



方勤华◎著

数学教师专业 素养研究

(下)

SHUXUE JIAOSHI ZHUANYE SUYANG YANJIU

课程与教学改革研究所的研究人员以改革为主题，积极开展全面实施素质教育和中小学教师专业发展，教师职前培养和职后培训一体化的教师教育模式改革。

黑龙江教育出版社



方勤华◎著

数学教师专业 素养研究

(下)

SHUXUE JIAOSHI ZHUANYE SUYANG YANJIU

课程与教学改革研究所的研究人员以改革为主题，积极开展全面实施素质教育和中小学教师专业发展，教师职前培养和职后培训一体化的教师教育模式改革。

黑龙江教育出版社

第七章 研究结果（二）：框架内容确定及阐释

本章主要依据第六章研究结果，确定教师数学专业素养框架，并进一步对其组织方式和具体内容作出阐释，以形成对教师数学专业素养较为完整和具体的描述。

第一节 框架内容确定

根据第六章，对教师数学专业素养“初步框架”内容“重要程度”的验证统计发现，项目平均值最高为 4.392，最低为 3.421，其中，分值 3.5 以下的项目仅有两项。虽然有些项目的平均值并不是很高，但从整体上来说，“初步框架”内容还是得到了参与研究教师的普遍认可。

其中，两个得分最低的项目（项目 7：数学本质的知识， $V_{im}=3.421$ ；和项目 16：技术的发展引起数学本质变化的知识， $V_{im}=3.443$ ），都是与数学观念有关的知识。然而，不管是根据理论研究（尤其是新课程的观念），还是专家的观点（见第五章“专家访谈结果”），这些项目内容又是特别重要的。再者，这些项目“重要程度”认识分值的偏低，可能是由于他们具备程度不够（项

目 7 和项目 16 的“具备程度”值分别为 3.219、3.046，排名分别为倒数第三和第一），也可能是项目在表述上的问题，如项目 7（数学本质的知识）就是教师反映比较集中的“需要修改的项目”。

所以，参考参与研究者所提供的开放性评论（见问卷第Ⅲ部分），经过和前面的文献研究、理论建构的分析对照，以及调研中发现的一些新问题，本研究原则上全部保留“初步框架”内容。但对其中内容需要进一步浓缩的项目，去掉其中一些过于具体的表述；对内容重复的项目，进行合并或修改；对各项描述的准确性和清晰性进行再修订，使其意义更加清晰明确。

在这个过程中，“初步框架”中的 54 个项目，被精简为 47 个，并对其中有些项目的描述也进行了修改。因为“初步框架”的制订，及对其进行的实证研究，主要是为了得到本研究最后将要认定的框架内容，所以，修改是很有必要的。此外，实证数据所揭示的启示意义，将在第八章作出进一步分析。

表 7.1 是最初选定的数学专业素养项目指标，与经过确认后最终确定的数学专业素养项目指标之间的比较。

表 7.1 教师数学专业素养“初步框架”修订概要

数学专业素养构成框架内容结构	修订前 指标数 (共 54)	修订后 指标数 (共 47)	项目修订调整情况
D1 数学知识	18	13	
D11 数学内容及其蕴涵的数学思想方法	6	3	合并修改 2、3、4；调整 5 到 D13；删除 6；调整 D12 项目 9 到 D11
D12 数学观念	10	7	合并 7、8 后修改；9 调到 D11；13 调到 D32
D13 数学结构	2	3	精炼 5

续表

数学专业素养构成框架内容结构	修订前 指标数 (共 54)	修订后 指标数 (共 47)	项目修订调整情况
D2 数学能力	28	25	
D21 基本数学能力	4	4	
D22 提出、分析和解决数学问题的能力	15	13	删除 25；精练 26、27；合并 36、37
D23 处理并使用数学语言的能力	9	8	精练 39；删除 42；修改 43、44；交换 45、46
D3 数学情意	8 ……	…… 9	
D31 数学学习倾向	4	4	精练 47；修改 49
D32 数学专业自我	4	5	精练 13；精练 51

