国家示范性高等职业教育精品规划教材

# 应用数学实用教程

◎主编　王烂曼　刘玫星　蒋卫华

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家示范性高等职业教育精品规划教材

# 应用数学实用教程

主　编　王烂曼　刘玫星　蒋卫华
主　审　周卓夫

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书根据教育部最新制定的《高职高专教学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，结合高职高专教学特点，由长沙通信职业技术学院长期从事高职数学教学的教师编写而成.

本书内容包括：极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、行列式、矩阵、线性方程组、线性规划、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、集合论、数理逻辑.

本书适用于高职高专工科类和经济管理类及计算机各专业，也可作为“专升本”考试培训教材和自学考试的教材或参考书.



**图书在版编目(CIP)数据**

应用数学实用教程/王烂曼，刘玫星，蒋卫华主编．—北京：北京理工大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-5682-1639-5

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①王…　②刘…　③蒋…　Ⅲ.①应用数学-高等职业教育-教材　Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 317668 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 17
字　　数 / 396 千字
版　　次 / 2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 / 35.00 元

责任编辑 / 李志敏
文案编辑 / 江　立
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 马振武

# 前　　言

本书是根据教育部最新制定的《高职高专教学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，结合高职高专教学特点，由长沙通信职业技术学院长期从事高职数学教学的教师编写而成. 本书适用于高职高专工科类和经济管理类及计算机各专业，也可作为“专升本”考试培训教材和自学考试的教材或参考书.

本书遵循高等教育的教学规律，以“符合大纲要求，加强实际应用，增加知识容量，优化结构体系”为原则，以 21 世纪市场经济形势下对人才素质的要求为前提，以高职数学在高职教育中的功能定位和作用为基础，在内容上删去了一些烦琐的推理和证明，增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯. 在习题的编排上，根据高职工科各专业的特点，力求做到习题难易搭配适当，知识与内容结合紧密，掌握理论与培养能力相得益彰. 为帮助读者学习和自学，本书同时配套了一套习题解答.

本书内容包括：极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、行列式、矩阵、线性方程组、线性规划、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、集合论、数理逻辑.

本书在编写过程中，得到了湖南邮电职业技术学院领导、教务处及各系领导的关心和支持. 在此表示衷心的感谢. 特别感谢通信管理系叶伟主任对本书的支持和帮助.

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请读者多提宝贵意见.

编　者

# 目　　录


第一章　函数 …… 1
1.1　函数的概念 …… 1
1.2　函数的几种特性 …… 2
1.3　基本初等函数和初等函数 …… 6
1.4　经济中常用的函数 …… 10
第二章　极限与连续 …… 15
2.1　极限的概念 …… 15
2.2　无穷小与无穷大 …… 18
2.3　极限运算法则 …… 20
2.4　两个重要极限 …… 23
2.5　函数的连续性 …… 24
本章小结 …… 28
第三章　导数与微分 …… 30
3.1　导数的概念 …… 30
3.2　求导法则与求导公式 …… 37
3.3　函数的微分 …… 42
本章小结 …… 46
第四章　导数的应用 …… 50
4.1　洛必达法则 …… 50
4.2　函数单调性与极值 …… 52
本章小结 …… 58
第五章　不定积分 …… 60
5.1　不定积分的概念 …… 60
5.2　不定积分的基本性质和直接积分法 …… 61
5.3　不定积分的换元积分法 …… 64
5.4　分部积分法 …… 70
本章小结 …… 72
第六章　定积分及其应用 …… 74
6.1　定积分的概念与性质 …… 74
6.2　微积分学基本公式 …… 78
6.3　定积分的基本积分法则 …… 81
6.4　定积分的应用 …… 84

