高职高专"十二五"规划教材

公共基础课系列教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主 编◎覃东君

南開大學出版社

高等数学

主　审　刘志峰
主　编　覃东君　韦银幕
副主编　潘裕青　许先果　高爱民
编　委　韦竹稳　陈祥云　陈庆生　唐慧羽
　　　　覃茂华　兰欢玉　卢自娟　黄　杰

南開大學出版社
·天津·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/覃东君主编. --天津:南开大学出版社,2013.9

高职高专“十二五”规划教材

ISBN 978-7-310-04288-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①覃… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 202240 号

南开大学出版社出版发行

出版人:孙克强

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

*

北京市全海印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

*

2013 年 9 月第 1 版 2013 年 9 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 16 开本 19.25 印张 443 千字

定价:42.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本发行部联系调换(010)52238331

目　录

第一章　函　数 …………………………………………………………………………（1）
第一节　函数的概念及其基本性质 ……………………………………………………（1）
第二节　初等函数 …………………………………………………………………………（5）
*第三节　数学模型与 Matlab 软件 ………………………………………………………（10）
第二章　极限与连续 ……………………………………………………………………（16）
第一节　极限的定义 ……………………………………………………………………（16）
第二节　极限的运算 ……………………………………………………………………（21）
第三节　函数的连续性 …………………………………………………………………（27）
第三章　导数与微分 ……………………………………………………………………（33）
第一节　导数的定义 ……………………………………………………………………（33）
第二节　求导法则 ………………………………………………………………………（38）
第三节　隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数 …………………………（44）
第四节　高阶导数 ………………………………………………………………………（48）
*第五节　用 Matlab 求函数导数 …………………………………………………………（51）
第六节　函数的微分 ……………………………………………………………………（53）
第四章　微分中值定理与导数的应用 …………………………………………………（58）
第一节　微分中值定理 函数的单调性 ………………………………………………（58）
第二节　罗必达法则 ……………………………………………………………………（61）
第三节　函数的极值与最值 ……………………………………………………………（64）
*第四节　优化模型与 Matlab 求解 ………………………………………………………（69）
第五章　不定积分 ………………………………………………………………………（73）
第一节　不定积分的概念及性质 ………………………………………………………（73）
第二节　不定积分的运算法则 直接积分法 …………………………………………（77）
*第三节　换元积分法 ……………………………………………………………………（81）
*第四节　分部积分法 ……………………………………………………………………（87）
第五节　用 Matlab 计算不定积分 ………………………………………………………（91）
第六章　定积分及其应用 ………………………………………………………………（94）
第一节　定积分的概念和性质 …………………………………………………………（94）
第二节　微积分基本公式 ………………………………………………………………（101）
*第三节　定积分的换元积分法与分部积分法 ………………………………………（107）
*第四节　广义积分 ………………………………………………………………………（111）
第五节　定积分在几何中的应用 ………………………………………………………（115）

第六节　定积分的数学模型 …………………………………………………………（123）
第七章　常微分方程 …………………………………………………………………（128）
第一节　微分方程的基本概念 ……………………………………………………（128）
第二节　可分离变量的微分方程 …………………………………………………（131）
第三节　一阶线性微分方程 ………………………………………………………（134）
第四节　可降阶的二阶微分方程 …………………………………………………（138）
第五节　二阶常系数线性齐次微分方程 …………………………………………（142）
第六节　二阶常系数线性非齐次微分方程 ………………………………………（145）
*第七节　用 Matlab 解常微分方程 ………………………………………………（151）
*第八节　微分方程模型 ……………………………………………………………（152）
第八章　多元函数微积分 ………………………………………………………………（155）
第一节　多元函数的概念 …………………………………………………………（155）
第二节　偏导数 ……………………………………………………………………（161）
第三节　全微分 ……………………………………………………………………（166）
第四节　多元复合函数的求导法则 ………………………………………………（171）
第五节　二元函数的极值 …………………………………………………………（176）
第六节　二重积分的概念与性质 …………………………………………………（184）
第七节　直角坐标系下二重积分的计算方法 ……………………………………（189）
第九章　无穷级数 ………………………………………………………………………（196）
第一节　常数项级数的概念和性质 ………………………………………………（196）
第二节　常数项级数的审敛法 ……………………………………………………（202）
第三节　幂级数 ……………………………………………………………………（209）
第四节　函数展开成幂级数 ………………………………………………………（216）
第五节　傅里叶级数 ………………………………………………………………（222）
第十章　拉普拉斯变换 …………………………………………………………………（229）
第一节　拉普拉斯变换的概念 ……………………………………………………（229）
第二节　拉普拉斯变换的性质 ……………………………………………………（234）
第三节　拉普拉斯变换的逆变换 …………………………………………………（241）
第四节　拉普拉斯变换的应用 ……………………………………………………（246）
第十一章　线性代数 ……………………………………………………………………（252）
第一节　n 阶行列式 ……………………………………………………………（252）
第二节　行列式的性质 ……………………………………………………………（256）
第三节　克莱姆法则 ………………………………………………………………（261）
第四节　矩阵的概念及其运算 ……………………………………………………（265）
第五节　逆矩阵 ……………………………………………………………………（275）
第六节　矩阵的初等变换与矩阵的秩 ……………………………………………（279）
第七节　Matlab 中的矩阵及运算 …………………………………………………（286）
第八节　线性方程组的消元解法 …………………………………………………（296）

