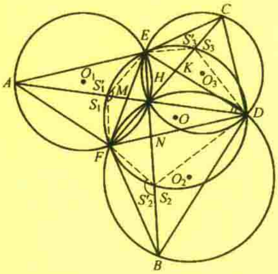


论九点圆

郭小全 著

LUN
JIU DIAN
YUAN

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

LUN JIU DIAN YUAN

论九点圆

郭小全 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

该书共两章，第1章介绍了三角形九点圆的出处、定名、归属和发展到圆锥曲线上等问题.第2章介绍了十几种有启发性的证法和二百多个说明，从证法和说明中给出了图形变换的性质和一些三角形九点圆的推广，以及与三角形九点圆相关定理推广的一些新性质，故三角形九点圆与其他命题浓厚的关系，把三角形九点圆推入由浅入深的境地，从侧面也介绍了“三圆几何”的一些性质.故“三圆几何”的所有性质对于三角形九点圆都成立.

该书可供数学教师和数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

论九点圆/郭小全著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2016.5

ISBN 978-7-5603-5928-1

Ⅰ.①论… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①圆-几何学
Ⅳ.①O123.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第070826号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 关虹玲
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张19.75 字数354千字
版 次 2016年5月第1版 2016年5月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5928-1
定 价 88.00元

作者简介

郭小全，1960 年 8 月 13 日生于内蒙古东乌珠穆沁旗，1977 年下乡为知青，1980 年，在东乌珠穆沁旗财政局工作，后在地方税务局工作，1984 年毕业于中华财务会计学校，1995 年毕业于内蒙古工商财税学院.

作者利用业余时间学习数学，发表过一些文章，其中在《中国初等数学研究文集》(二)上发表了"费马猜想(Fermatsche Vermutung)初等证明"，在《数学通报》上发表了"任一圆恒过某一定点"和"直尺求作圆锥曲线的切线的另一方法"，在《中国教育理论与实践杂志》上发表了"不定方程 $6y^2=x(x+1)(2x+1)$ 的证明"和"简单引理证明困难的命题和从中推究得一个更困难变通的命题"，在《中学生数理化》上发表了"简单计算年月日中的星期数"，在《中国初等数学研究文集》上发表了"解决第一种情形斯坦因豪斯(Steinhaus)遗留的问题""完全四边形九点圆和性质"，出版了《平面几何专题研究》(哈尔滨工业大学出版社，2013 年 6 月)等.

2013 年 12 月 23 日

前　言

“平面三角形九点圆”是大家熟知且著名的定理，有很多数学家、学者和业余爱好者都去研究它，给出很多种不同的证明和方法，从中得出了很多性质.笔者总结了前人的证明方法并分析他们得出的性质，把“九点圆”经演变、变换和推广后得出“三圆几何”图形的一些性质，也就是“三圆几何”，且证明了其所有的性质对于“三角形九点圆”都成立，而“三角形九点圆”的一部分性质在“三圆几何”中也是成立的.《论九点圆》一书实际就是“三圆几何”性质部分的体现，从字眼上看好像是由三个圆构成的图形，即三个圆共点、外离、内含、相切(内切、外切)和圆心位置等构成的“三圆几何”，实际并非是由三个圆构成的，而是由 n($n\geqslant 2$)个圆构成的图形，当 n 个圆重合三个或两个圆时就变成最简单和最基本的两圆或三圆图形，因此，称“三圆几何”最为适当.从《论九点圆》一书中得出200多个命题(或定理)，如：真正相似三连三角形(三圆几何)轴中心性质、圆(三圆)上相似点共线、真正相似(三圆几何)中心性质、真正相似三连三角形(三圆几何)十二点圆、完全密克曲线及推广、完全四边形九点圆及推广、完全五边形九点圆共点及圆心共圆、过相似中心相似线共点唯一性、九点圆在圆锥曲线上的推广、调和四边形中线之和推广及等角共轭点性质、圆内四边形对角线的等角线之和性质、格雷贝作图法推广和三点形等角完全四边形性质，等等.若读了《论九点圆》一书后，则能给您带来一些乐趣和感悟！因笔者非数学专业者，在撰写《论九点圆》一书中存在一些词语不当和论点错误的地方，望广大读者给予指正和批评！

在学习自然科学中，笔者认为自然学科总会由简单事件上升到抽象事件来研究该事件的发展和动态，这样才能前进一步并预知一些自然规律，这对自然学科是有益的，且这是一个循环无止境的方法.