本章小结 …… 87
**第七章 常微分方程** …… 90
7.1 微分方程的基本概念 …… 90
7.2 一阶微分方程 …… 91
7.3 一阶线性微分方程 …… 94
7.4 二阶常系数线性微分方程 …… 97
本章小结 …… 101
**第八章 行列式** …… 103
8.1 二元线性方程组与二阶行列式 …… 103
8.2 三阶行列式 …… 106
8.3 高阶行列式 …… 110
本章小结 …… 114
**第九章 矩阵** …… 117
9.1 矩阵的基本概念与基本运算 …… 117
9.2 逆矩阵 …… 125
9.3 矩阵的秩与初等变换 …… 128
本章小结 …… 135
**第十章 线性方程组** …… 137
10.1 线性方程组的有关概念 …… 137
10.2 消元法 …… 138
11.3 线性方程组解的情况判定 …… 144
本章小结 …… 147
**第十一章 线性规划** …… 149
11.1 线性规划问题及其数学模型 …… 149
11.2 两个变量问题的图解法 …… 151
11.3 线性规划数学模型的标准形式及解的概念 …… 154
11.4 单纯形法 …… 158
本章小结 …… 163
**第十二章 随机事件与概率** …… 164
12.1 随机事件 …… 164
13.2 随机事件的概率 …… 167
12.3 条件概率和全概率公式 …… 170
12.4 事件的独立性 …… 173
本章小结 …… 177
**第十三章 随机变量及其数字特征** …… 179
13.1 随机变量 …… 179
13.2 分布函数 …… 183

13.3　几种常见随机变量的分布 …… 186
13.4　期望与方差 …… 191
本章小结 …… 196
**第十四章　集合论** …… 199
本章小结 …… 210
**第十五章　数理逻辑** …… 213
本章小结 …… 231
**参考答案** …… 234
**附录 1　初等数学常用公式** …… 255
**附录 2　标准正态分布数值表** …… 260
**附录 3　泊松分布表** …… 261
**参考文献** …… 262

# 第一章 函　　数

## 1.1 函数的概念

高中阶段已经接触过常量与变量的概念，在某一变化过程中可以取不同数值的量叫变量，而始终保持相同数值的量叫常量.

### 一、区间与邻域

(1) 区间是介于某两个实数之间的全体实数，这两个实数称为区间的端点. 区间分为两类：有限区间，无限区间. 区间有四种表示方法：括号表示法，不等式表示法，数轴表示法和集合表示法. 它们的名称、记号和定义如下：

有限区间：闭区间　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

开区间　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

半开区间　$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

无限区间：　$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$；

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$；

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$，

其中 $a,b$ 为确定的实数，分别称为区间的左端点和右端点；$b-a$ 为区间长度；$+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，不表示任何数，只是记号.

区间可用数轴表示，如图 1-1 所示.

(2) 邻域是高等数学中常用的概念. 称实数集 $\{x||x-a|<\delta\}$ 为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，$a$ 称为邻域的中心，$\delta$ 称为邻域的半径. 由定义可知 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$ 表示分别以 $a-\delta$，$a+\delta$ 为左、右端点的开区间，区间长度为 $2\delta$，如图 1-2 所示.

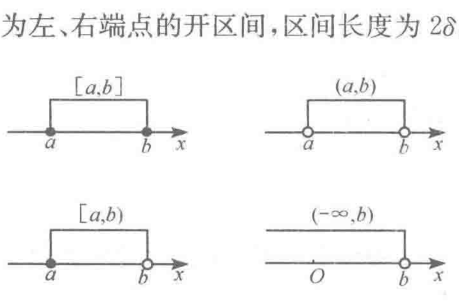



图 1-1

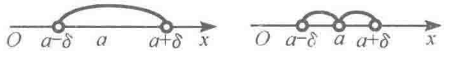



图 1-2

在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心点 $a$ 得到的实数集 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 $a$ 的去心邻域，记作

$\mathring{U}(a,\delta)$. 显然去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 是两个开区间 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 的并，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

### 二、函数的概念

**定义**　设 $x,y$ 是两个变量，$D$ 是一个实数集，如果对于 $D$ 内的每一个实数 $x$，按照某个对应法则 $f$，变量 $y$ 都有唯一确定的数值和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记作 $y=f(x)$. $x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量，实数集 $D$ 称为这个函数的定义域.