第一章　函　数

函数是微积分研究的主要对象，研究函数通常有两种方法：一种是代数方法和几何方法的综合，用这种方法只能研究函数的简单性质，初等数学就是用这种方法来研究函数的单调性、奇偶性和周期性；另一种方法就是微积分法，或者说是极限的方法，用这种方法能够研究函数许多深刻性质，并且做起来很简单，微积分就是用极限的方法研究函数的一门学问. 在介绍微积分之前，本章将在中学数学已有的函数知识的基础上，进一步深入理解函数的概念和相关知识，为学习微积分打下基础.

第一节　函数的概念及其基本性质

世界是运动、变化和发展的，各个变化过程中的变量之间有种依赖关系，这种关系在数学中我们称之为函数，函数是刻画变量与变量的关系的数学模型.

在中学数学的基础上，本节主要是介绍函数的定义与性质.

一、函数的定义

在19世纪初以前，人们对函数的定义都与几何、代数等紧密关联，直到1837年狄利克雷(Dirichlet，德，1805～1859)突破了认识的局限，抽象出函数的定义，沿用至今.

1. 函数的定义

定义 1.1　设 D 为非空实数集，若对任意 $x \in D$，都有唯一确定的 $y \in \boldsymbol{R}$ 按照某种对应法则 f 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的一个关于 x 的一元**函数**(function)，记作

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为**自变量**，自变量的范围 D 称为函数的**定义域**.

在函数 $y = f(x)$ 中，当 x 取定 x_0 $(x_0 \in D)$ 时，称 $f(x_0)$ 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值. 当 x 取遍 D 中的所有实数值时，与之对应的函数值的集合 M 称为函数的**值域**.

例 1　已知 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f(x+1)$.

解　根据函数中等号两边的 x 的一致性有

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2};$$

$$f(x+1)=\frac{1-(1+x)}{1+(1+x)}=\frac{-x}{2+x}.$$

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{25-x^2}+\ln\sin x$； (2) $y=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$.

解 (1) 要使函数有定义，必须同时满足

$$\begin{cases}25-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})\end{cases},$$

于是，所求函数的定义域为

$$D=\{x\,|\,-5\leqslant x<-\pi \text{ 或 } 0<x<\pi\}.$$

(2) 要使函数有定义，必须同时满足

$$\begin{cases}3-x^2>0\\ \left|\frac{x}{2}-1\right|\leqslant 1\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\\ 0\leqslant x\leqslant 4\end{cases},$$

故函数的定义域为

$$D=\{x\,|\,0\leqslant x<\sqrt{3}\}.$$

2. 函数的表示法

函数可以有很多种方法来表示，这里主要介绍三种：表格法、图像法和解析法.

(1) **表格法**：用表格直接反应变量之间的数量关系，使对应关系一目了然.

例 3 根据试验测得，某化学反应中物质 A 的浓度与反应产物 B 的数据关系如表 1-1 所示.

表 1-1

A 的浓度 (mol/L)	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
B 物质的产量(mg)	1.978	3.28	6.16	7.34	7.66	9.58	9.48	9.30	11.2

这个表格如实反应了物质 A 在不同的浓度时可得的产物 B 的数量，如 A 的浓度为 0.8 mol/L 时，可得产物 B 为 9.48 mg，但是 B 随 A 的变化而变化的关系式不能直接得到，A 为其他值时得到产物 B 的数量很难得到.

(2) **图像法**：用图形来直观的反应变量之间的关系.

例 4 股票开盘日某天的上证指数的走势如图 1-1 所示.

