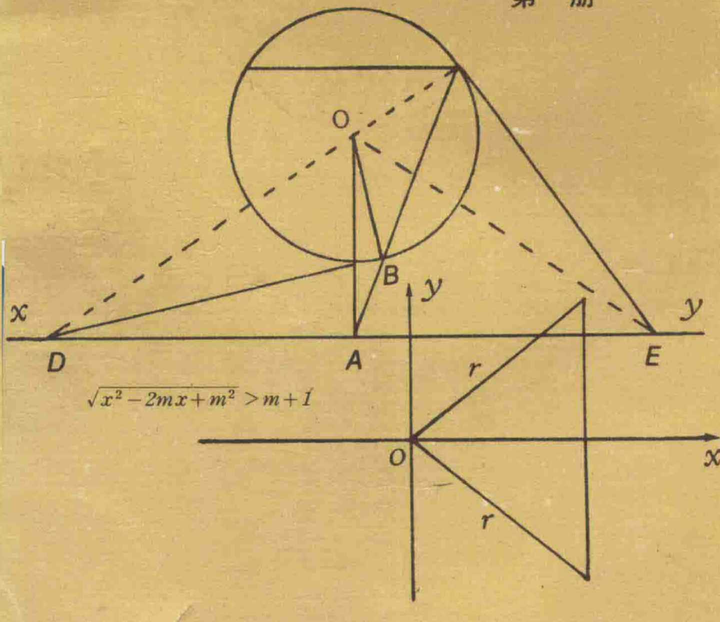
高中
数学精编
代数

第一册



浙江教育出版社

高中数学题精编

代数

第一册

许纪传　钱孝华　江焕棣
陶敏之　谢玉兰　丁宗武

浙江教育出版社

高中数学

许纪传　钱孝华
陶敏之　谢玉兰

浙江教育出版社出版
（杭州武林路125号）
金华新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本787×1092　1/32　印张7.25　字数152,000
1986年3月第2版
1987年12月第5次印刷
印数：7 09 601—1001850

ISBN 7-5338-0111-3/G·112

定价：1.10元

说　明

1981年，我们曾编过《高中数学教材补充题》（共四册），主要帮助高中学生正确理解数学概念，提高运算和逻辑思维能力，并为教师在备课时挑选例题和补充习题提供一点方便．出版以后印行四次，深受读者欢迎．这次我们吸取了广大读者的意见，并依据全日制六年制重点中学高中数学教材，对原书认真的筛选和修改，改名为《高中数学题精编》．

在编写过程中，本着加强基础知识，训练基本技能的精神，选编习题力求新颖、灵活、多样，重视知识连贯和综合运用．与原书比较，在形式上，增加了选择题和填充题等类型题目；在每节习题前增加了“分析与要点”，在这部分里，我们并不求全，重在把教材内容的本质与精华提炼出来，并渗入编者自己教学的体会，以期对教与学都能有所裨益，亦望以此与同志们共同探讨．

全书按教材内容的顺序分册分段编写，教师和学生可按教学进度与课本同步使用．其中A组属于基本题，B组略有提高并带有一定的综合，C组难度较大，可供学有余力的同学练习．读者可根据实际情况灵活选用，不必强求一律．

一九八五年一月

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、集　　合

〔分析与要点〕

1　集合论是现代数学的基础．中学阶段学一点集合知识，将有利于函数概念，特别是反函数概念的清晰形成；有利于数学表达的简洁和对一些数学概念的辅助说明与直观表示（画“集合圆圈”示意）．

2　集合是数学的一个原始概念，只描述，不定义．但要注意“四性”：

(1) 确定性．“相当大的数的全体”、“3个细菌繁殖的全体”等都不能视为集合；

(2) 互异性．$\{1, 1, 1\}$必须写为$\{1\}$；

(3) 无序性．$\{1, 2, 3\}$、$\{3, 1, 2\}$与$\{2, 3, 1\}$表示同一个集合；

(4) 任意性．集合的元素可以代表任意具体事物，比如，可以代表实数、复数，也可以代表多项式、直线、平面、函数等等．

3　集合的表示方法，常用的有列举法和描述法．

列举法就是将给定集合中的元素一一列出并写在大括号“{　}”内的一种表示集合方法；

描述法有：

① “语言”描述法——{具有性质P的事物}，

② “代表元素”描述法——$\{x \mid x$具有性质$P\}$.

4　集合的分类：

有限集——元素个数是有限的集合；

无限集——元素个数是无限的集合；

空集——不含任何元素的集合.

