数学分析典型问题选讲

刘海鸿　胥成林　闫　芳　李成仙　编著

科学出版社

数学分析典型问题选讲

刘海鸿 胥成林 闫 芳 李成仙 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统地汇集了数学分析各个部分的一些典型例题，并对这些例题的解（证）题方法、思路进行了深入的分析和总结，使读者能从例题分析中提高自己对课程内容的理解、分析和解决问题的能力．每章都附有一定数量的习题，供读者学习时进行练习．

本书可作为大学数学分析课程的教学参考书或考研辅导教材，尤其可供考研同学自学、复习．

图书在版编目（CIP）数据

数学分析典型问题选讲/刘海鸿等编著．—北京：科学出版社，2016.12

ISBN 978-7-03-049221-0

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①数学分析-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 147101 号

责任编辑：王胡权／责任校对：邹慧卿

责任印制：白　洋／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 12 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16

2016 年 12 月第一次印刷　印张：12 1/4

字数：247 000

定价：39.00 元

前　言

分析方法选讲是数学与应用数学专业的一门重要的专业课程, 是学生提高学习《数学分析》及其系列课程的重要基础, 对锻炼和提高学生的思维能力具有重要意义, 是报考硕士研究生同学的必修课程.

本书编者从 2006 年起, 多次讲授分析方法选讲课程, 试用过多套教材, 这些教材都很经典, 但有些太难或太繁琐, 不太适合本校学生实际需要. 因此, 本书结合学生实际及编者多年从事数学分析和分析方法选讲教学经验, 全面、系统地总结和归纳了数学分析问题的基本类型, 每种类型的基本方法, 对每种方法先概括数学思想, 再选取典型而难度适中的例题, 逐层剖析, 分类讲解. 然后再配备相应的习题, 本书的思路及讲义初稿已在数学学院数学各专业本科教学中试用过 3 次, 效果良好, 师生均认为适合分析方法选讲课程的教学要求和教学实际.

读者通过本书的学习, 能对数学分析的内容融会贯通, 全面、深刻地理解数学分析各基本概念、基本理论之间的相互关系. 同时, 本书不仅可以帮助读者温故而知新, 更重要的是对数学分析在理解和运用两个方面有质的提高, 尤其可以帮助报考硕士研究生的本科高年级学生系统而又重点地复习数学分析.

本书共八讲, 每讲由知识结构、内容精析、解 (证) 题方法分析及练习题四部分组成. 每章内容用知识结构的形式简明地罗列写出; 在内容精析部分, 涉及一些重要的定义、定理、公式, 用以引起读者对所学知识的回顾和复习. 在解 (证) 题方法分析中, 通过典型题目的分析、求解、论证和评注, 帮助读者掌握分析问题、处理问题和解决问题的方法, 提高解 (证) 题的能力. 每讲最后均配有一定数量的练习题, 这些练习题选自《数学分析的范例与习作》及云南师范大学历年来硕士研究生数学分析的入学试题, 供读者测试自己对所学知识的理解和掌握情况, 准备考研的同学可借此测试自己的水平.

本书的出版, 得到了云南师范大学数学学院的大力支持, 科学出版社编辑为本书的出版做出了大量编校工作. 在此一并表示感谢!

由于编者水平有限, 本书难免有不足之处, 恳请读者和同行批评指正.

编　者

2016 年 6 月

目　　录

第1讲　极　　限

1.1　知识结构

- 极限
  - 基本概念
    - 数列极限(“ε-N”语言)
    - 函数极限(“ε-δ”语言)
  - 基本理论与基本方法
    - 单调有界定理
    - 夹挤定理
    - 柯西(Cauchy)准则
    - 施笃兹(Stolz)定理
    - 由导数定义求极限
    - 利用积分和求极限
    - 两个重要极限
    - 洛必达(L′Hospital)法则
    - 利用等价无穷小求极限(泰勒(Taylor)展开)
    - 利用级数收敛的必要条件

1.2　内容精析

1. 数列 $\{x_n\}$ 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的定义.

(1) **ε-N定义**　$\forall\varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N$, 有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

(2) **邻域形式**　$\forall\varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N$, 有 $x_n\in U(a,\varepsilon)$, 或 $\forall\varepsilon>0$, 在点 a 的 ε 邻域 $U(a,\varepsilon)$ 之外至多只有 $\{x_n\}$ 中的有限项.

