 | 56 |
| 1.2 反函数 | 6 | 4.5 $x \rightarrow -\infty$ 时的有理函数的 极限 | 59 |
| 1.2.1 水平线检验 | 7 | 4.6 包含绝对值的函数的极限 | 61 |
| 1.2.2 求反函数 | 8 | 第 5 章 连续性和可导性 | 63 |
| 1.2.3 限制定义域 | 8 | 5.1 连续性 | 63 |
| 1.2.4 反函数的反函数 | 9 | 5.1.1 在一点处连续 | 63 |
| 1.3 函数的复合 | 10 | 5.1.2 在一个区间上连续 | 64 |
| 1.4 奇函数和偶函数 | 12 | 5.1.3 连续函数的一些例子 | 65 |
| 1.5 线性函数的图像 | 14 | 5.1.4 介值定理 | 67 |
| 1.6 常见函数及其图像 | 16 | 5.1.5 一个更难的介值定理 例子 | 69 |
| 第 2 章 三角学回顾 | 21 | 5.1.6 连续函数的最大值和 最小值 | 70 |
| 2.1 基本知识 | 21 | 5.2 可导性 | 71 |
| 2.2 扩展三角函数定义域 | 23 | 5.2.1 平均速率 | 72 |
| 2.2.1 ASTC 方法 | 25 | 5.2.2 位移和速度 | 72 |
| 2.2.2 $[0, 2\pi]$ 以外的三角 函数 | 27 | 5.2.3 瞬时速度 | 73 |
| 2.3 三角函数的图像 | 29 | 5.2.4 速度的图像阐释 | 74 |
| 2.4 三角恒等式 | 32 | 5.2.5 切线 | 75 |
| 第 3 章 极限导论 | 34 | 5.2.6 导函数 | 77 |
| 3.1 极限: 基本思想 | 34 | 5.2.7 作为极限比的导数 | 78 |
| 3.2 左极限与右极限 | 36 | 5.2.8 线性函数的导数 | 80 |
| 3.3 何时不存在极限 | 37 | | |
| 3.4 在 ∞ 和 $-\infty$ 处的极限 | 38 | | |
| 3.5 关于渐近线的两个常见误解 | 41 | | |
| 3.6 三明治定理 | 43 | | |

| | | | |
|--------------------------------------|------------|---|------------|
| 5.2.9 二阶导数和更高阶 导数 | 80 | 第 8 章 隐函数求导和相关变化率 | 132 |
| 5.2.10 何时导数不存在 | 81 | 8.1 隐函数求导 | 132 |
| 5.2.11 可导性和连续性 | 82 | 8.1.1 技巧和例子 | 133 |
| 第 6 章 求解微分问题 | 84 | 8.1.2 隐函数求二阶导 | 137 |
| 6.1 使用定义求导 | 84 | 8.2 相关变化率 | 138 |
| 6.2 用更好的办法求导 | 87 | 8.2.1 一个简单的例子 | 139 |
| 6.2.1 函数的常数倍 | 88 | 8.2.2 一个稍难的例子 | 141 |
| 6.2.2 函数和与函数差 | 88 | 8.2.3 一个更难例子 | 142 |
| 6.2.3 通过乘法法则求积函 数的导数 | 88 | 8.2.4 一个非常难的例子 | 144 |
| 6.2.4 通过商法则求商函 数的导数 | 90 | 第 9 章 指数函数和对数函数 | 148 |
| 6.2.5 通过链式求导法则 求复合函数的导数 | 91 | 9.1 基础知识 | 148 |
| 6.2.6 那个难以处理的例子 | 94 | 9.1.1 指数函数的回顾 | 148 |
| 6.2.7 乘法法则和链式求 导法则的理由 | 96 | 9.1.2 对数函数的回顾 | 149 |
| 6.3 求切线方程 | 98 | 9.1.3 对数函数、指数函数 及反函数 | 150 |
| 6.4 速度和加速度 | 99 | 9.1.4 对数法则 | 151 |
| 6.5 导数伪装的极限 | 101 | 9.2 e 的定义 | 153 |
| 6.6 分段函数的导数 | 103 | 9.2.1 一个有关复利的问题 | 153 |
| 6.7 直接画出导函数的图像 | 106 | 9.2.2 问题的答案 | 154 |
| 第 7 章 三角函数的极限和导数 | 111 | 9.2.3 更多关于 e 和对数 函数的内容 | 156 |
| 7.1 三角函数的极限 | 111 | 9.3 对数函数和指数函数求导 | 158 |