当 $x$ 取数值 $x_0\in D$ 时，与 $x_0$ 相对应的 $y$ 值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，这时称函数在点 $x_0$ 处有定义. 函数 $y=f(x)$ 的所有函数值的集合 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

在函数的定义中，要求对于定义域中的每一个 $x$ 值，都有唯一的 $y$ 值与之对应，这种函数称为单值函数，如果 $y$ 值的唯一性不满足，就称为多值函数. 例如，以原点为圆心，1 为半径的圆的方程为 $x^2+y^2=1$，由这个方程所确定的函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 就是多值函数. 又如，反三角函数也是多值函数. 今后如无特殊声明，所讲的函数都是指单值函数.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 但在数学上作一般性研究时，对于只给出表达式而没有说明实际背景的函数，我们规定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

#### 练习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=3x^2+\dfrac{1}{x-1}$；　　(2) $y=\sqrt{5x+3}$；

(3) $y=\sqrt[3]{x-2}$；　　(4) $y=\sqrt{9-x^2}$；

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$；　　(6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^2}}$.

2. 作下列函数的图形：

(1) $y=2x,x\in\{-2,-1,0,1,2\}$；

(2) $y=2x-1,x\in\{x|-1<x<1\}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant-1,\\ x^2, & -1<x<2,\\ 2x, & x\geqslant 2.\end{cases}$

## 1.2　函数的几种特性

### 一、函数的单调性

**定义 1**　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I\subseteq D$，如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调增加的(图 1-3)，区间 $I$ 称为单调增区间；如果对于区间 $I$ 上

任意两点 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调减少的(图 1-4)，区间 $I$ 称为单调减区间. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

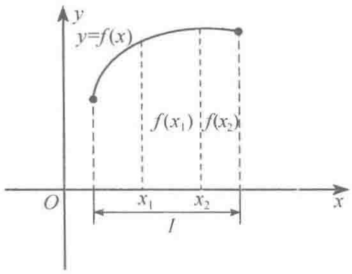



图 1-3

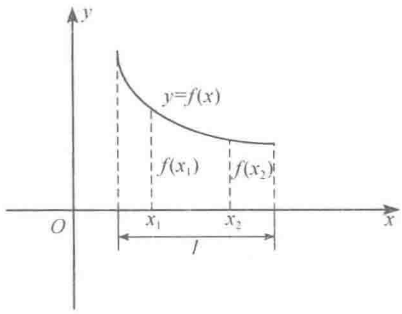



图 1-4

## 二、函数的奇偶性

**定义 2** 设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称. 如果对于任一 $x\in D$，都有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为奇函数(图 1-5). 如果对于任一 $x\in D$，都有

$$f(-x) = f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为偶函数(图 1-6).

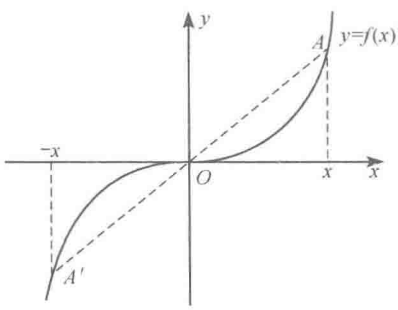



图 1-5

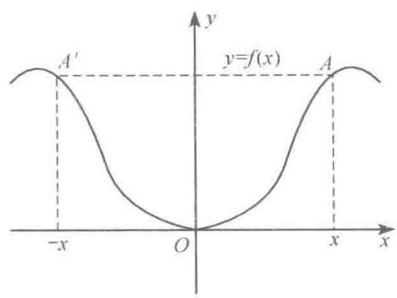



图 1-6

例如，函数 $f(x)=x^5$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x)$. 函数 $f(x)=x^4$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$. 函数 $f(x)=x^2+x^3$ 不是奇函数也不是偶函数，因为它不满足奇函数定义的条件，也不满足偶函数定义的条件.