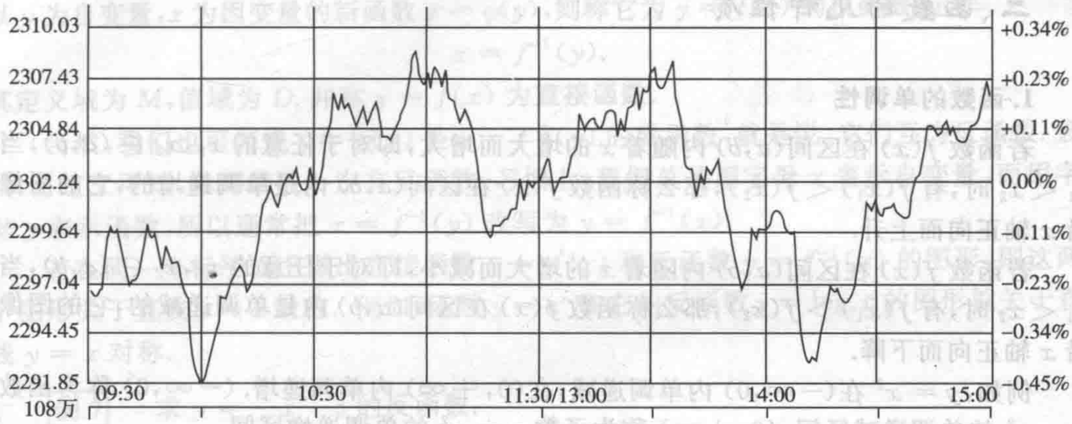


图 1-1

从图形上可以很直观地看出指数的上涨和下跌趋势及一天成交的最高价位和最低价位. 但是同样很难得到价格随时间变化关系式.

(3) **解析法**:用具体数学式子来表达变量之间的函数关系.

例 5 小王从家里出发去参加同学的宴会,他匀速前进,离家不久,他发现路边一人自行车坏了,于是帮这个人把自行车修好,随后加快速度赶赴宴会,小王离家的距离如图 1-2 所示,请把小王离家的距离关于时间的函数用解析式表示出来.

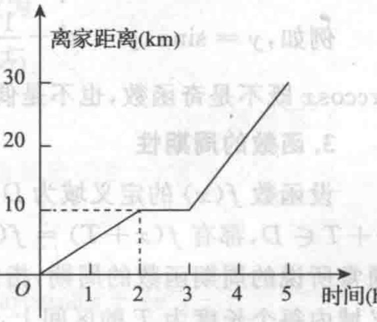


图 1-2

解 根据图形及坐标上的数据分析可得解析表达式为

$$f(x)=\begin{cases}5x, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 10, & 2<x\leqslant 3\\ 10x-20, & 3<x\leqslant 5\end{cases}.$$

该函数的定义域为 $D=[0,5]$,但是在定义域的不同范围内是用不同的解析式来表示的,这样的函数称为**分段函数**,分段函数是定义域上的一个函数,不要理解为多个函数,分段函数需要分段求值,分段作图.

例 6 在电子电气中,脉冲器产生一个单三角脉冲,其波形如图 1-3 所示,建立电压 U 与时间 $t(t\geqslant 0)$ 的函数关系式.

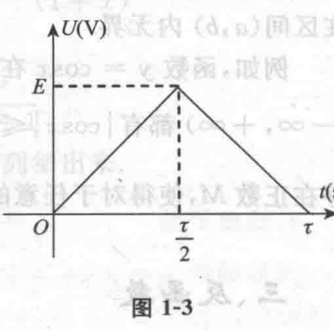


图 1-3

解 根据图形分析可得分段函数

$$U=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t, & t\in\left[0,\dfrac{\tau}{2}\right]\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & t\in\left[\dfrac{\tau}{2},\tau\right].\\ 0, & t\in(\tau,+\infty)\end{cases}$$

二、函数的几种性质

1. 函数的单调性

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 的增大而增大，即对于任意的 $x_1,x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调递增的，它的图像沿 x 轴正向而上升.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 的增大而减小，即对于任意的 $x_1,x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调递减的，它的图像沿 x 轴正向而下降.

例如，$y = x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，在 $(0,+\infty)$ 内单调递增. $(-\infty,0)$ 称为函数 $y = x^2$ 的单调递减区间，$(0,+\infty)$ 称为函数 $y = x^2$ 的单调递增区间.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数，其图形关于 y 轴对称；如果对于任意 $x \in D$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数，其图形关于原点对称.