郭小全

于内蒙古东乌珠穆沁旗

2014年9月9日

目　　录

第 1 章　三角形九点圆古今简介 ………………………………………… 1

一、三角形中的九点圆简介 …………………………………………… 1

二、圆锥曲线中的九点圆 ……………………………………………… 2

第 2 章　三角形九点圆的一些证法、性质、推广和说明 ……………… 4

第 1 章　三角形九点圆古今简介

一、三角形中的九点圆简介

1821 年，热尔岗(Joseph Diaz Gergonne，1771—1859，法国数学家)和波斯列(Jean Victor Poncelet，1788—1867，法国数学家、力学家和机械工程师)首先在《Ann，deMath.》(11 期，p205-220)上发表了“三角形九点圆”定理，即每个三角形中，各边的中点、三条高的垂足，以及各顶点与垂心连线的中点，这九个点全在一个圆上，该圆称为三角形九点圆或热尔岗圆或波斯列圆或费尔巴哈(Karl Wilhelm Feuerbach，1800—1834，德国数学家)圆，有时也称欧拉(Leonhard Euler，1707—1783，瑞士数学家、物理学家和天文学家)圆(这是因欧拉发现了欧拉线，即每一个三角形的外心、重心、垂心共线，且外心到重心的距离等于重心到垂心距离的二分之一，也即外心到一边中点的距离等于该边所对顶点到垂心距离的二分之一，后者称塞尔瓦(Servois)定理. 根据这些性质，则简单的就得到三角形九点圆)或称垂心组(如果在四点中有一点是其余三点连成三角形的垂心，那么其余三点也都有同样的性质，这样的四点合称为垂心组)九点圆. 这是因为垂心组中每三点连线的三角形有共同的九点圆或垂心组中每两点连线的中点和三垂足在同一个圆上而定名的. 为什么一个定理会有几个名称呢? 这是因为在那个年代各国家之间基本上没有什么学术交流且信息也互不沟通，研究出来的成果大都是独立完成的，成果在本国和友好的邻国之间传播，在这种历史条件下，一个定理在年代差上有两个以上名称是不足为怪的. 如完全四边形三对角线中点共线，这直线就有两个名称，即该直线在一些国家或一些地区里称为牛顿(Newton，1642—1727，英国数学家、物理学家和天文学家)中点线，简称牛顿线，在另一些国家或一些地区里称高斯(Gauss，1777—1855，德国数学家、物理学家和天文学家)中点线，简称高斯线，也有称牛顿一高斯中点线的. 因此，在古代时期，同一个性质的命题，分别依两个人或两个人一起命名的定理有很多，但在近代时期基本上是不会出现的(除两人合作研发之外).

三角形九点圆定理常被归功于费尔巴哈，这是因为费尔巴哈在 1822 年独立发现并将证明发表在“直边三角形的一些特殊点的性质”(Eigenscha ften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks，1822)里，在该论文中费尔巴哈添加了关于三角形九点圆(只证明六点共圆，实际这六点共圆足以说明其余三点也在前六点圆上)的另一个事实——旁切圆是与一条边和另两边延长线相切的圆(旁切圆的圆心位于两个外角和较远的那个内角平分线上)，即三角形九点圆与内切圆和三个旁切圆都相切或三角形九点圆与该三角形的切圆相切(一圆与三角形三边所在直线相切的圆，该圆圆心称为等心，该圆称为切圆，也就是内切圆和旁切圆的通称，内心和旁心的通称为等心)，这常归功于费尔巴哈，因此，称为费尔巴哈定理(证明见证明 5 说明 6).