| 7.1.1 小数的情况 | 111 | 9.4 求解指数函数或对数函数的 极限 | 161 |
| 7.1.2 问题的求解——小数 的情况 | 113 | 9.4.1 涉及 e 的定义的极限 | 161 |
| 7.1.3 大数的情况 | 117 | 9.4.2 指数函数在 0 附近的 行为 | 162 |
| 7.1.4 “其他的”情况 | 120 | 9.4.3 对数函数在 1 附近的 行为 | 164 |
| 7.1.5 一个重要极限的证明 | 121 | 9.4.4 指数函数在 ∞ 或 $-\infty$ 附近的行为 | 164 |
| 7.2 三角函数的导数 | 124 | 9.4.5 对数函数在 ∞ 附近的 行为 | 167 |
| 7.2.1 求三角函数导数的 例子 | 127 | 9.4.6 对数函数在 0 附近的 行为 | 168 |
| 7.2.2 简谐运动 | 128 | | |
| 7.2.3 一个有趣的函数 | 129 | | |

| | | | |
|--------------------------------------|------------|--------------------------------------|------------|
| 9.5 取对数求导法 | 169 | 第 12 章 绘制函数图像 | 219 |
| 9.6 指数增长和指数衰变 | 173 | 12.1 建立符号表格 | 219 |
| 9.6.1 指数增长 | 174 | 12.1.1 建立一阶导数的符号 表格 | 221 |
| 9.6.2 指数衰变 | 176 | 12.1.2 建立二阶导数的符号 表格 | 222 |
| 9.7 双曲函数 | 178 | 12.2 绘制函数图像的全面方法 | 224 |
| 第 10 章 反函数和反三角函数 | 181 | 12.3 例题 | 225 |
| 10.1 导数和反函数 | 181 | 12.3.1 一个不使用导数的 例子 | 225 |
| 10.1.1 使用导数证明反函数 存在 | 181 | 12.3.2 完整的方法: 例一 | 227 |
| 10.1.2 导数和反函数: 可能 出现的问题 | 182 | 12.3.3 完整的方法: 例二 | 229 |
| 10.1.3 求反函数的导数 | 183 | 12.3.4 完整的方法: 例三 | 231 |
| 10.1.4 一个综合性例子 | 185 | 12.3.5 完整的方法: 例四 | 234 |
| 10.2 反三角函数 | 187 | 第 13 章 最优化和线性化 | 239 |
| 10.2.1 反正弦函数 | 187 | 13.1 最优化 | 239 |
| 10.2.2 反余弦函数 | 190 | 13.1.1 一个简单的最优化 例子 | 239 |
| 10.2.3 反正切函数 | 192 | 13.1.2 最优化问题: 一般 方法 | 240 |
| 10.2.4 反正割函数 | 194 | 13.1.3 一个最优化的例子 | 241 |
| 10.2.5 反余割函数和反余切 函数 | 195 | 13.1.4 另一个最优化的例子 | 242 |
| 10.2.6 计算反三角函数 | 196 | 13.1.5 在最优化问题中使用 隐函数求导 | 246 |
| 10.3 反双曲函数 | 199 | 13.1.6 一个较难的最优化 例子 | 246 |
| 第 11 章 导数和图像 | 202 | 13.2 线性化 | 249 |
| 11.1 函数的极值 | 202 | 13.2.1 线性化问题: 一般 方法 | 251 |
| 11.1.1 全局极值和局部极值 | 202 | 13.2.2 微分 | 252 |
| 11.1.2 极值定理 | 203 | 13.2.3 线性化的总结和例子 | 254 |
| 11.1.3 求全局最大值和最 小值 | 204 | 13.2.4 近似中的误差 | 256 |
| 11.2 罗尔定理 | 206 | 13.3 牛顿法 | 258 |
| 11.3 中值定理 | 209 | 第 14 章 洛必达法则及极限问题总结 | 263 |
| 11.4 二阶导数和图像 | 212 | 14.1 洛必达法则 | 263 |
| 11.5 对导数为零点的分类 | 215 | 14.1.1 类型 A: $0/0$ | 263 |
| 11.5.1 使用一次导数 | 215 | | |
| 11.5.2 使用二阶导数 | 217 | | |