## 三、函数的有界性

**定义 3** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I\subseteq D$，如果存在正数 $M$，使得对于任一 $x\in I$，都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有界. 如果这样的正数 $M$ 不存在,就称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内无界.

例如,函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,因为对于任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,总有 $|\cos x|\leqslant 1$;但函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内无界,因为对于任意取定的一个正数 $M$,不能使得 $|x^2|\leqslant M$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都成立.

## 四、函数的周期性

**定义 4**　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$,如果存在一个不为零的数 $l$,使得对于任一 $x\in D$,都有 $(x\pm l)\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,$l$ 称为 $f(x)$ 的周期. 通常,周期函数的周期是指最小正周期.

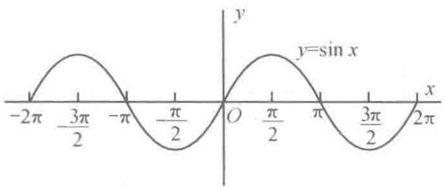


图 1-7

例如,函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数(图 1-7);函数 $y=\tan x$, $y=\cot x$ 都是以 $\pi$ 为周期的周期函数,而函数 $y=x^2$ 不是周期函数.

## 五、反函数

对于函数 $y=2x+4$,已知自变量的一个值 $x\in D$,可以求出唯一对应的函数值 $y$,即函数 $y=2x+4$ 的对应关系是单值的. 反过来,根据此式,已知 $y$ 的每一个值,$y\in M$,我们也能求出对应的 $x$ 的唯一确定的值,即 $y=2x+4$ 的反对应关系也是单值的.

一般地,对于反对应关系也是单值的函数,给出下面的定义.

**定义 5**　设函数 $y=f(x)$,其定义域为 $D$,值域为 $M$. 如果对于 $M$ 中的每一个 $y$ 值,都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的值 $x\in D$ 与之对应,这样就确定了一个以 $y$ 为自变量的新函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,这个函数就叫做 $y=f(x)$ 的反函数,它的定义域为 $M$,值域为 $D$.

**例 1**　求下列函数的反函数:

(1) $y=x^3$;　(2) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

**解**:(1) 因为 $y=x^3$ 的反对应关系是单值的,所以由 $y=x^3$ 可得 $x=\sqrt[3]{y}$,即函数 $y=x^3$ 的反函数为 $x=\sqrt[3]{y}$.

(2) 因为 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反对应关系是单值的,所以由 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 可得 $x=\dfrac{1+y}{1-y}$,即函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数是 $x=\dfrac{1+y}{1-y}$.

函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 以 $y$ 为自变量,但习惯上都以 $x$ 表示自变量,所以反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常表示为 $y=f^{-1}(x)$. 以后如无特殊说明,函数 $y=f(x)$ 的反函数都是指以 $x$ 为自变量的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

**例 2**　求函数 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 的反函数,并在同一个平面直角坐标系中作出它们的图像.

**解**:由 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 解得 $x=2y-4$,所以 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 的反函数是 $y=2x-4$.

原函数 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 的图像是过点 $(0,2)$ 和点 $(-4,0)$ 的直线,其反函数 $y=2x-4$ 的图像

是过点(2,0)和点(0,−4)的直线(图 1-8).