通过以上简述和各国家的数学读本中得到这样通称既久的惯例：欧拉圆、热尔岗圆、波斯列圆和垂心组九点圆皆指三角形三边的中点、三条高的垂足以及三顶点与垂心连线的中点，这样的九点共圆. 三角形九点圆定理和费尔巴哈圆或定理包含欧拉圆、热尔岗圆、波斯列圆和垂心组九点圆，同时还指该圆与该三角形的四切圆相切(一三角形的一个内切圆和三个旁切圆的通称).

关于三角形这一特殊的九点圆的证法是很多的，该读本是从不同证法中得出了很多性质和推广，从中引申出其他一些结论和有名的定理，这里就不再叙述了，读者在阅读后面各种不同的证明和说明时就可知道该三角形九点圆内在“核”的能量有多大. 该读本只是该“核”能量的一角，要想知道得更多，还请大家共同去探究它!

二、圆锥曲线中的九点圆

圆锥曲线的定义：

如果用一个不通过圆锥顶点的平面去截圆锥的侧面，则有以下几种可能：

(1)如图 1，若截面 α 与圆锥的母线平行，则截面只与圆锥的一半相交，交线定义为抛物线.

(2)如图 2，若截面 β 与圆锥的母线不平行，则有两种可能：一种，如图2(a)，截面与圆锥的一半相交，交线定义为椭圆(如图 2(b)，当截面与圆锥的轴垂直时，交线定义为圆)，另一种，如图 2(c)，截面与圆锥上下两个面都相交，交线定义为双曲线.

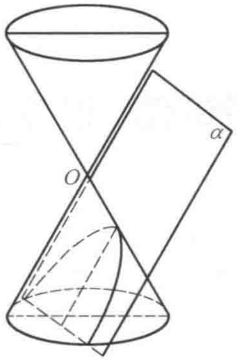
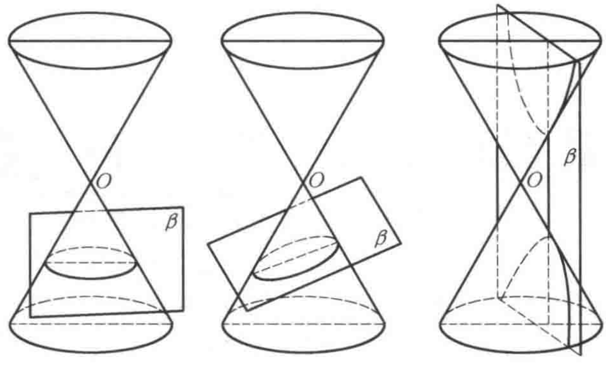


图 1



(a)　(b)　(c)

图 2

因此，把上面的抛物线、椭圆和双曲线总称为圆锥曲线.

门奈赫莫斯(Menaechmus，前 4 世纪，希腊数学家)为了解倍立方问题导出了相当于今天$x^2=ay$，$y^2=2ax$，$xy=2a^2$等类型的方程，从而进一步求得解决问题的两种方法：

用平面与圆锥母线垂直相截时发现了圆锥曲线，当圆锥顶角分割为直角、锐角和钝角时，则所得截线轨迹分别定义为直角圆锥曲线、锐角圆锥曲线和钝角圆锥曲线.

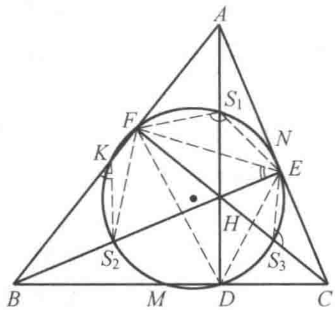
抛物线，椭圆和双曲线之称是古代和后世代“大几何学家”阿波罗尼奥斯(Apollonius，约前 262—约前 190，希腊数学家)首先引入的，从而取代了门奈赫莫斯和阿里斯泰奥斯(Aritaeus，约前 350—约前 330，希腊数学家)所用的直角圆锥曲线，锐角圆锥曲线和钝角圆曲线之称.