在上述定义 (1) 中, 正数 N 一般与 ε 相关, 可以记为 $N(\varepsilon)$, 但这并不意味着 N 由 ε 唯一确定. 从定义 (2) 中可以看出, 数列 $\{x_n\}$ 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的几何意义是: 在点 a 的任意邻域内聚集了数列 $\{x_n\}$ 中的几乎所有项.

2. 收敛数列的基本性质.

唯一性; 有界性; 保号性与保不等式性; 四则运算性; 迫敛性以及数列敛散性与数列前面有限项的无关性.

3. 数列收敛的充要条件.

(1) 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分条件: $\forall\varepsilon>0, \exists N>0, \forall n, m>N$, 有 $|x_m-x_n|<$

ε (柯西收敛准则).

(2) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$(a) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$.

$\Leftrightarrow$(b) 数列 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 都以 a 为极限.

$\Leftrightarrow$(c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$.

充要条件 (b) 主要用来证明数列 $\{x_n\}$ 不收敛. 方法是寻找数列 $\{x_n\}$ 的两个收敛子列, 而它们的极限不相等, 则数列 $\{x_n\}$ 必不收敛. 充要条件 (c) 既能证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 又能证明数列 $\{x_n\}$ 不收敛.

4. 数列收敛的充分条件.

递增有上界数列必收敛, 递减有下界数列必收敛 (单调有界原理).

5. 无穷小数列与无穷大数列的定义及性质.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为无穷小数列.

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 满足: $\forall G > 0, \exists N > 0, \forall n > N$, 有 $|x_n| > G$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为无穷大数列, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. 类似可以定义 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

(3) 性质: 数列 $\{x_n\}$ 为无穷小数列 $(x_n \neq 0) \Leftrightarrow$ 数列 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷大数列.

(4) 无穷大数列阶的比较:

以 $\log_a n(a>1), n^a(a>1), a^n(a>1), n!, n^n$ 为通项的数列都是正无穷大数列, 它们的阶有下列关系

$$\log_a n \ll n^a \ll a^n \ll n! \ll n^n,$$

其中 $a_n \ll b_n$ 表示 a_n 与 b_n 都是正无穷大数列, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的 ε-δ 定义是: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的定义的邻域形式是: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U^\circ(a,\delta)$ 有 $f(x) \in U(A,\varepsilon)$.

7. 极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的充要条件是: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$; 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的充要条件是: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

8. 函数极限的基本性质是: 唯一性; 局部有界性; 局部保号性; 不等式性; 四则运算法则以及迫敛性.

9. 归结原则 (海涅定理): $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的充要条件是对任一数列 $\{x_n\} \subset U^\circ(a)$, $x_n \to a(n\to\infty)$, 有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. 事实上, 归结原则的条件可以减弱为: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的充要条件是对任一数列 $\{x_n\} \subset U^\circ(a), x_n \to a(n\to\infty)$, 数列

$\{f(x_n)\}$ 收敛.

10. 函数极限的柯西准则.

极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在的充要条件是: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $\forall x'$, $x'' \in U^\circ(a,b)$, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

11. 函数极限中有两个重要极限, 它们是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$. 由此可以导出下列基本结果:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a(a>0).$$

结合复合函数求极限的方法, 还有

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, 且当 $x \neq a$ 时, $\varphi(x) \neq 0$, 就有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, 就有 $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = \mathrm{e}$.

12. 二元函数重极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P) = A$ 的定义: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 使得当 $P \in U^\circ(P_0,\delta)\cap D$ 时, 有 $|f(P) - A| < \varepsilon$. 为了方便, 简记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = A$, 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$.

13. 设 E_1 与 $E_2 \subset D$, P_0 是它们的聚点, 若存在极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_1}} f(P) = A_1$, $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_2}} f(P) = A_2$, 但 $A_1 \neq A_2$, 则极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)$ 不存在. 这一命题常用来判定极限不存在.

14. 二元函数重极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P) = A$ 的归结原则如下. 二元函数重极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)$ 存在的充要条件是: 对于 D 中的任一满足条件 $P_n \neq P_0$, 且 $P_n \to P_0(n\to\infty)$ 的点列 $\{P_n\}$, 它所对应的函数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛.