从图 1-8 可以看到,直接函数 $y=\frac{1}{2}x+2$ 的图像与反函数 $y=2x-4$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的. 一般地,由图 1-9 可以看出,$y=f(x)$的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

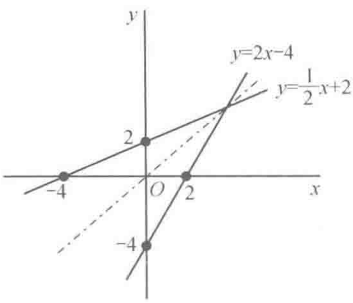



图 1-8

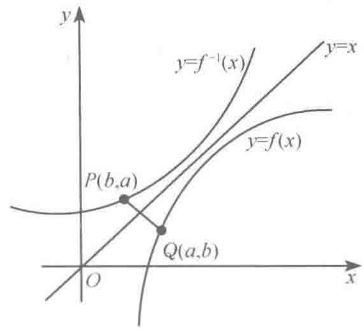



图 1-9

**例 3**　讨论函数 $y=x^2$ 的反函数.

**解**:函数 $y=x^2$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=[0,+\infty)$. 因为 $x=\pm\sqrt{y}$,所以,任取 $y\in[0,+\infty)$　$(y\neq0)$,有两个 $x$ 值与之对应(图 1-10). 所以 $x$ 不是 $y$ 的单值函数. 即函数 $y=x^2$ 不存在反函数.

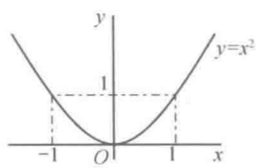



图 1-10

在上例中,如果只考虑函数 $y=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上的反函数,则由 $y=x^2$,$x\in[0,+\infty)$,解得 $x=\sqrt{y}$. 即 $y=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上存在反函数 $y=\sqrt{x}$,$x\in[0,+\infty)$. 同理,函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上也存在反函数 $y=-\sqrt{x}$,$x\in(-\infty,0]$.

从图 1-10 知,这两种情形中,函数在所限定的区间内都是单调的. 一般地,有下述反函数存在定理.

**定理**　设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D$,值域是 $M$. 如果函数 $y=f(x)$在 $D$ 上是单调增加(或减少)的,则它必存在反函数 $y=f^{-1}(x)$,$x\in M$,且反函数 $y=f^{-1}(x)$在 $M$ 上也是单调增加(或减少)的.

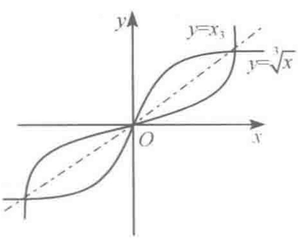



图 1-11

利用上述定理,只需判断函数在所讨论的区间内是否单调,就可确定其反函数是否存在,并可判断反函数的单调性. 例如,函数 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的,因此它必存在反函数,且其反函数在相应的定义区间上也是单调增加的. 事实上,$y=x^3$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$,$x\in(-\infty,+\infty)$,可以看到,它在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的(图 1-11).

## 练习题 1.2

1. 指出下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些既不是奇函数也不是偶函数.

(1) $f(x)=x^4-2x^2+6$;　　　　(2) $f(x)=x^2\cos x$;

(3) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　　　　(4) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(5) $f(x)=\sin x+\cos x-2$；　　　　(6) $f(x)=x(x-1)(x+1)$.

2. 下列哪些函数是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$；　　　　(2) $y=3\cos 5x$；

(3) $y=\sin \pi x-3$；　　　　(4) $y=x^2\tan x$.

3. 证明函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-1,0)$ 内单调减少.

4. 下列函数中哪些函数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的？

(1) $y=3\sin^2 x$；　　　　(2) $y=\dfrac{1}{1+\tan x}$.

## 1.3　基本初等函数和初等函数

### 一、基本初等函数

在科学发展过程中，有一类为数不多的函数，在各种问题中经常出现. 因此，这些函数就从大量的各种各样的函数中被挑选出来，作为最基本的函数加以研究. 其他常见的函数通常都是由这些基本的函数构成的.

下面这五种已学过的函数就是最基本的，它们是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 这五种函数统称为基本初等函数. 为了便于应用，将它们的定义域、值域、图像和特性列表如下（表 1-1～表 1-4）.