关于一三角形三边与一圆锥曲线截得线段和直线相交点的关系，即九点圆在圆锥曲线上的推广，见证明 7 说明 4(2)中的圆锥曲线卡诺(Carnot)定理和证明 7 说明 5. 以实例为益，这里就不再赘述了.

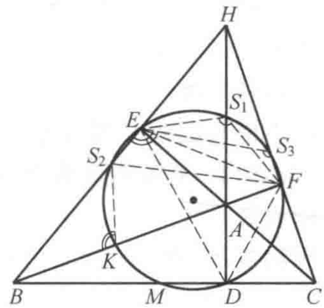
第 2 章　三角形九点圆的一些证法、性质、推广和说明

三角形九点圆　设 D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 所在直线上高线的垂足，H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，又设 S_1,S_2,S_3,M,N,K 分别是 AH,BH,CH,BC,CA,AB 的中点，如图 1，求证：D,E,F,S_1,S_2,S_3,M,N,K 九点共圆.

证明 1　连 $DE,EF,FD,S_1F,FS_2,S_2K,S_1E,ES_3$，如图 1，则易知 S_1,S_2,S_3 分别是 A,E,H,F 四点圆，B,F,H,D 四点圆，C,D,H,E 四点圆的圆心.



(a)



(b)

图 1

又

$$\triangle AEF \backsim \triangle DBF \backsim \triangle DEC \quad ①$$

所以

$$\angle AEF=\angle FBD=\angle DEC \quad ②$$

$$\angle EFA=\angle BFD=\angle ECD \quad ③$$

$$\angle FAE=\angle FDB=\angle CDE \quad ④$$

所以

$$\angle BS_2F=\angle FS_1E=\angle CS_3E \quad ⑤$$

所以 S_2,F,S_1,E 四点，S_1,E,S_3,F 四点，S_2,F,E,D 四点分别共圆.

综合知 D,E,F,S_1,S_2,S_3 六点共圆.

又易知 $S_2K /\!/ AD$. 所以

$$180^\circ = \angle S_2KA + \angle BAH = \angle S_2KF + \angle S_2EF$$

所以点 K 在 $\triangle S_2EF$ 的外接圆上，即点 K 在 $\triangle DEF$ 的外接圆上，同理 M 和 N 两点也在 $\triangle DEF$ 的外接圆上，故 D,E,F,S_1,S_2,S_3,M,N,K 九点共圆.

推论　三角形三个旁心构成的三角形的九点圆是前一三角形的外接圆.

说明 1：从证明 1 可得九点圆的推广，在没有给出它的推广之前，首先给出相似图形的一些定义和性质，再在说明 2 和证明 2 及说明 3 里给出三角形九点圆的推广.

定义 1　A 和 B 两图形的点之间，若有一对一的对应关系，且 A 图形上的任两点的距离与 B 图形上的任对应两点距离之比，对于 A 和 B 图形所有的点都有相同的值，则称这两图形 A 和 B 为相似图形. 此值等于该两相似图形的相似比，显然相似图形的对应角相等.

定义 2　在 A 和 B 两相似图形各自所在平面上取一点 P 和 Q，若使点 P 和 Q 分别与图形 A 和 B 的三个对应顶点的连线对应成比例（即等于相似图形 A 和 B 的相似比），则称 P 和 Q 为相似图形 A 和 B 的一组相似对应顶点，简称一组相似对应点，如两相似三角形中的两外心为一组相似对应点.