注：表内项目数字序号为原问卷中的序号。其中，“修改”意味着改变原来不准确的表达；“精练”意味着不改变原意，但在叙述上更为简洁一些；“合并”则意味着删除一些多余和重复的叙述。

“确认研究”的结果，为指导并确定教师数学专业素养要求提供了实证数据，增加了“框架内容”的效度，为框架内容的进一步使用（推广）提供了可靠的依据。为了进一步深化研究成果，下面将综合文献和实证研究，对确认后的框架内容进行阐释。

第二节 框架内容结构及组织方式

本部分将对综合专家访谈结果和教师意见后，确定的教师数学专业素养框架内容结构和内容组织方式进行说明。

一、框架内容结构

最后确定的教师数学专业素养框架内容，由 3 个维度、8 个

类型、47个项目组成。图7.1是对图3.4“数学专业素养结构”确认后内容组成成分的全面呈现,框架内容中各维度构成成分之间的关系,在第三章有详细解释,该图中不进一步呈现。

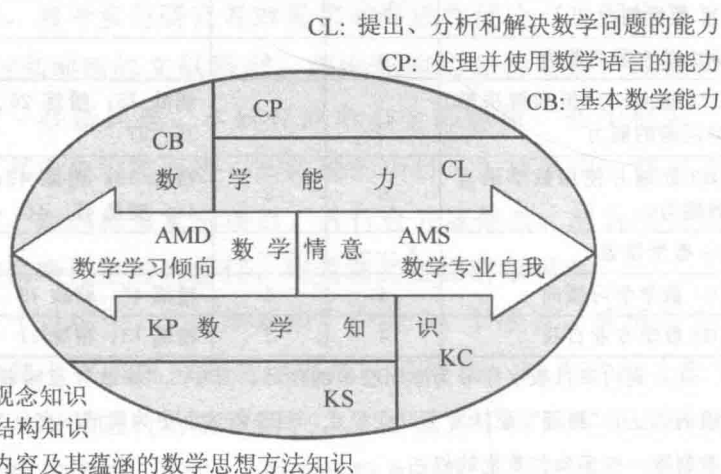


图7.1 教师数学专业素养框架内容组成成分

表7.2进一步列出了经过“修改、精练、合并”后,确定的具体的教师数学专业素养框架内容条目。

表7.2 教师数学专业素养框架内容

项目结构	项目内容
D1 数学知识 (13)	
D11	高中数学课程标准内容有关的初等数学、高等数学及现代数学知识
数学内容及其蕴涵的数学思想方法 (3)	- 各年级数学课程标准中共同的、核心的数学概念及其中蕴涵的数学思想方法知识 - 数学与其他学校科目之间的联系及在现实情境中应用的知识
D12	数学史知识
数学观念 (7)	数学是一种通过探究和调查、连接原则和思想的、结构化的、动态的和悬而未决的系统的观念

续表

项目结构	项目内容
	• 做数学的过程是一个试验、探究的过程的观念
	• 数学鼓励用不同方法探究和解决同一问题的观念
	• 技术发展引起数学本质变化的知识
	• 技术在各种数学活动中所起的重要作用的知识
	• 用适当方式把技术整合进教学中的知识
D13	• 关于数学内容整体结构的知识
数学结构（3）	• 所教数学与整体数学背景关系的知识
	• 多种角度理解数学整体结构的知识
D2 数学能力（25）	
D21	• 空间想象能力
基本数学能力（4）	• 抽象概括能力
	• 运算求解能力
	• 数据收集和分析处理能力
D22	• 提出有数学特征的问题、预知问题答案种类的能力
提出、分析和解决 数学问题的能力 （13）	• 理解给定数学概念范围和限制的能力
	• 辨别不同种类的数学陈述的能力
	• 鉴别、提出并设计不同种类的数学问题的能力
	• 使用不同策略解决不同种类的数学问题的能力（即解题能力）
	• 分析给定模型的数学基础和性质，包括评价模型的使用范围和效果的能力
	• 对给定数学模型的构成成分，做出现实的翻译和解释的能力
	• 对给定情境或适当的现实情境进行数学建模的能力
	• 理解并评价别人作出的论证的能力
	• 知道数学证明怎样与其他种类的数学推理不同的能力