15. 二元函数的累次极限的定义是: 设 $E_x, E_y \subset \mathbf{R}$, x_0, y_0 分别是 E_x 与 E_y 的聚点, 二元函数 f 在 $D = E_x \times E_y$ 上有定义. 若对每一个 $y \in E_y, y \neq y_0$ 存在极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y) = \varphi(y)$, 进一步存在极限 $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}} \varphi(y) = L$, 则称此极限 L 为二元函数 f 先对 $x(\to x_0)$ 再对 $y(\to y_0)$ 求累次极限, 记为 $L = \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

类似可以定义二元函数 f 先对 $y(\to y_0)$ 再对 $x(\to x_0)$ 求累次极限.

累次极限和重极限是两个不同的概念, 它们的存在性没有必然的蕴含关系, 但是, 当一个累次极限与重极限存在时, 它们必相等.

1.3 解 (证) 题方法分析

数列或函数的极限, 是数学分析的核心内容, 极为重要, 每次数学分析的硕士研究生入学试题, 一般都有关于极限方面的题目, 而且题型多种多样, 大都是多个数学分析内容的综合运用题, 解题方法具有相当大的灵活性与技巧性, 且有一定的难度, 一般说无定法可循.

为了讲解方便, 我们遴选了一些近几年全国各高等学校硕士研究生数学分析的入学试题, 加以归类, 以探明求解 (或证明) 极限类型试题的大致思路.

1. 利用单调有界原理求 (证) 极限

这一类求 (证) 极限的题目, 在全国各高校硕士研究生入学试题中是最常见的, 下面选几道近几年具有代表性的硕士研究生入学试题, 与读者共赏.

例 1　已知 $0 < x_1 < \sqrt{3}$, $x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}(n=1,2,\cdots)$, 试问: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 是否存在? 证明你的结论. 若极限存在, 求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

分析　本题首先用单调有界原理证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 然后利用已知等式 $x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 两边取极限, 求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　(1) 用数学归纳法证明: 对 $\forall n$, 有 $0 < x_n < \sqrt{3}$.

已知 $0 < x_1 < \sqrt{3}$, 设 $0 < x_k < \sqrt{3}$, 则有

$$0 < x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} = 3 - \frac{6}{3+x_k} < 3 - \frac{6}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

由数学归纳法, 对 $\forall n$, 有 $0 < x_n < \sqrt{3}$, 从而 $x_n^2 < 3$, 因此,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} > 0,$$

即 $x_{n+1} > x_n$, 故 $\{x_n\}$ 为单调增加数列且上方有界. 据单调有界原理知, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

(2) 将等式 $x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 两边取极限, 得

$$A = \frac{3(1+A)}{3+A},$$

即 $A^2=3, A=\sqrt{3}(A=-\sqrt{3}$ 不合题意).

由此, 得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}$.

说明 应用数列的单调有界定理求极限可分为下列三个步骤进行: ①证明数列 $\{x_n\}$ 单调有界, 据单调有界原理知, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 从而可设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$; ②在递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 中, 令 $n\to\infty$, 就有 $a=f(a)$; ③解关于 a 的方程 $a=f(a)$, 并用极限的唯一性确定极限 a.

例 2 证明数列 $0<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots)$ 有极限, 从而有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

其中 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$, C 称为欧拉 (Euler) 常数.

分析 本题先对 $f(x)=\ln x$ 在区间 $[k,k+1]$ 上利用拉格朗日 (Lagrange) 中值定理得到

$$\ln(k+1)-\ln k=\frac{1}{k+\theta_k}\quad(0<\theta_k<1),$$

由此推证数列 $\{x_n\}$ 是有界数列. 再指出该数列单调递减. 据单调有界原理知, $\{x_n\}$ 有极限, 由此本题即可得证.