定义 3　若在相似图形 A 和 B 中再取另一组相似对应点 P' 和 Q'，则线段（边）或连线 PQ 和 $P'Q'$ 称为相似图形 A 和 B 一组相似线段（边）或直线，如两相似三角形中的一相似三角形的外心与垂心连线和另一相似三角形的外心与垂心连线，此两连线（边）或直线是一组相似线段（边）或直线.

定义 4　相似图形 A 和 B 有两种：一种是若沿着周界环绕的方向相同，则称为真正相似图形，简称真相似，这时把定义 2 中的 P 和 Q 一组相似对应点称为真正相似对应点，简称真正相似点. 方向相反的，则称为镜像相似图形，简称镜像相似. 这时把定义 2 中的 P 和 Q 一组相似对应点称为镜像相似对应点，简称为镜像相似点.

定义 5　若两个真正相似三角形中的两对应点重合（如图 2 中 $\triangle AEF \backsim \triangle DBF$ 的对应点 F），则称为真正相似对应重合点，简称真正相似重合点. 若三个真正相似三角形两两有真正相似重合点，则称为真正相似三连三角形，真正相似三连三角形真正相似重合点与另一真正相似三角形对应顶点的连线称为真正相似三连三角形的相似轴（如图 2 中的点 F 和 C 的连线），简称真正相似轴.

性质　综合上述知，线段（边）PQ 和 $P'Q'$ 的比等于相似图形 A 和 B 的相似比，直线 PQ 和 $P'Q'$ 分别与相似图形 A 和 B 对应边（所在直线）的对应交角

(夹角)相等.

说明 2:如图 1,从证明 1 和说明 1 知,$\triangle EFA$,$\triangle BFD$,$\triangle ECD$ 是真正相似的,S_1,S_2,S_3 是一组相似对应点,$S_2K\parallel AD\parallel S_3N$,$S_1K\parallel BE\parallel S_3M$,$S_2M\parallel CF\parallel S_1N$,再根据证明 1 中的式⑤知,$\angle BS_2F=\angle FS_1E=\angle CS_3E$,由此条件得,$D,E,F,S_1,S_2,S_3,M,N,K$ 九点共圆,因此,得如下三角形九点圆的推广,即:

在$\triangle DEF$ 三边 EF,FD,DE 上作真正相似三连$\triangle EFA$,$\triangle BFD$,$\triangle ECD$.

(1)如图 2(a),图 2(b),求证相似对应顶点连线 AD,BE,CF 共点于 H,且$\triangle EFA$,$\triangle BFD$,$\triangle ECD$ 的外接圆共点于 H(这样于 H 的三个圆所组成的图形称为"三圆几何",关于它的有关性质待见《三圆几何》出版).

(2)设 P_1,P_2,P_3分别是在$\triangle EFA$,$\triangle BFD$,$\triangle ECD$ 所在平面上的点,且是任一组对应相似点,如图 3(a),求证:$\triangle P_1FP_2$,$\triangle P_2DP_3$,$\triangle P_3EP_1$ 分别是定角相似形图形(图形在一定条件下的变化与一固定图形相似,这样的图形称为定角相似形).

该结论称为真正三连相似三角形定角相似三角形定理,简称为定角相似三角形定理.

(3)设 S_1,S_2,S_3分别是直线 AD,BE,CF 上的点,如图 2(a),图 2(b),求证:存在唯一的一组相似对应点 S_1,S_2,S_3,且都在$\triangle DEF$ 的外接圆上.

(4)在(2)中,如图 4,作 $S_1P\parallel CF\parallel S_2Q$,$S_1J\parallel BE\parallel S_3M$,$S_3N\parallel AD\parallel S_2K$,设 S_1P 和 S_2Q 分别相交直线 CE 和 CD 于点 P 和 Q,S_1J 和 S_3M 分别相交直线 BF 和 BD 于点 J 和 M,S_3N 和 S_2K 分别相交直线 AE 和 AF 于点 N 和 K,求证:$D,E,F,S_1,S_2,S_3,P,Q,M,N,J,K$ 十二点共圆.