例如，$y = \sin x, y = x^3 - \dfrac{1}{x}$ 是奇函数，$y = \cos x, y = x^4 + x^2$ 是偶函数，$y = 2^x, y = \arccos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的正数 T，使得对于任意的 $x \in D$，$x+T \in D$，都有 $f(x+T) = f(x)$. 那么称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为它的一个周期. 通常所说的周期函数的周期，指的是它的最小正周期. 一个以 T 为周期的周期函数，在定义域内每个长度为 T 的区间上，函数图像有相同的形状.

例如，由于 $\sin(x+2\pi) = \sin x$，所以 $y = \sin x$ 的周期是 $T = 2\pi$. $\tan(x+\pi) = \tan x$ 所以 $y = \tan x$ 的周期是 $T = \pi$. 同样 $y = \cos x$ 的周期是 $T = 2\pi$. $y = \cot x$ 的周期是 $T = \pi$.

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在一个正数 M，使得对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界；反之，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界.

例如，函数 $y = \cos x$ 在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对任意的 $x \in (-\infty,+\infty)$ 都有 $|\cos x| \leqslant 1$ 成立. 又如函数 $y = \tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的，因为不存在正数 M，使得对于任意的 $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，都有 $|\tan x| \leqslant M$ 成立.

三、反函数

定义 1.2 设 $y = f(x)$ 是定义在数集 D 上关于 x 的函数，其值域为 M. 如果对于 M 中

的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 M 上以 y 为自变量，x 为因变量的新函数 $x=\varphi(y)$，则称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y).$$

其定义域为 M，值域为 D. 并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

当然，我们也可以说 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，就是说，它们互为反函数. 显然，由定义可知，单调函数一定有反函数. 习惯上，我们总是用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示函数，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

若在同一坐标平面上做出直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形，则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称. 例如，函数 $y=a^x$ 和它的反函数 $y=\log_a x$ 的图形就关于直线 $y=x$ 对称.

例 7 求 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的反函数.

解 在函数 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，它是单调函数. 由 $y=\frac{1}{2}x+3$ 解出 x，得

$$x=2y-6,$$

将其中的 x 换成 y，y 换成 x，便得 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的反函数为

$$y=2x-6,x\in(-\infty,+\infty).$$

习题训练

1. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\lg(2x-1)+\sqrt{\frac{-1}{2x-4}}$；　　(2) $y=\arcsin 3x+7e^x$；

(3) $y=\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x-4}$；　　(4) $y=\begin{cases}2x+3, & -1\leqslant x<1\\ 0, & 1\leqslant x<3\\ -x, & x\geqslant 3\end{cases}$.

2. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{1-x^2}{\sin x}$；　　(2) $f(x)=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

3. 求下列函数的反函数：

(1) $y=2\sin 3x,x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$；　　(2) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

4. 你能说出实际生活中哪些现象可以用函数来描述？请列举出来.

第二节 初等函数

在生活中，有一类函数显得尤为重要，微积分研究的主要对象就是这一类函数，这就

是所谓的初等函数,而初等函数是由基本初等函数组成的,本节主要介绍基本初等函数与初等函数.

一、基本初等函数

以下 6 种函数称为基本初等函数.

1. 常值函数

常值函数 $y=C$,其中 C 为常数,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,对应规则为对于任何 x 的取值,函数值 y 都恒等于常数 C,其图形为平行于 x 轴的直线,如图 1-4 所示.

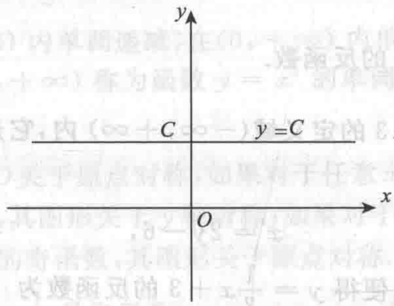


图 1-4

2. 幂函数

幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为任意常数),定义域和值域因 α 的不同而不同,但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义,且图形都经过点 $(1,1)$,具体给出几种 α 值的图形,如图 1-5 所示.