无限集在本质上异于有限集. 有限集的一些属性. 如可取到最大值、最小值等，不能不加思索地搬到无限集上来.

5　元素与集合的关系：属于“$\in$”；不属于“$\notin$”. 集合与集合的关系：包含于“$\subseteq$”，不包含于“$\nsubseteq$”.

要注意：$x \neq \{x\}$；$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A$；$x \in A \nRightarrow x \subseteq A$；$\{x\} \subseteq A \Rightarrow x \in A$；$\{x\} \subseteq A \nRightarrow \{x\} \in A$.

但有特例：$\phi \in \{\phi\}$ 且 $\phi \subset \{\phi\}$；如$A=\{1,2,\{1,2\}\}$，则有 $\{1,2\} \subset A$ 且 $\{1,2\} \in A$.

6　集合的相等：$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$；

$A=B \Leftrightarrow$ “若 $x \in A$，则 $x \in B$”且“若 $x \in B$，则 $x \in A$”.

7　集合的运算：交（且）“$\cap$”，并（或）“$\cup$”，补（否定）“$\overline{A}$”. 熟悉下面的基本性质有助于巩固交、并、补的概念：

(1) $A \cap A = A \cup A = A = \overline{\overline{A}}$；

(2) $A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A, A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$；

(3) $A \cap \overline{A} = \phi$，$A \cup \overline{A} = I$（I为全集）.

必须注意集合运算与数运算的相似与差异之点.

8　本节练习题大致分三类：

第一类是有关集合的基本概念，包括选择、填空、是

非、问答等．这类题目有利于发展学生的智力．解题时并不需要很多其他知识，只要求有清晰的集合论概念和逻辑思维能力．

第二类是求具体的集合．这类题目有利于学生回忆、复习、巩固以前学过的（包括算术、代数、几何的）知识．解题时的主要困难在于已学知识的遗忘与缺陷．

第三类是有关集合的运算．这类题目有利于逻辑训练（“且”、“或”、“非”）对学习逻辑代数与电子计算机等课程是有好处的．解题的关键在于是否真正理解和领会集合运算的概念．

9　学习集合知识的心理障碍：学生已习惯于把“数”作为“认识单元”，具体直观．如今把“元素”作为“认识单元”，比较抽象，无所适从．

克服心理障碍的途径：指出用数代表事物的局限性；通过诱导、分析、练习，使学生的“认识单元”扩大；逐步建立和集合知识的结构相适应的“思维结构”．

学习集合知识，有如学生首次学习平面几何知识，入门教学难度大但又是至关重要的．

（A）

一、选择题：以下各题都给出四个结论，其中只有一个结论是正确的，将正确结论的题号填入括号内（1～10）．

1．下列各题表示集合的是

（A）“充分接近于1的全体实数x”；

（B）“某校高一年级的全体学生”；

（C）“使$|x-\sqrt{2}|$为非常小的全体实数x”；

(D)“某校身长比较高的全体男学生”.

答：(　　)

〔注意〕 是否构成一个集合，关键在于元素是否可以确定(即元素的确定性).

2. 下面各题中的P与Q表示同一个集合的是

(A) $P=\{1,2,3,\cdots,n-1, n\}$,

$Q=\{n,n-1, \cdots, 3,2,1\}$, $(n\in N)$;

(B) $P=\{(1,2)\}$, $Q=\{(2,1)\}$;

(C) $P=\{\pi\}$, $Q=\{3.1416\}$;

(D) $P=\phi$, $Q=\{0\}$.

答：(　　)

3. 下列各题中不能认为是集合的是

(A) $\{ax^2+bx+c \mid a、b、c\in R, a\neq 0\}$;

(B) $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$;

(C) $\{a, b, \{a, b\}\}$;

(D) $\{1, 2, \pi, \sqrt{3}, \cdots\}$.

答：(　　)

4. 方程组$\begin{cases} x-3y=4, \\ 5x+y=4 \end{cases}$ 的解集是

(A) $\{1, -1\}$;　　(B) $\{x, y \mid x=1, y=-1\}$;

(C) $\left\{\begin{cases} x=1, \\ y=-1 \end{cases}\right\}$;

(D) $\{(x, y) \mid x=1, y=-1\}$ 或 $\{(1, -1)\}$.

答：(　　)

5. 已知$M=\{x \mid x\leqslant 2\sqrt{3}, x\in R\}$, $a=\sqrt{11}$, 则下列关系式中正确的一个是

(A) $a \subset M$；　　(B) $a \notin M$；

(C) $\{a\} \in M$；　　(D) $\{a\} \subset M$.