证明 对函数 $f(x)=\ln x$ 在区间 $[k,k+1]$ 上利用拉格朗日中值定理, 得

$$\ln(k+1)-\ln k=\frac{1}{k+\theta_k}\quad(0<\theta_k<1).$$

于是, 得

$$\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k},$$

即

$$0<\frac{1}{k}-\ln(k+1)+\ln k<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

对 k 从 1 到 n 求和得

$$0<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)<1-\frac{1}{n+1},$$

即

$$0<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n<1-\frac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln n<1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}<2.$$

故 $\{x_n\}$ 是有界数列. 又对任意自然数 n, 有

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln n]<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=0,$$

即 $x_{n+1} < x_n$, 故 $\{x_n\}$ 是单调递减数列. 据单调有界原理知, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 设为 C, 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C.$$

由此, 得

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=C+\varepsilon_n\quad(\text{其中}\varepsilon_n\to 0, n\to\infty),$$

即

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n\quad(\text{其中}\varepsilon_n\to 0, n\to\infty).$$

说明　利用本例结果可以

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=1$. 事实上,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+1\right]\\=&0\cdot C+1=1.\end{aligned}$$

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]\\=&\lim_{n\to\infty}[\ln 2n+C+\varepsilon_{2n}-(\ln n+C+\varepsilon_n)]\\=&\ln 2.\end{aligned}$$

例 3　设连续函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是正的、单调递减的, 且

$$\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x,$$

证明: $\{\alpha_n\}$ 收敛.

分析　本题结合定积分的性质, 利用单调有界原理即可证明 $\{\alpha_n\}$ 收敛.

证明 因为连续函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是正的、单调递减的, 所以, 对任意自然数 n, 有

$$\begin{aligned}\alpha_n-\alpha_{n-1}&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n-1}f(k)+\int_1^{n-1}f(x)\mathrm{d}x\\&=f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(n)-\int_{n-1}^{n}f(n)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

对 $\forall n$, $\alpha_n-\alpha_{n-1}\leqslant 0$, 即对 $\forall n$, 有 $\alpha_n\leqslant\alpha_{n-1}$, 故 $\{\alpha_n\}$ 单调递减.

又

$$\begin{aligned}\alpha_n&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\\&=\left[f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right]+\left[f(2)-\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x\right]+\cdots\\&\quad+\left[f(n-1)-\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x\right]+f(n)\\&\geqslant\left[f(1)-\int_1^2 f(1)\mathrm{d}x\right]+\left[f(2)-\int_2^3 f(2)\mathrm{d}x\right]+\cdots\\&\quad+\left[f(n-1)-\int_{n-1}^{n}f(n-1)\mathrm{d}x\right]+f(n)\\&=f(n)>0.\end{aligned}$$

即 $\{\alpha_n\}$ 下方有界.

据单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ 存在, 即 $\{\alpha_n\}$ 收敛.

说明 本例已知条件中指出 "连续函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 是正的、单调递减的", 这一提示信息使读者自然想到要用单调有界原理来证明数列 $\{\alpha_n\}$ 的敛散性.

2. 利用夹挤定理求 (证) 极限

夹挤定理, 也称迫敛性定理或两边夹定理, 本身就很形象地表明了这个定理的实质, 应用此定理求 (证) 极限的关键 (也是难点) 在于寻找不等式两端具有同一极限的式子.

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$.

分析 设 $x_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$, 则 $x_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}x_n$, 显然 x_n 递减有下界. 据单调有界原理知, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 但若在等式

$x_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}x_n$ 两端取极限, 就无法求出其极限.

对于求出这种连乘 (或连加) 形式的数列通项 x_n 的极限, 常适用于先进行不等式估计, 然后应用夹挤定理求出其极限.

解　设 $x_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$, 再设

$$y_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

则有

$$0<x_n<y_n.$$

从而得

$$0<x_n^2<x_ny_n=\frac{1}{2n+1},$$

即

$$0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$, 故由夹挤定理, 得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0.$$

说明　求解本题的关键在于不等式 $0<x_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 的建立. 夹挤定理的优点在于: 在证明极限存在的同时, 也解决了求极限值的问题. 应用夹挤定理, 必须由已知数列 $\{c_n\}$ 构造出数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 使其满足 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$. 在一般情况下, a_n 和 b_n 由 c_n 适当缩小和适当放大得到. 注意: 缩小、放大必须适当, 是指 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 必须具有相同的极限, 否则, 夹挤定理的结论就不成立. 还应该注意的是, 由 $\{c_n\}$ 适当缩小、放大得到的 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 形式上不是唯一的.