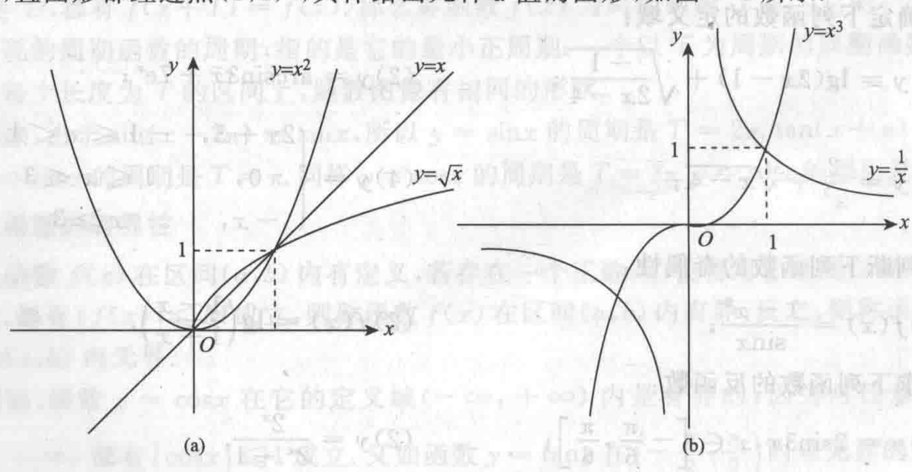


图 1-5

3. 指数函数

指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,+\infty)$,图形都经过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时,$y=a^{x}$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,$y=a^{x}$ 单调递减. 指数函数图形都在 x 轴上方,如图 1-6 所示.

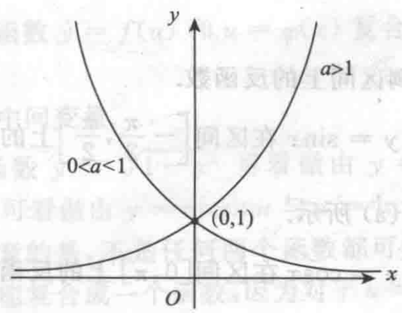


图 1-6

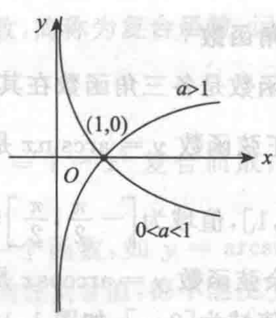


图 1-7

4. 对数函数

对数函数 $y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)$，是指数函数 $y = a^x$ 的反函数，由直接函数与反函数的关系可知，对数函数的定义域是$(0, +\infty)$，值域是$(-\infty, +\infty)$，图形经过点$(1,0)$，当 $a > 1$ 时，$y = \log_a x$ 单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，$y = \log_a x$ 单调递减. 对数函数图形都在 y 轴右方，与相对应的指数函数图形关于直线 $y = x$ 对称，如图 1-7 所示.

当 $a = \mathrm{e}$ 时，$y = \log_a x$ 简记为 $y = \ln x$，它是常见的对数函数，称为自然对数. 其中 $\mathrm{e} = 2.71828\cdots$，为无理数.

5. 三角函数

正弦函数 $y = \sin x$；

余弦函数 $y = \cos x$；

正切函数 $y = \tan x$；

余切函数 $y = \cot x$；

正割函数 $y = \sec x$；

余割函数 $y = \csc x$.

$\sin x$ 和 $\cos x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-1, 1]$，都是以 2π 为周期的周期函数，$\sin x$ 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数，如图 1-8 所示.

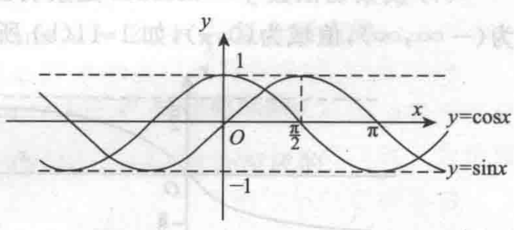


图 1-8

$\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 的实数，$\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi$ 的实数(k 为整数). 它们都是以 π 为周期的周期函数，且都是奇函数，如图 1-9 所示.

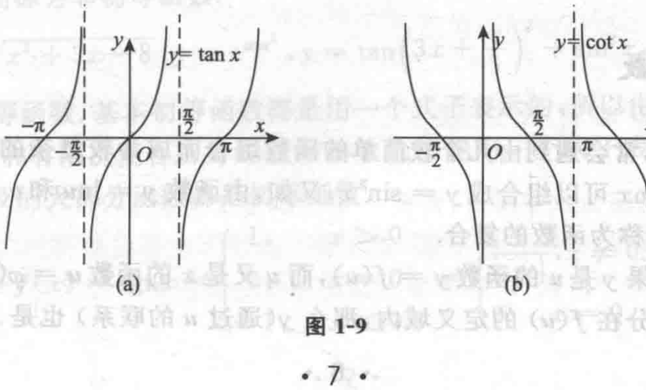


图 1-9

6. 反三角函数

反三角函数是各三角函数在其特定的单调区间上的反函数.