(5)如图 2(a),图 2(b),求证(2)中的 $S_1A\cdot S_2B\cdot S_3C=S_1F\cdot S_2D\cdot S_3E=ES_1\cdot FS_2\cdot DS_3$.

证明 设$\triangle AEF$ 和$\triangle BFD$ 的外接圆相交于点 H,连 AH,HD,BH,HE,CH,HF,如图 2(a)和图(b).

(1)根据说明 1 中的真正相似性质知

$$\angle EAF=\angle EAF \qquad ①$$

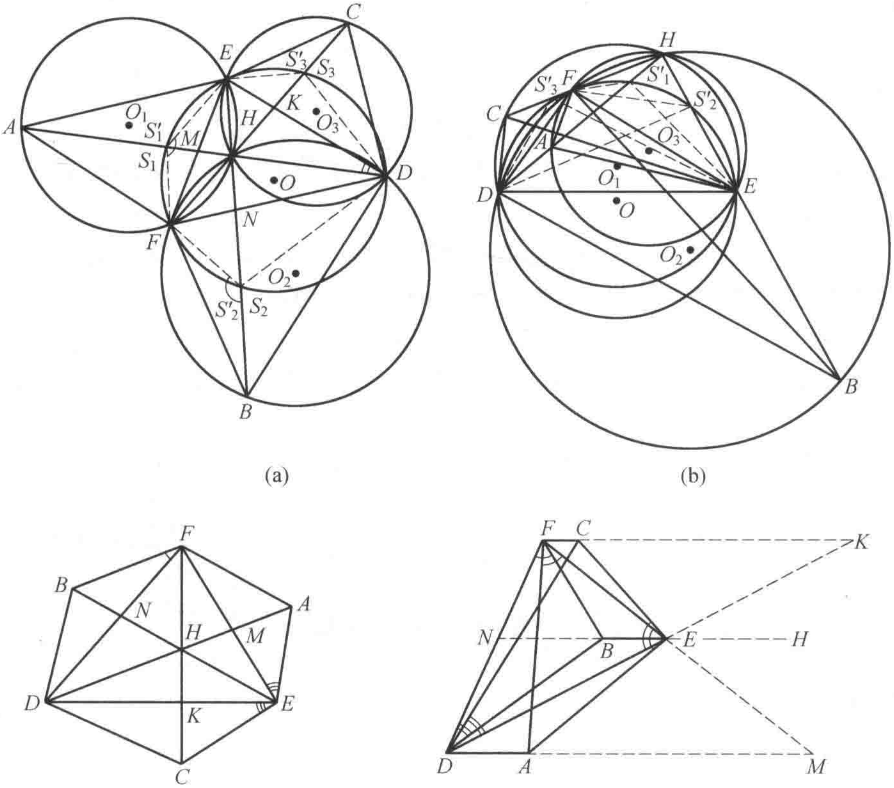
$$\angle DBF=\angle AEF \qquad ②$$

$$\angle ECD=\angle EFA \qquad ③$$

由①+②+③得

$$\angle EAF+\angle DBF+\angle ECD=\angle EAF+\angle AEF+\angle EFA=180^\circ$$

即



(a)　(b)

(c)　(d)

图 2

$$\angle EAF+\angle DBF+\angle ECD=180^\circ \tag{④}$$

又

$$\angle EAF+\angle FHE=180^\circ \tag{⑤}$$

$$\angle DBF+\angle FHD=180^\circ \tag{⑥}$$

$$\angle FHE+\angle FHD+\angle DHE=360^\circ \tag{⑦}$$

显然⑤＋⑥＝⑦，且整理后得

$$\angle EAF+\angle DBF=\angle DHE \tag{⑧}$$

把式⑧代入式④得

$$\angle DHE+\angle DCE=180^\circ \tag{⑨}$$

所以$\triangle ECD$的外接圆过点H. 又

$$\angle DCE=\angle BFD=\angle DHB$$

即

$$\angle DCE = \angle DHB \tag{⑩}$$

把式⑩代入式⑨得

$$\angle DHE + \angle DHB = 180^\circ \tag{⑪}$$

所以 B,H,E 三点共线. 同理 A,H,D 三点和 C,H,F 三点分别共线，故(1)证毕.