答：(　　)

6. 已知X是集合$\{1,2,3,4,5\}$的子集，则满足$\{1,2\} \subseteq X \subseteq \{1,2,3,4,5\}$的子集$X$的个数是

(A) 26；　(B) 25；　(C) 4；　(D) 8.

答：(　　)

7. 下列命题中正确的是

(A) 无限集的子集是有限集；

(B) 采用"代表元素"的方法来描述一个集合，其表示形式是唯一的；

(C) 空集φ与集合$\{\phi\}$表示同一个集合；

(D) 集合$\{0\}$与集合$\{\phi\}$都是单元素集.

答：(　　)

〔注意〕 (1) 元素与集合是两个不同概念，因而是有区别的. 但是这种区别是针对它们的相互关系而言的，若加以孤立，则会混淆不清. 因为孤立地说，由于元素的任意性，集合也可作为元素，以构成新集. 如$A=\{1,2,3\}$，以A的一切子集为元素又构成新集：

$B=\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, A\}$.

因此，元素是相对于由它组成的集合而言的，集合又是相对于组成它的元素而言的，离开这种相依关系，就不能说什么元素、集合了.

(2) 空集首先是集，它不含元素，但是"空集φ"作为元素的集$\{\phi\}$却不是空集了，集合$\{\phi\}$含有元素φ. 利用元素的任意性，还可生成新的集合$\{\phi, \{\phi\}\}$.

(3) 空集是为了方便而引入的．由于空集引入并不导致矛盾，所以引进空集既方便又可行．不要去钻牛角尖：空集既然不含任何东西，那么空集究竟是什么东西呢？空集不是一个实体，而是一个数学概念．

(4) 无限集的子集有有限集，也有无限集．例如自然数集 $N=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$ 就有无限子集 $\{2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\}$、{全体质数}等．

8．已知 $R=\{x|x=2k+1,\ k\in Z\}$，$S=\{y|y=4n\pm1,\ n\in Z\}$，则 R、S 之间的关系是

(A) $S\subset R$；　　(B) $S\supset R$；

(C) $R=S$；　　(D) $R\not\subset S$，且 $S\not\subset R$．

答：(　　)

9．已知集合 $P=\{x|x=n,\ n\in Z\}$，$Q=\{x|x=\frac{n}{2},\ n\in Z\}$，$S=\{x|x=\frac{1}{2}+n,\ n\in Z\}$，则下列各式中正确是的

(A) $Q\subset P$；　　(B) $Q\subset S$；

(C) $Q=P\cup S$；　　(D) $Q=P\cap S$．

答：(　　)

10．已知全集 $I=\{x|0<x\leqslant10,\ x\in N\}$，

$P=\{x|0<x\leqslant10,\ x=2k,\ k\in Z\}$，

$Q=\{x|0<x\leqslant10,\ x$ 为质数$\}$，则

(1) $\overline{P\cup Q}$所有元素的数字和是

(A) 0；　(B) 9；　(C) 12；　(D) 10．

答：(　　)

(2) $\overline{P\cap Q}$所有元素的数字和是

(A) 55； (B) 2； (C) 53； (D) 0.

答：( )

二、填空题 (11～23)

11. 指出下列各集合的元素：

(1) $A=\{$在 1 到30之间的 8 的一切整倍数$\}$：

________________；

(2) $A=\{$在 1 到30之间的 6 与 8 的一切公倍数$\}$：

________________；

(3) $A=\{$合数30的一切质因数$\}$：________；

(4) $A=\{$12与30的最大公约数的一切质因数$\}$：

________________；

(5) $A=\{$12与30的最小公倍数的一切质因数$\}$：

________________.

12. 用列举法表示下列各集合：

(1) 大于 2 小于12的自然数的集合：________；

(2) 42的所有约数的集合：________；

(3) 方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的集合：________；

(4) 不等式 $x^2-3x-4<0$ 的整数解的集合：______

____________；

(5) $\{(x,\ y)\mid x+y=6,\ x\in N,\ y\in N\}$：________

________________；

(6) $\{x\mid x=\dfrac{m}{n},\ m\in Z,\ |m|<2,\ n\in N, n\leqslant 3\}$：____

________________.

13. 用描述法 $\{x\mid x$ 具有某种性质$\}$ 表示下列各集合：

(1) {奇数}=______;

(2) {偶数}=______;

(3) {10的整数次幂}=______;

(4) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \cdots\right\}$=______

______;

(5) {被 5 除余 1 的正整数}=______;

(6) {不在坐标轴上的点}=______;

(7) {不在第一、三象限的点}=______.