(1) 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数. 定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,如图 1-10(a) 所示.

(2) 反余弦函数 $y = \arccos x$ 是余弦函数 $y = \cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数. 定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,如图 1-10(b) 所示.

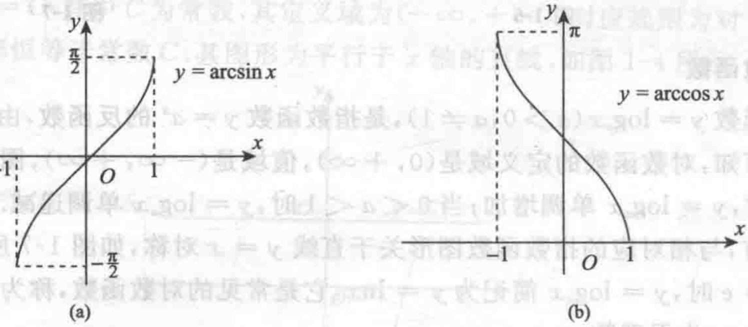


图 1-10

(3) 反正切函数 $y = \arctan x$ 是正切函数 $y = \tan x$ 在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上的反函数. 定义域为$(-\infty,\infty)$,值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,如图 1-11(a) 所示.

(4) 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 是余切函数 $y = \cot x$ 在区间$(0,\pi)$ 上的反函数. 定义域为$(-\infty,\infty)$,值域为$(0,\pi)$,如 1-11(b) 所示.

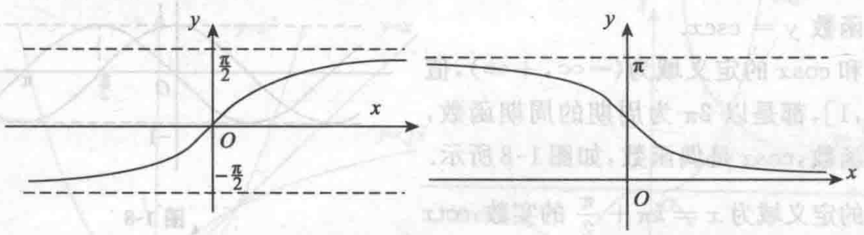


图 1-11

二、复合函数

在实际问题中,常会遇到由几个较简单的函数组合而成为较复杂的函数. 例如,由函数 $y = u^2$ 和 $u = \sin x$ 可以组合成 $y = \sin^2 x$;又如,由函数 $y = \ln u$ 和 $u = e^x$ 可以组合成 $y = \ln e^x$,这种组合称为函数的复合.

定义 1.3 如果 y 是 u 的函数 $y = f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$,并且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内,那么 y(通过 u 的联系) 也是 x 的函数. 我们称

此函数为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中 u 称作中间变量.

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看做由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 复合而成；函数 $y=\arcsin(\ln x)$ 可看做由 $y=\arcsin u$ 与 $u=\ln x$ 复合而成.

值得注意的是，不是任何两个函数都可以复合成一个函数，如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数，因为对于 $u=2+x^2$ 中的任何 u 值，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义. 另外，复合函数也可以由两个以上的函数复合成一个函数，如 $y=\ln u, u=\sin v$ 及 $v=\sqrt{x}$ 可以复合成函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$.

例 1 试将下列各函数表示成 x 的复合函数：

(1) $y=\sin u, u=2x$；　　(2) $y=u^2, u=e^x$；

(3) $y=\sqrt{u}, u=x^3+6x+1$.

解 (1) $y=\sin u=\sin 2x$，即 $y=\sin 2x$；

(2) $y=u^2=(e^x)^2$，即 $y=(e^x)^2$；

(3) $y=\sqrt{u}=\sqrt{x^3+6x+1}$，即 $y=\sqrt{x^3+6x+1}$.

例 2 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=(1+x)^5$；　　(2) $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$；

(3) $y=\frac{1}{(1-x^2)^3}$；　　(4) $y=3^{2\cos^2 x}$.

解 (1) $y=(1+x)^5$ 是由两个函数 $y=u^5, u=1+x$ 复合而成的；

(2) $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 是由两个函数 $y=\tan u, u=2x+\frac{\pi}{4}$ 复合而成的；

(3) $y=\frac{1}{(1-x^2)^3}$ 是由两个函数 $y=\frac{1}{u^3}, u=1-x^2$ 复合而成的；

(4) $y=3^{2\cos^2 x}$ 是由三个函数 $y=3^u, u=2v^2, v=\cos x$ 复合而成的.