续表

项目结构	项目内容
	• 揭示给定论证（尤其是证明）基本思路的能力
	• 设计正式的和非正式的数学证明的能力，并把探索式论证转化成有效证明的能力
	• 应用推理进行一系列数学活动的能力
D23	• 理解和使用不同种类的数学对象和情境的表达方式的能力
处理并使用数学语言的能力（8）	• 理解和使用同一数学对象不同表达方式之间关系的能力
	• 在同一数学对象不同表达方式之间选择、运用和转换以解决问题的能力
	• 创造并使用多种表达方式组织、记录和交流数学思想的能力
	• 理解符号和形式化的语言
	• 处理和使用包括公式在内的数学符号陈述和表达
	• 理解其他人对于数学问题书面的、口头的或视觉的表达能力
	• 用口头、书面、视觉等多种方式表达和交流数学思想的能力
D3 数学情意（9）	
D31	• 热爱数学并不断地学习数学新知识
	• 对于进行数学研究有初步概念和愿望
	• 用数学的思维方式思考和处理问题
数学学习倾向（4）	• 愿与同事、同行共同研讨数学问题
D32	• 有自己的数学观
数学专业自我（5）	• 不断审视自己的数学观 • 独立学好数学的自信 • 对教好数学充满信心 • 乐于成为一个数学教师的倾向

二、框架内容组织方式说明

本研究前述内容，阐述了框架建构过程的理论和实践，下面将对框架内容具体项目的确定作出说明，还将明确对每一项内容进行阐释的组织结构，及框架可能存在的问题。

第一，综合全面反映高质量数学教学对高中数学教师数学专业素养的要求。“教师不能教自己所不知道的”，这几乎是一条公认的真理。然而，不少研究却都注意到了现在数学教师培训中存在的问题：对“怎么教”谈得比较多，而对“教什么”谈得比较少。“数学课程内容的掌握是根本，教师的数学素养决定成败，在高年级尤其如此。”（张奠宙，赵小平，2007）而提高教师数学专业素养，首先应该明确要求。因此，本研究把综合全面描述实施高质量数学教学教师应该具备的数学专业素养，作为最高诉求。

“框架”内容的组织考虑到了我国高中数学新课程教学要求，综合运用前文文献研究结果，选择吸收对于“好”教学、“好”教师实践本质的一切有关数学专业素养的描述。如在数学知识要求中，更多地吸收了美国“教师标准”中的有关内容；数学能力内容则利用了丹麦 KOM 任务组的研究材料；数学情意部分则统整了中外数学家、数学教育家对“好”教学和“好”教师的要求。以期最终形成对教师数学专业素养的完整认识，使教师根据自己的数学专业水平，对学习需要进行有意义的自我评估；学校为提高教师数学专业素养水平采取相应的行动对策；教师教育者设计开发更有利于教师数学专业水平增长提高的项目。然而，必须看到，本研究设想的内容描述方式并不是唯一的。因此，“框

架”内容的组织设想，有下面几点需要说明。首先，“好”教学、“好”教师实践会以不同的形式表现，所以，应该承认，这些具体的要求并不是它试图描述东西的唯一方式；其次，“框架”对教师要求的描述并不意味着“好”教学、“好”教师实践是线性的、原子化的，或有固定层级结构的，也并不是说，每一项内容指标都有相同的分量；最后，虽然为了建构内容“框架”，把数学专业素养内容以分析性的方式呈现，然而，它们并不是以离散的方式在教师教学实践中表现。