14. 在集合 A={亿以内的一切正整数}、B={大于一万的所有整数}、C={5 的一切倍数}、D={20的所有约数}、E={方程 $ax+b=0$ $(a\neq 0)$ 的解}、F={$y=-(x-5)^2$ 的一切正函数值}中，______是有限集，______是无限集，______是单元素集，____是空集.

15. 记 S 为由形如 $m+\sqrt{2}n(m、n\in Z)$，的一切实数所组成的集合，对于 S 中任意两个元素 x、y，试用 $\in$ 或 $\notin$ 连接：

(1) $x+y$____S；　　(2) xy____S.

16. 已知集合 $A=\{x\,|\,x=2n,\ n\in Z\}$、$B=\{x\,|\,x=2n+1,\ n\in Z\}$，用符号“$\in$、$\notin$、$\subset$，$\supset$、$\not\subset$、$=$”等填空：

(1) $\{2,8\}$____A；(2) 107____A；(3) A____Z；

(4) ϕ____B；　　(5) 0____N；　(6) $\{0\}$____B；

(7) 0____$\{0\}$；　　(8) 0____ϕ；

(9) $A\cap B$____$\{0\}$；　(10) $A\cup B$____N.

17. (1) 集合 $\{0\}$ 的所有子集是______;

(2) 集合 $A=\{0,1,2\}$ 的所有子集是____________

__________________________;

(3) 集合 $B=\{a,b,c,d\}$ 的一切真子集是____________

__________________________.

18. 在集合 $A=\{x\mid x=2n,\ n\in Z\}$、$B=\{2\}$、$C=\{x\mid x^2=1,\ x\in A\}$、$D=\{x\mid x\in A$, 且 x 为奇数$\}$、$E=\{x\mid x^2=4,\ x\in Q^+\}$ 中，相等的集合有____________________，集合 A 的非空真子集有____________________.

19. 填空：

(1) $\{a,b,\_\_\_\_\}\cap\{c,d,\_\_\_\_\}=\{b,c\}$;

(2) $\{a,b,\_\_\_\_\}\cup\{b,d,e\}=\{a,b,c,d,\_\_\_\_\}$;

(3) $\{a,t,\_\_\_\_,\ \_\_\_\_\}\cap\{d,c,e\_\_\_\_,\ \_\_\_\_\}=\{a,b,e\}$.

20. 用符号（$\in$、$\notin$、$=$、$\supset$ 等）及连词（且、或）填空：

(1) {菱形}____{正方形};

(2) {矩形}____{长方形};

(3) $\{\pi\}$____{无理数};

(4) $\{x\mid x>0,\ x\in R\}\_\_\_\_\{x\mid x\geqslant 0,\ x\in R\}$;

(5) $\{x\mid |x|=1\}\_\_\_\_\{x\mid x-1=0\}$;

(6) 若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B\_\_\_\_B$，$A\cap B\_\_\_\_A$;

(7) 若 A、B 为不相等的非空集合，则 $\phi\_\_\_\_B\cap A$，$A\cap B\_\_\_\_A\cup B$;

(8) 若 $A=\{0,\ \phi,\ (1,1),\ \{1\}\}$，则 $\{1\}\_\_\_\_A$，$\phi\_\_\_\_A$，$\{0,\phi\}\_\_\_\_A$;

(9) 若 $x\in A\cap B$，则 $x\_\_\_\_A\_\_\_\_x\_\_\_\_B$;

(10) 若 $x\in A\cup B$，则 x____A____x____B；

(11) 若 $x\notin A\cup B$，则 x____A____x____B；

(12) 若 $x\notin A\cap B$，则x____A____x____B，或x____A____x____B，或 x____A____x____B；

(13) 若 $x\in A\cap \bar{B}$，则 x____A____x____B.

21．(1) 记 $A=\{$三角形$\}$，$B=\{$等腰三角形$\}$，$C=\{$等边三角形$\}$，$D=\{$直角三角形$\}$，则 $D\cap A=$________，$C\cup B=$________，$C\cap D=$__________，$A\cup D=$________，$D\cap B=$________；

(2) 已知 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{4,5,6,7,8\}$，$C=\{1,3,5,7,9\}$，则 $A\cap B=$________，$A\cap C=$____，$B\cap C=$____，$A\cup B=$____________，$B\cup C=$____________，$\bar{A}=$____，$\overline{A\cup C}=$________，$\bar{A}\cap\bar{C}=$______，$\bar{A}\cup\bar{C}=$________，$\overline{A\cap C}=$________，$\bar{\phi}=$____.