三、初等函数

定义 1.4 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的函数称为**初等函数**. 否则称为非初等函数.

例如 $y=\sqrt{x^2+3x-8}, y=e^{\sin x^2}, y=\tan\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)^2+\sin^3 x, y=\ln\ln^2(1+x^2+\tan x)$ 等都是初等函数. 基本初等函数都是用一个式子表示的，所以由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所得的初等函数也都能用一个式子表示. 本教材中，除分段函数外，所涉及的大部分函数都是初等函数.

例 3 $y=f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{x}{|x|}, & x\neq 0.\\ 0, & x=0\end{cases}$ 这个函数称为

符号函数,定义域为R.

注意:符号函数不是初等函数,但有的分段函数却是初等函数.

例 4 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是一个分段函数,但是由于 $y=|x|=\sqrt{x^2}$,因此,$y=|x|$ 是初等函数,同理,$y=|\sin x|$,$y=\ln|x^2-1|$ 都既是分段函数,也是初等函数.

初等函数是常见的函数,它也是微积分研究的主要对象.

习题训练

1. 将下列各题中的 y 表示成 x 的函数:

(1) $y=(u-2)^2,u=\sin x$;

(2) $y=\log_a 2u,u=v^2,v=3x-1$;

(3) $y=3u^2-2u,u=\sqrt{v},v=2x$;

(4) $y=\sin u,u=v^3+4,v=2x-1$.

2. 下列各函数是由哪些简单函数复合而成的:

(1) $y=(2x-1)^2$;　　(2) $y=e^{3x+8}$;

(3) $y=\sqrt{1-\ln x^2}$;　　(4) $y=[\arcsin(ax+b)]^3$.

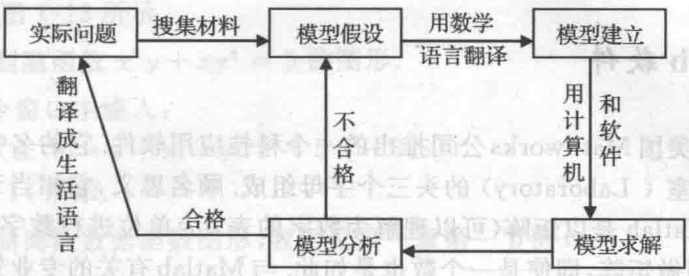
*第三节　数学模型与 Matlab 软件

在生活中,如果我们要用数学知识来科学地解决实际问题或者解释某种现象,往往要先把实际问题翻译成数学式子,再利用数学知识从理论上来推理、计算及证明,这里的数学式子我们称之为数学模型,数学模型是一座能使数学通往实际问题的桥梁.

数学模型指对于现实世界的某一特定对象,为了某个特定的目的,进行一些必要的抽象简化和假设,借助数学工具建立起来的一个数学结构,数学模型不是原型的缩影,而是一个抽象的模拟,它的结构元素是数学式子、数学符号、程序及图表等,它能刻画客观事物的本质属性与内在联系,它源于现实,又高于现实,它能解释特定事物的现实形态,它能预测特定对象的将来属性,并能提供处理特定对象的最优决策或控制等,最终服务于现实,即用科学的手段推动社会的前进.

一、数学模型的建立过程

建立一个实际问题的数学模型,需要一定的洞察力和想象力,筛选,抛弃次要因素,突出主要因素,做出适当的抽象和简化,全过程一般分为建模准备、模型假设、建立模型、模型求解、分析检验几个阶段,具体步骤可以用流程图表示如下.



1. 建模准备

数学建模是一项创新活动,它所面临的问题是人们在生产和科研中为了使认识和实践进一步发展必须解决的问题. 什么是问题?从哲学上来讲,问题就是事物的矛盾,哪里有矛盾哪里就有问题,矛盾会贯穿事物全过程,因此解决问题的过程就是分析矛盾的过程,不断地发现矛盾,认识矛盾,解决矛盾. 建模准备就是要**了解问题的实际背景,明确建模的目的,掌握对象的各种信息(包括数据、经验等),弄清实际对象的特征.**

2. 模型假设

作为课题的原型是复杂的,具体的是质和量、现象和本质、偶然和必然的统一体,这样的原型,若不经过抽象和简化,对其认识是困难的,也无法准确把握它的本质属性,无法确定其主要影响因素,而建模假设就是要**根据实际对象的特征和建模的目的,在掌握必要资料的基础上,对原型进行抽象、简化. 把那些反映问题本质属性的形态量及其关系抽象出来.**

3. 模型建立

在模型假设的基础上,进一步分析各条假设,找出与该事物有关的变量、常量、已知量及未知量,然后找出各种量之间的关系式,构建数学结构,选择恰当的数学工具和构造模型的方法对其进行表述,构造出反映实际问题的数学模型.