这里给出题设条件 AF 和 BF，AE 和 CE，BD 和 CD 分别是 $\angle DFE$，$\angle FED$，$\angle EDF$ 的等角线段，来证 AD,BE,CF 三直线共点 H，如图 2(c)，图 2(d).

设 AD,BE,CF 分别与 EF,FD,DE 相交于点 M,N,K，S 表示三角形的面积. 则

$$\angle AFD = \angle EFB, \angle BDE = \angle FDC, \angle DEA = \angle CEF \tag{⑫}$$

所以

$$\frac{FM}{ME} = \frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle DEA}} = \frac{\frac{1}{2}FA \cdot DF\sin\angle AFD}{\frac{1}{2}AE \cdot ED\sin\angle DEA} = \frac{FA}{AE} \cdot \frac{FD}{DE} \tag{⑬}$$

同理

$$\frac{EK}{KD} = \frac{EC}{CD} \cdot \frac{EF}{FD} \tag{⑭}$$

$$\frac{DN}{NF} = \frac{BD}{FB} \cdot \frac{ED}{FE} \tag{⑮}$$

由⑬×⑭×⑮得

$$\frac{FM}{ME} \cdot \frac{EK}{KD} \cdot \frac{DN}{NF} = \frac{FA}{AE} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{DB}{BF} \tag{⑯}$$

又

$$\begin{aligned}\frac{FA}{AE} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{DB}{BF} &= \frac{FA}{AE} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{DB}{BF} \cdot \frac{FE}{FE} \cdot \frac{ED}{ED} \cdot \frac{DF}{DF} \\ &= \frac{\sin\angle AFE}{\sin\angle DFB} \cdot \frac{\sin\angle BDF}{\sin\angle CDE} \cdot \frac{\sin\angle DEC}{\sin\angle AEF} \\ &= \frac{\frac{1}{2}FA \cdot FE\sin\angle AFE}{\frac{1}{2}AE \cdot FE\sin\angle AEF} \cdot \frac{\frac{1}{2}EC \cdot ED\sin\angle DEC}{\frac{1}{2}CD \cdot ED\sin\angle CDE} \cdot\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{1}{2}DB\cdot DF\sin\angle BDF}{\frac{1}{2}BF\cdot DF\sin\angle DFB}$$

$$=\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AEF}}\cdot\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle DEC}}\cdot\frac{S_{\triangle DBF}}{S_{\triangle DBF}}=1$$

即

$$\frac{FA}{AE}\cdot\frac{EC}{CD}\cdot\frac{DB}{BF}=1 \tag{17}$$

把式⑰代入式⑯得

$$\frac{FM}{ME}\cdot\frac{EK}{KD}\cdot\frac{DN}{NF}=1 \tag{18}$$

由式⑱和塞瓦(Ceva)逆定理知,MD,KF,NE 三直线共点或相互平行.

点 H 称为真正相似三连三角形相似轴中心,此性质简称真正三连相似轴定理.对于后面的证明 AD,BE,CF 三直线共点 H,也称清宫俊雄(Shimiya Toshio)定理,或称三圆几何相似轴心定理.真正相似三连三角形向形外或向形内的分别称外或内三圆几何相似轴心定理.

a.当$\triangle EFA$,$\triangle BFD$,$\triangle ECD$ 都是正三角形时,点 H 称为$\triangle EFD$ 的正等角中心,又称为$\triangle EFD$ 的费马(Fermat)点,显然该命题(1)的结论可称为正等角中心或费马点的推广.

b.从结论(1)和笛沙格(Desargues)定理得如下命题:

题设与结论(1)一样,如图 2(a),图 2(b),则 AB 与 DE,BF 与 EC,FA 与 CD 相交点共线.