第二，“框架”将用描述性的语言，而不是指令或评定性的语言来表述。采用这种描述方式，反映了本研究对这种信念的认可：专业不能通过告诉教师应该做什么和必须做什么来强化；相反，可以通过用清楚和具体的词语，来描述一个准备好的数学教师意味着什么得到加强。再者，“素养”本来就是综合性的词语，“素养”一词在本研究中的使用，意在避免对教师考察的原子主义思想，将教师贴上各级标签。然而，处于专业发展不同阶段的教师（如可分为职前、入职和有经验教师），在“框架”内容的具备程度上可以是不同的，发展的侧重点可以不同。“框架”意在为确定教师发展数学专业素养内容，提供一种参照体系，而不是限制或评判教师等级的条目。

第三，以三个维度下的八个类型为单位，对框架内容作出进一步的阐述。对于每一个类型内容的阐述，都是先解释它的总体思想，然后再解释每一项内容要求的具体要点。这些要求有时是从教师角度提出，有时从教学角度，也有从学生学习角度提出，在必要时引用数学家、数学教育者、教师和学生们的话，使其突出出来。同时，在有些地方，也会用注解性的例子，来揭示和扩展这些思想，说明数学专业素养的表现和特征。

最后,“框架”内容可能存在的问题。虽然把数学专业素养分为三个维度、八个类型来研究,但前文文献研究揭示,这种分类不是绝对的。因此,各个类型素养要求、表达各类型素养项目之间,可能存在着内容交叉和重叠现象。如在数学知识维度中,对数学观念知识的描述,涉及到对数学本质的认识,而在数学情意素养的内容中,教师应该“有自己的数学观”部分,也会牵涉到这部分内容。类似的情况在其他项目之间也会存在。但各个项目最终描述的重心是明确的。事实上,在描述对教师要求的各种标准中发现,有些习惯都用“知识”表述,有些习惯都用“能力”表述,如,国际培训、绩效、教学委员会(IBSTPI)《教师能力标准》(Klein et al, 2007),将能力标准定义为“一整套使得个人可以按照专业标准的要求有效完成特定职业或工作职责的相关知识、技能和情感态度”(p. 12)。

第三节 框架内容阐释

以下将在“框架内容组织方式说明”指导下,对“框架”内容进行阐释。

一、数学知识

数学知识是教师实施高质量数学教学的必要条件,教师对他们拥有的数学知识的良好感觉和自信,既影响他们教什么,也决定他们怎么教。只有当教师对数学有一个广泛而深入理解的时候,所组织的教学才能帮助学生建构对数学的相应理解。因此,教师要熟悉所教数学内容及其蕴涵的数学思想方法知识;从多种

视角建构并理解数学；了解数学各分支内容的结构。下面是对数学知识各方面内容要求的讨论，每一方面数学知识，又有若干指标来体现。

（一）数学内容及其蕴涵的数学思想方法知识

高中数学教师需要具有的关于数学内容及其中蕴涵的数学思想方法知识，具体包括：

（1）高中数学课程标准内容有关的初等数学、高等数学及现代数学知识。

（2）各年级数学课程标准中共同的、核心的数学概念及其中蕴涵的数学思想方法知识。

（3）数学与其他学校科目之间的联系及在现实情境中应用的知识。

高中数学教师需要具有高中数学课程标准内容有关的初等数学、高等数学及现代数学知识。

教师要全面并从一个更高的视角，掌握所教数学内容以及这些内容与其他重要数学的连接、所教内容与之前和之后内容的连接。因为“有许多初等数学的现象只有在非初等的理论结构内才能深刻地理解”（弗赖登塔尔，1995，p. 155），数学教师（不仅仅是高中数学教师）应该站在更高的视角（传统的高等数学以及现代数学）来审视、理解初等数学问题。因为只有观点高了事物才能显得明了而简单。一个称职的教师，还应当掌握或了解数学的各种概念、方法及其发展与完善的过程，还有在数学教育过程中演化的经过，才能掌握数学内容之间的连接。

教师要了解课程内容与大学课程的关系。一般都认为，教师

需要的高于任教年级段的数学内容知识,已经由高一级数学教育所提供(如大学本科、专科或研究生教育),教师接受数学专业的高等教育,也被认为是高中数学教师的必备条件。我国师范大学数学专业对培养学生这方面的素养,历来也有明确要求。以被认为是师范大学数学系里最重要的基础课程之一的《数学分析》为例,它的教学基本要求是:

……要求学生掌握分析数学的基本概念、基本理论和基本方法,初步具有分析和解决有关问题的能力,并对中学数学中的函数、极限、方程、面积、体积等有关教学内容具有用高观点分析和处理教材的能力。微积分的主要内容是以极限为工具研究函数。它是分析数学系列课程以及数学专业其他后继课程的重要基础课,也是用更高观点深入理解中学数学教材所必需的基础(国家教育委员会师范司,1994, p. 6)。

参与本研究的专家G教授和L教授,都强调了教师用高观点驾驭高中数学教学的重要。

然而,高中新课程增加了大量新内容,这些内容涉及多门大学数学课程,如《标准》(教育部,2003, p. 7~8)选修“系列3”和“系列4”各专题与大学数学相关的课程,主要有初等代数研究、初等几何研究、数学史、密码学、球面几何、解析几何、高等几何、拓扑学、高等代数、近世代数、数值分析、初等数论、运筹学、图论、离散数学等等。这里所列出的大学数学相关课程,绝大多数都属于近现代数学范畴,是在职中学数学教师没有接触过的,有些是现行高师课程不能覆盖的,即使是现在高师院校就读的师范生也大多没有学习过。

因此,高中数学教师要适应新课程的教学要求,至少要使自

己的知识覆盖新课程内容。作为一名普通的高中数学教师，并不是要求对每一个数学分支都达到数学博士的水平，这种要求也是不现实的。中学数学教师，尤其是普通高中数学教师，其数学素养要求不在于某一方向数学内容掌握得精深，而在于广泛：

可行的是使教师对每一个大的数学分支都有所涉猎，懂得这些分支的基本概念与原理、基本的思想与方法、主要解决的问题以及理论产生的历史背景等，为进一步学习该分支打下扎实的基础。如，教师通过参加培训或自学掌握了非欧几何诞生的历史背景，它与欧氏几何的关系以及解决非欧几何的主要思想方法，这就为进一步学习非欧几何知识，开设“球面上的几何”专题打下了扎实的基础（钱珮玲等，2007，p. 310）。

此外，即使高中数学课程中的有些内容在大学已经学习过，也并不意味着教师就具备了这些知识素养。美国一项在三所主要院校对职前教师的研究揭示：虽然完成了数学专业要求的高级的大学生课程，但这些职前教师对初等数学概念还只是一种走马观花似的理解。这说明，“中小学数学内容并不是微不足道的，其中潜藏的概念和结构是值得教师严肃、持续地研究的”（NRC，2001，p. 373）。本研究的实证数据也显示，教师对“高中数学课程标准内容有关的初等数学、高等数学及现代数学知识”，“重要程度”与“具备程度”的判断差异显著，“具备程度”的分值（3. 915）远低于“重要程度”的分值（4. 392），位列差异最大项目的第三名（相差 0. 477）。

因此，无论是工作多年的老教师，还是近几年走上教学岗位的新教师，都需要不断地学习数学新知识，并且需要有机会重温学校数学主题，以便更为深入地理解所教主题背后的、包含在概

念之中的思想方法和观念。否则,将难以胜任新课程的教学工作。

教师要掌握各年级数学课程标准中共同的、核心的数学概念及其中蕴涵的数学思想方法知识。具体来说,教师不仅需要掌握所教年级段的数学内容及其中蕴涵的数学思想方法知识,还需要了解所教年级之前和之后的数学知识。对于高中教师来说,这就意味着,要了解中小学所有年级段数学课程标准中共同的、核心的数学概念和方法知识,以及任教年级段课程标准中有关的初等数学、高等数学及现代数学知识。