4. 模型求解

构造模型之后,再根据已知条件和数据分析模型的特征和结构特点,选择模型求解的方法. 方法包含画图、证明、逻辑及稳定性讨论,特别是运用计算机编程或相应的软件,如 Lingo(lindo)、Matlab、Excel 等. 数学建模有了计算机的辅助,如虎添翼,能解决很多难想像的问题.

5. 分析与检验

根据建模的目的和要求,对模型求解的数字结果,或进行变量之间的依赖关系分析,或进行系统参数的灵敏分析,或进行误差分析. 通过分析,修改模型直到符合要求. 模型分析符合要求后,还要回到客观实际中去检验,用实际的现象、数据等检验模型的适用性、合理性. 本过程有时可以与模型分析一起进行.

6. 模型的解释与应用

模型的应用是建模的目的和宗旨,也是对模型最客观最公正的检验,通过模型求解得到的还是数据,要想用于生活,还必须对数据进行解释,类似于把数学语言翻译成生活语言.

二、Matlab 软件

Matlab是由美国Mathworks公司推出的一个科技应用软件.它的名字分别是由矩阵(Matrix)和实验室(Laboratory)的头三个字母组成.顾名思义,它相当于把矩阵放在实验室里做实验,Matlab是以矩阵(可以理解为数字的表)为单位进行数字处理的,也就是说,它把一切都当做矩阵,即使是一个数也是如此.与Matlab有关的专业知识请读者参考相关书籍,本书中只给出计算上的操作步骤.

Matlab中具有丰富的二维图形和三维图形的绘制函数,这是使数据可视化技术的主要组成方面,Matlab知识通过丰富的图形函数,使得我们能方便直观地查看和分析数据.本书用Matlab7作为操作软件,以下就用Matlab绘制各种一元函数图形.("%"后面是对程序语言的解释.)

例 1 绘制 $y = \sin x$ 函数.

解 在命令窗口(Command Window)中输入:

```
>> x = 0:0.1:2 * pi;        % 确定 x 的范围是[0,2π],步长是 0.1,其中 pi 表示 π
>> y = sin(x);              % 确定 x 与 y 的关系是 y = sinx
>> plot(x,y)                % 用 Matlab 中的命令"plot"画出图形
```

或者在命令窗口中输入:

```
>> fplot (@sin,[0,2 * pi])  % 绘图命令"fplot"调用 sin 函数画图
```

绘图结果如图 1-12 所示.

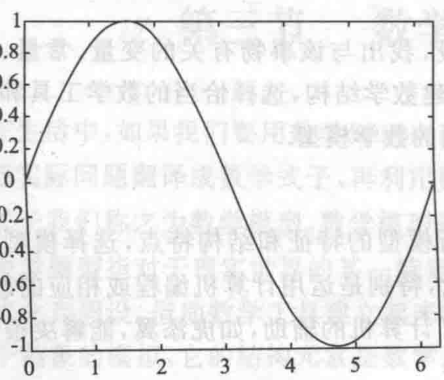


图 1-12

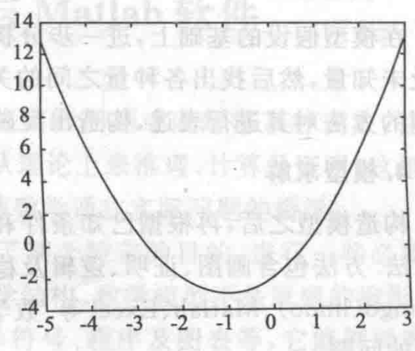


图 1-13

例 2 绘制函数 $y = x^2 + 2x - 2$ 的图形.

解 在命令窗口中输入:

```
>> x =-5:0.1:3;          % 确定 x 的范围是[-5,3]
>> y = x^2 + 2 * x - 2;  % 确定 x 与 y 的关系
>> plot(x,y)
```

或者用定义函数法画图,输入如下:

```
>> fhd = @(x)(x^2 + 2 * x - 2);
>> fplot(fhd,[-5,3])
```