(2)如图 3(a),根据真正相似形性质知,$\angle AFP_1=\angle DFP_2$,$\angle EFP_1=\angle BFP_2$,则

$$\frac{AF}{DF}=\frac{FP_1}{FP_2} \tag{19}$$

即

$$\angle AFD=\angle P_1FP_2 \tag{20}$$

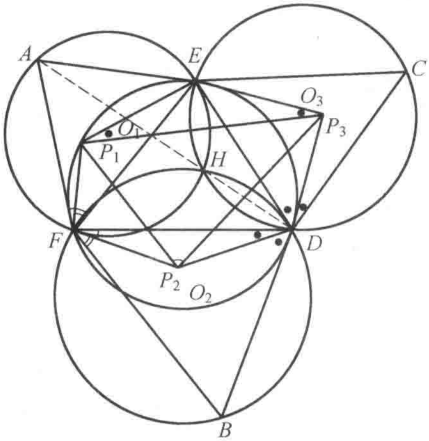
由式⑲,⑳知

$$\triangle AFD\backsim\triangle P_1FP_2 \tag{21}$$

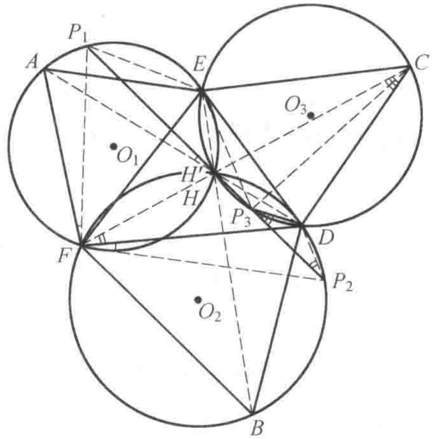
以下略.上面结论可推广到多边形,即称为定角相似 n 边形定理.由式㉑得如下推论:

若点 P_1,P_2,P_3 分别在真正三连$\triangle EFA$ 圆 O_1,$\triangle BFD$ 圆 O_2,$\triangle ECD$ 圆

O_3上，且是任一组相似点(这是存在的，由读者自证)，如图 3(b)，则 P_1, P_2, P_3 三点共线于 t，且直线 t 过点 H(相似轴中心). 逆之也成立，即若任一组对应相似点共线，则各自相似点分别在各自真正相似三角形的外接圆上. 该推论称为真正三连相似三角形圆上相似对应点共线定理，简称三圆上相似点共线定理.



(a)



(b)

图 3

简证 设 P_1P_2 和 AD 相交于点 H'，由式㉑知，$\angle FAD=\angle FP_1P_2$，故点 H' 在圆 O_1 上，又因圆 O_1 与直线 AD 最多有两个相交点 A 和 H，所以 H' 和 H 重合，故 P_1, H, P_2 三点共线，以下略.

关于用圆上相似点共线定理及用直尺求作相似对应点的作图见证明 3 中的说明 13(3).

(3)设$\triangle DEF$ 的外接圆分别交直线 AD, BE, CF 于点 $S'_1S'_2, S'_3$，连 $FS'_1, S'_1E, ES'_3, S_3D$，如图 2，由(1)设 AD, BE, CF 共点于 H，且知

$$\angle FS'_1E=\angle CS'_3E \qquad ㉒$$

$$\angle S'_1FE=\angle S'_1DE=\angle HDE=\angle HCE=\angle S'_3CE$$

即

$$\angle S'_1FE=\angle S'_3CE \qquad ㉓$$

由式㉒，㉓知

$$\triangle S'_1FE\backsim\triangle S'_3CE$$

(由读者证明如下定理：

在$\triangle DEF$ 形外或内的$\triangle AEF$，$\triangle DEC$ 和$\triangle FBD$ 中，若$\angle AEF=\angle CED=$