**表 1-1　常用基本初等函数图像及性质**

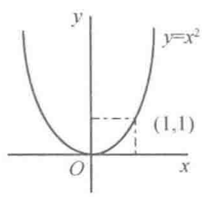
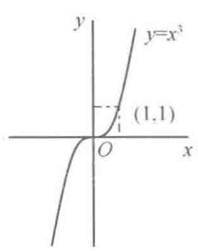
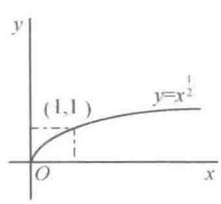
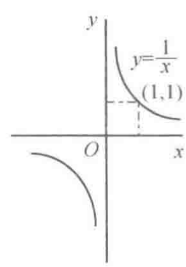
| 函数 | 幂函数 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $y=x^2$ | $y=x^3$ | $y=x^{\frac{1}{2}}$ | $y=x^{-1}$ |
| 图像 |  |  |  |  |
| 定义域 | $x\in(-\infty,+\infty)$ | $x\in(-\infty,+\infty)$ | $x\in[0,+\infty)$ | $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ |
| 值域 | $y\in[0,+\infty)$ | $y\in(-\infty,+\infty)$ | $y\in[0,+\infty)$ | $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ |
| 特性 | 偶函数在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加 | 奇函数单调增加 | 单调增加 | 奇函数单调减少 |

**表 1-2**

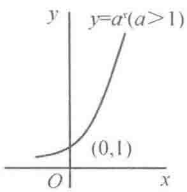
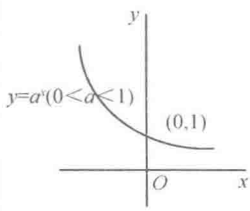
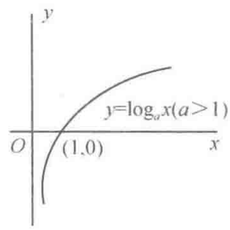
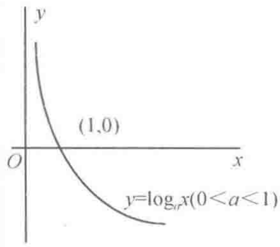
| 函数 | 指数函数 | | 对数函数 | |
|---|---|---|---|---|
| | $y=a^x(a>1)$ | $y=a^x(0<a<1)$ | $y=\log_a x(a>1)$ | $y=\log_a x(0<a<1)$ |
| 图像 |  |  |  |  |
| 定义域 | $x\in(-\infty,+\infty)$ | $x\in(-\infty,+\infty)$ | $x\in(0,+\infty)$ | $x\in(0,+\infty)$ |
| 值域 | $y\in(0,+\infty)$ | $y\in(0,+\infty)$ | $y\in(-\infty,+\infty)$ | $y\in(-\infty,+\infty)$ |
| 特性 | 单调增加 | 单调减少 | 单调增加 | 单调减少 |