22．已知 $A=\{x|3-x\geqslant\sqrt{x-1},\ x\in R\}$，$B=\{x|x^2-(a+1)x+a\leqslant 0,\ a\in R,\ x\in R\}$，若 $A=B$.
则 $a=$________.

23．(1) 已知 $P=\{x|x=2^n,\ n\in N\}$，$Q=\{x|x=8^n,\ n\in N\}$，则 $P\cap Q=$________；

(2) 若集合

$A=\{x|$二次方程 $x^2-ax+1=0$有实根$,a\in R\}$，

$B=\{x|$二次方程 $ax^2-x+1=0$ 无实根$,a\in R\}$，

则 $A\cup B=$________；

(3) 若集合 $A=\{a|$二次方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根，

$a\in R\}$,

$B=\{a|$二次方程 $ax^2-x+1=0$ 无实根，$a\in R\}$.

则 $A\cup B=$ ____________

三、基本技能训练题（24～31）

24. 化简下列各题：

(1) $\{x|x<5,\ x\in N\}\cap\{x|x>2,\ x\in N\}$;

(2) $\{x|x<4, x\in N\}\cap\{x|2<x<5,\ x\in N\}\cap\{x|x>3,\ x\in N\}$;

(3) $\{x|x>6,\ x\in N\}\cup\{x|x>5,\ x\in N\}\cup\{x|x<7,\ x\in N\}$.

〔注意〕 课本中没有讲交集与并集的分配律，事实上，交与并的分配律是成立的，即

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

25. 求下列各题中的 $A\cap B$ 和 $A\cup B$:

(1) $A=\{x|-5<x<3\}$, $B=\{x|-1<x<4\}$;

(2) $A=\{x|x<5\}$, $B=\{x|x>2\}$;

(3) $A=\{6$ 的质因数$\}$, $B=\{x|x<3\}$;

(4) $A=\{(x,y)|2x+y=4\}$,

$B=\{(x,y)|3x-2y=-1\}$.

26. (1) 已知 $A=\{$等腰三角形$\}$, $B=\{$一条边长为1、一个内角为36°的多边形$\}$, 求 $A\cap B$ 的元素个数，并画出 $A\cap B$ 中各元素的图形；

(2) 已知 $A=\{x|x=3n,\ n\in Z\}$, $B=\{y|y=2n,\ n\in Z\}$, $C=\{z|\ |z|\leqslant 100, z\in R\}$, 求 $A\cap B\cap C$ 的元素个数.

27. (1) 已知全集 $I=R$, $A=\{x\mid 0<x+1\leqslant 9\}$, 求$\overline{A}$;

(2) 已知全集 $I=R$, $A=\{x\mid x^2-4x-32\leqslant 0\}$, $B=\{x\mid x^2-4x-5>0\}$, 求 $A\cap B$, $\overline{A\cap B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$;

(3) 已知全集$I=R$, $A=\{x\mid |x|\geqslant 4\}$, $B=\{x\mid x>2\}$, 求 $A\cup B$, $\overline{A\cup B}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$;

(4) 已知全集 $I=\{$所有的实数对 $(x, y)\}$,

$$A=\left\{(x, y)\,\middle|\,\frac{y-4}{x-2}=3,\ x、y\in R\right\},$$

$B=\{(x, y)\mid y=3x-2, x、y\in R\}$, 求$\overline{A}\cap B$.

28. 记 A、B 分别是二次方程

$2x^2+px+q=0$ 与 $6x^2+(2-p)x+5+q=0$ 的解集,

且$A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$, 求 $A\cup B$.

29. 记边长为 a 的正方形(指其中的点)为全集I, 在它里面有集合 A、B、C, 它们都是以半径为 r 的圆(指其中的点), 如果 $A\cap B$、$B\cap C$、$A\cap C$ 的面积都是 s, $A\cap B\cap C$ 的面积是 t, 用 a、r、s、t 与数 π 表示:

(1) $A\cap\overline{B}$的面积; (2) $A\cup C$ 的面积;

(3) $\overline{A}\cap(B\cap C)$ 的面积; (4) $A\cap\overline{A}$ 的面积.

〔注意〕 对这类题目可通过文恩图(即教材中第15页的图), 结合题目特殊条件, 加以解决.

30. 化简下列各解集:

(1) $\{x\mid x^2-9x+14<0\}$;

(2) $\{x\mid x^2-3x+2=0\}$;

(3) $\{a\mid |2a+3|>1\}$;