例 5　设函数 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的连续函数, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

分析　先考虑 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的非负连续函数时, 建立不等式

$$A\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant B.$$

要求 $\lim\limits_{x\to+\infty}A=\lim\limits_{x\to+\infty}B=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$, 据夹挤定理即得结果.

再考虑 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的任一连续函数时, 把它转化为周期为 $T(T>0)$ 的非负连续函数

$$\varphi(t)=M-f(t)\quad (\text{其中} M=\max_{t\in(0,T)} f(t))$$

的情况, 利用前述结果即得证.

证明 对任意的实数 $x>0$, 总存在非负整数 n, 使得

$$nT\leqslant x\leqslant (n+1)T.$$

(1) 当 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的非负连续函数时, 有

$$\frac{1}{(n+1)T}\int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{nT}\int_0^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t.$$

依 $f(x)$ 的周期性, 上面的不等式可以写成

$$\frac{n}{(n+1)T}\int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{n+1}{nT}\int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)T}\displaystyle\int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t,$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{nT}\int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t,$$

据夹挤定理, 得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 当 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的任一连续函数时, 则

$$\varphi(t)=M-f(t)\quad (M=\max_{t\in[0,T]} f(t))$$

是周期为 $T(T>0)$ 的非负连续函数. 据 (1) 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x (M-f(t))\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^{T} (M-f(t))\mathrm{d}t.$$

由此即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t.$$

说明　本例由证明 "周期为 $T(T>0)$ 的连续函数 $f(x)$ 的性质" 过渡到先证明 "周期为 $T(T>0)$ 的非负连续函数 $f(x)$ 的性质", 这种解题方法非常巧妙, 望读者予以重视. 此外, 根据本题结果, 可以直接求得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi},$$

其中 $f(x)=|\sin t|$ 是以 π 为周期的非负连续函数.

例 6　计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{\frac{-1}{k}}$.

分析　本题关键在于建立不等式

$$A<\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{\frac{-1}{k}}<B,$$

结合函数的单调性, 最终利用夹挤定理求出极限值.

解　设 $y=(n^x+1)^{\frac{-1}{x}}(x\geqslant 1)$, 则有 $\ln y=-\dfrac{1}{x}\ln(n^x+1)$, 求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x^2}\ln(n^x+1)-\frac{1}{x}\frac{n^x\ln n}{n^x+1}>\frac{1}{x^2}\ln n^x-\frac{1}{x}\ln n=0.$$

因为 $y>0$, 所以 $y'>0$, 由此得函数 y 是严格递增函数. 于是

$$\frac{n}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{\frac{-1}{k}}<\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

又因为有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}=1$, 所以由夹挤定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{\frac{-1}{k}}=1.$$

说明　本题中为了寻找数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使用了导数的工具.

例 7　用夹挤定理证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 m 个正数.

证明　设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 于是就有

$$A\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{mA^n}=A\sqrt[n]{m}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$, 由夹挤定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$.

说明 应用夹挤定理求 (证明) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 关键在于把数列 $\{a_n\}$ 适当放大和缩小, 寻找 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得: 当 $n>N$ 时, 有 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$.

3. 未定式极限

这一类型的极限, 简单的情况可通过恒等变形或等价无穷小代换消去未定因式. 一般情况可用洛必达法则或泰勒公式加以解决.

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

分析 令 $y=\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$, 当 $x>0$ 时, $\ln y=\dfrac{1}{e^x-1}\cdot\ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$, 用等价无穷小 $\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$ 代换, 多次使用洛必达法则求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln y$; 而当 $x<0$, $\ln y=\dfrac{\ln[-\ln(1+x)]-\ln(-x)}{e^x-1}$, 同理求 $\lim\limits_{x\to0^-}\ln y$, 最后去掉对数求 $\lim\limits_{x\to0}y$ 即可.

解 令 $y=\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$, 则当 $x>0$ 时,

$$\begin{aligned}\ln y&=\frac{1}{e^x-1}\cdot\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\\&=\frac{\ln(\ln(1+x))-\ln x}{e^x-1},\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}(\ln y)&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\ln(1+x))-\ln x}{e^x-1}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\ln(1+x))-\ln x}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{\ln(1+x)}\cdot\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x}}{1}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x(1+x)\cdot\ln(1+x)}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x(1+x)\cdot x}\end{aligned}$$