义务教育阶段数学新课程,改变了以往教学大纲按照年级来设置课程内容的做法,按照学段来设置课程内容。虽然,目前高中数学课程还没有纳入统一的课程设计模式,然而,教师也要“把数学作为一个跨越各年级的连贯的框架结构来教,而不是各个级段彼此分开的数学知识的简单汇集”(NCTM, 1989)。高中数学教师,要拥有一个贯穿在中小学数学课程中的关于数学概念和方法的共同的、核心的知识基础。这些核心知识基础,在义务教育阶段,被组织成“数与代数、空间与图形、统计与概率、实践与综合应用”四个学习领域,高中数学课程在以上内容的基础上,则更广泛地包括了“数系和数论,几何,统计和概率,函数、代数和积分概念,以及离散数学”等内容。

教师要知道,数学思想方法不是孤立存在的,它蕴涵在具体的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理等内容知识之中。我国数学教学大纲要求学生掌握的数学基础知识中,明确包含其中反映出来的数学思想和方法。当然,也要求教师不仅要对教学内容及其体系做到深刻理解、灵活运用,还要掌握其中的数学思

想方法及寓于教材中的教学理论、观点和方法。因为只有这样才能按照教材的教学目的要求、指导思想和学生的年龄特征、认识规律实施高质量教学。

虽然一些知识（如第一学段）对于所有教师来说，要求是共同的，但任教不同年级段教师的具体需要还是不同的。例如就教师数学知识的发展而言，不同年级段的教师，需要的内容知识的宽度、深度和范围往往是不同的。所以，教师除了要了解所有年级中共同的数学以外，还要掌握本年级段特别需要的数学概念、数学思想方法及它们之间相互联系的知识。对于高中数学教师而言，这些知识主要是高中数学课程标准中所列举出的知识。比如“统计与概率”这部分内容，教师要懂得以下概念和方法以及它们之间的联系：数据及其作用、通过数据来调查、数据的表示方法、分析和解释数据、推断和概率。高中水平的教师，还要理解下面的数学概念和方法以及它们之间的联系：随机变量及它对产生和解释概率分布的应用、描述和推断统计、概率论和它与推断统计的联系，以及离散和连续的概率分布作为做出总体推断的基础。

教师要具有数学与其他学校科目之间联系及在现实情境中应用的知识。

《标准》（教育部，2003）指出：

数学的发展既有内在的动力，又有外在的动力。在高中数学的教学中，要注重数学的不同分支和不同内容之间的联系（在下文关于数学的结构知识中还会提到），数学与日常生活的联系，数学与其他学科的联系。

（p. 108~109）

就数学与其他学科联系方面，以物理学为例：18世纪是数学与经典力学相结合的黄金时期；19世纪数学应用的重点转移到电学与电磁学，并且由于剑桥学派的努力而形成了数学物理分支；20世纪以后，随着物理科学的发展，数学相继在应用于相对论、量子力学以及基本粒子等方面取得了一个又一个的突破，极大地丰富了数学物理的内容，同时，也反过来刺激了数学自身的进步。此外，教师了解数学怎样与日常生活发生联系，以及怎样与其他学科发生联系，才能领会数学思想，体会到数学的力量和美，并把这种力量和美带给学生。

教师经常进行数学知识的足够的联系，可以影响学生对数学在社会中的价值和对其他学科贡献的价值的信念。为此，教师需要形成对重要数学概念及它们怎样与课程其他部分广泛联系的理解。这意味着，需要形成一种对数学课程概况的认识。如果使用地理术语来类比，就是“教师需要有一个思想地图，能够显示主要城市（课程主题）和它们之间的道路（数学连接）。这样的思想地图，应该强调数学和学校里其他科目之间联系的重要、数学和数学产生或应用的非学校情境之间联系的重要”（NCTM, 1991）。

有学者（赵中时，1991，p. 90）把教师需要掌握大学数学课程知识，比做“加深一圈”，而把了解本学科相关学科知识、了解它与本学科的关系，以及了解与本学科有关的边缘学科知识，比做“加宽一圈”。这样课堂教学才能讲得活，讲得宽，不至于死板，学生也才有兴趣。教师通过对本学科基础知识“加深一圈”和“加宽一圈”，才能立足更高、眼光更远。

数学应用是数学科学的重要组成部分，也是数学教育的重要内容。“数学本身是一幅骨骼，数学的血肉和生命在于用数学做