**表 1-3**

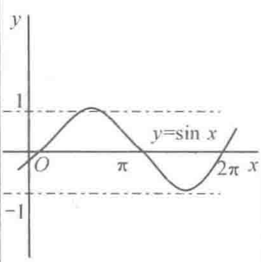
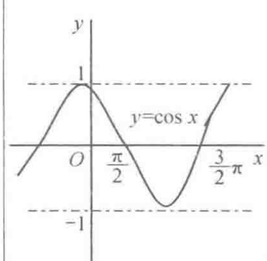
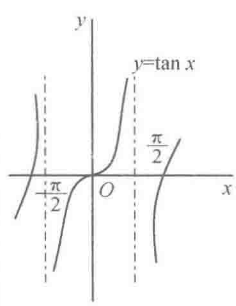
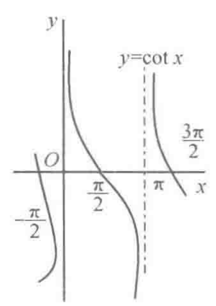
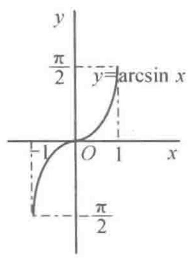
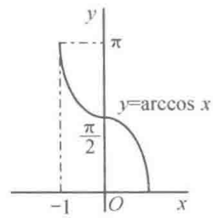
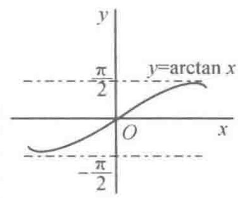
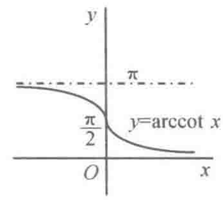
| 函数 | 三角函数 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $y=\sin x$ | $y=\cos x$ | $y=\tan x$ | $y=\cot x$ |
| 图像 |  |  |  |  |
| 定义域 | $x\in(-\infty,+\infty)$ | $x\in(-\infty,+\infty)$ | $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ | $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ |
| 值域 | $y\in[-1,1]$ | $y\in[-1,1]$ | $y\in(-\infty,+\infty)$ | $y\in(-\infty,+\infty)$ |
| 特性 | 奇函数，周期 $2\pi$，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$ | 偶函数，周期 $2\pi$，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$ | 奇函数，周期 $\pi$，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$ | 奇函数，周期 $\pi$，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$ |

**表 1-4**

| 函数 | 反三角函数 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $y=\arcsin x$ | $y=\arccos x$ | $y=\arctan x$ | $y=\cot x$ |
| 图像 |   |   |   |   |
| 定义域 | $x\in[-1,1]$ | $x\in[-1,1]$ | $x\in(-\infty,+\infty)$ | $x\in(-\infty,+\infty)$ |
| 值域 | $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ | $y\in[0,\pi]$ | $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ | $y\in(0,\pi)$ |
| 特性 | 奇函数，单调增加，有界 | 单调减少，有界 | 奇函数，单调增加，有界 | 单调减少，有界 |

## 二、分段函数与复合函数

### 1. 分段函数

有时候一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用几个不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.

例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 3-x, & 1\leqslant x<2\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=[0,1)\cup[1,2)=[0,2)$. 当 $x\in[0,1)$ 时，对应的函数表达式为 $f(x)=x^2$；当 $x\in[1,2)$ 时，对应的函数表达式为 $f(x)=3-x$. 分别作出各区间内函数的图像即可得分段函数的图像.

在工程技术中有几种很重要的分段函数，例如

(1) 单位阶跃函数

$$1(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

(2) 指数衰减函数

$$f(t)=\begin{cases}e^{-at}, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

(3) 矩形函数

$$f(t)=\begin{cases}E, & 0<t<\tau,\\ 0, & t<0 \text{ 或 } t>\tau.\end{cases}$$

### 2. 复合函数

看下面的函数

$$y=\ln\sin x.$$

很明显，它不是基本初等函数，但是，它可看作是由两个基本初等函数

$$y = \ln u, \quad u = \sin x$$

构成的.

**定义** 设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，$x\in D$. 如果在 $D$ 的某个非空子集 $D_1$ 上，对于 $x\in D_1$ 的每一个值所对应的 $u$ 值，都能使函数 $y=f(u)$ 有定义，则 $y$ 是 $x$ 的函数. 这个函数叫做由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为 $x$ 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 $u$ 叫作中间变量，复合函数的定义域是 $D_1$.

例如，$y=\ln(x^3)$ 是由函数 $y=\ln u$ 与 $u=x^3$ 复合而成的，其定义域为 $(0,+\infty)$，它是函数 $u=x^3$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的非空子集.

**例 1** 写出下列函数的复合函数：

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$；

(2) $y=\sin u$，$u=x^2$.

**解**：(1) 将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^2$ 得所求的复合函数 $y=(\sin x)^2$.

将 $u=x^2$ 代入 $y=\sin u$ 得所求的复合函数 $y=\sin x^2$.

上例表明，复合顺序不同，所得的复合函数是不同的.

**注意**：并非任意两个函数都可复合成一个复合函数. 例如，$y=\ln u$ 与 $u=-x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为任何 $x$ 的值所对应的 $u$ 值，都不能使 $y=\ln \mu$ 有意义.

**例 2** 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sin 2^x$；

(2) $y=\sqrt{1+x^2}$；

(3) $y=\ln\cos 3x$.

**解**：(1) $y=\sin 2^x$ 的复合过程是

$$y = \sin u, \quad u = 2^x.$$

(2) $y=\sqrt{1+x^2}$ 的复合过程是

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1+x^2.$$

(3) 函数 $y=\ln\cos 3x$ 的复合过程是

$$y = \ln u, \quad u = \cos v, \quad v = 3x.$$

### 3. 初等函数

初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的，并可以用一个式子表示的函数.

初等函数的基本特征：在函数有定义的区间内，初等函数的图形是不间断的.

## 练习题 1.3

1. 设 $y=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(1)$，$f(\pi)$，$f(-\sqrt{2})$，并作出函数的图像.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. 将下列各题中的 $y$ 表示为 $x$ 的函数，并写出定义域：

(1) $y=u^2, u=1+x^3$；　　(2) $y=\ln u, u=3^v, v=\dfrac{1}{x}$.

4. 设 $f(x)=3x^2, \varphi(t)=\ln(1+t)$，求 $f(\phi(t))$，并求其定义域.

5. 指出下列各复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $y=e^{x+1}$；

(3) $y=\sin\dfrac{3x}{2}$；　　(4) $y=\cos^2(3x+1)$；

(5) $y=\ln\sqrt{1+x}$　　(6) $y=\arccos(1-x^2)$.

## 1.4　经济中常用的函数

在经济分析中，常常要用数学方法来分析经济变量间的关系，这就要求我们首先找出变量间的函数关系，即建立经济数学模型，本节将介绍几个常见的经济函数.

### 一、需求函数与价格函数

1. 需求函数

作为市场中的一种商品，消费者对它的需求量，与消费者人数、消费者的收入、消费者的偏好以及该商品的价格等诸多因素有关. 其中，商品价格是影响需求量的一个十分重要的因素. 为简化问题的分析，现在假定其他因素暂时保持某种状态不变，只考虑商品的价格对需求量的影响. 为此，可建立商品的需求量 $Q$ 与该商品价格 $p$ 之间的函数关系，称其为需求函数，记为 $Q=Q(p)$. 这里，价格 $p$ 是自变量，取非负值.

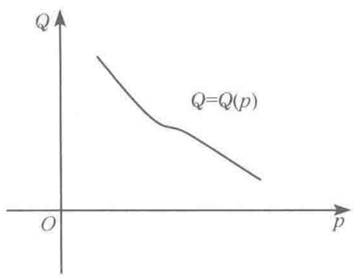



图 1-12

按市场一般规律，需求量 $Q$ 随价格 $p$ 上涨而减少. 因此，通常需求函数是价格的单调减少函数. 如图 1-12 所示的是一条需求曲线（需求函数的图像）.

在企业管理和经济学中常见的需求函数有：

线性需求函数：$Q=a-bp$，其中 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 均为常数；

二次曲线需求函数：$Q=a-bp-cp^2$，其中 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0$ 均为常数；

指数需求函数：$Q=Ae^{-bp}$，其中 $A\geqslant 0, b\geqslant 0$ 均为常数.

2. 价格函数

需求函数 $Q=Q(p)$ 的反函数就是价格函数，记作 $p=p(Q)$. 价格函数也反映商品的需求与价格的关系.

### 二、供给函数

如果市场中的每一种商品直接由生产者提供，则生产者的供给量同样是受多种因素影响的，如该商品的市场价格、生产者的生产成本，等等. 在市场经济规律作用下，影响商品供给量的重要因素是商品价格. 若记商品供给量为 $S$，$p$ 为商品的价格，则商品供给量 $S$ 是价格 $p$ 的