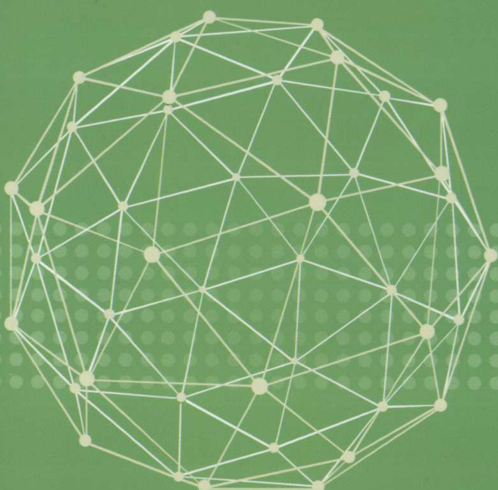
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

工程数学

计算方法

（第二版）

张诚坚　何南忠　覃婷婷



高等教育出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

工程数学

计算方法

Jisuan Fangfa

（第二版）

张诚坚　何南忠　覃婷婷

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是为大学本科生开设计算方法课程而专门编写的一本教科书，全书共分六章，内容涉及数值算法基础知识、非线性方程数值解法、线性方程组的数值解法、插值与曲线拟合方法、数值积分及常微分方程初值问题数值解法。本书以介绍经典数值算法为基础，同时也适当引入了现代算法的内容。书中既注重算法理论的严谨性，又突出算法设计的原始思想与实现技巧，并给出了所有常用算法的 MATLAB 程序代码，从而使算法理论与算法实现形成一体。此外，本书还配备了一定量的习题，其中有些是算法理论分析题，有些是上机实验题，学生完成这些习题有利于其对书本知识的巩固和理解。

本书取材适当，用语深入浅出，通俗易懂，除适合于学生作为教材外，也可供科技人员和工程技术人员作为参考书。

图书在版编目（CIP）数据

工程数学．计算方法 / 张诚坚，何南忠，覃婷婷编．--2 版．-- 北京：高等教育出版社，2016. 4
ISBN 978-7-04-044927-3

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①张… ②何… ③覃… Ⅲ. ①工程数学-高等学校-教材②计算方法-高等学校-教材 Ⅳ. ①TB11②O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 035064 号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 蒋 青　封面设计 张 志　版式设计 马敬茹
插图绘制 黄建英　责任校对 吕红颖　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	国防工业出版社印刷厂		http://www.hepmall.com
开　本	850mm×1168mm　1/32		http://www.hepmall.cn
印　张	6.5	版　次	2008 年 1 月第 1 版
字　数	160千字		2016 年 4 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印　次	2016 年 4 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	17.60 元

物 料 号　44927-00

第二版前言

本书前身为 1999 年由高等教育出版社与德国施普林格 (Springer) 出版社联合出版的《工程数学》丛书之一, 2007 年编入高等教育出版社出版的《工程数学》丛书。该书自 1999 年出版以来, 已累计发行 8 万余册, 成为全国许多高等院校理工科专业的教学用书, 曾先后被北京大学、清华大学、华中科技大学、西北工业大学等高校采用。2012 年, 该书入选第一批 "十二五" 普通高等教育本科国家级规划教材。为适应国家高等教育改革的要求, 本着与时俱进的原则, 本次再版对第一版教材进行了全面订正和修改。

全书订正和修改主要内容如下:

1. 在基本保留第一版知识架构的前提下, 勘正了原书的错误;

2. 在语言叙述和知识的逻辑关系方面作了较大改善;

3. 各章典型算法均添加了其 MATLAB 程序代码, 且匹配了相应的例子;

4. 调整了部分习题, 并在每章配备了实验题。

新版《计算方法》教材更加强调理论分析、算法实现、数值实验三者一体, 借此加深学生对各类算法及其理论的理解, 并激励其学习兴趣。此外, 本教材编者所主持的 "计算方法" 课程于 2010 年获批 "国家精品课程", 2013 年获批 "国家级精品资源共享课", 并在 "爱课程" 网上线, 读者可登录网址: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_6179.html, 浏览与本教材内容配套的教学录像、演示文稿、教学课件、习题选讲、试卷、教学软件等教辅资料。

教材改革是一项长期而艰巨的任务，我们诚恳地盼望读者关注本书，对教材的不足之处提出宝贵意见。

张诚坚　何南忠　覃婷婷

2015 年 12 月 4 日

第一版前言

随着科学技术的高速发展, 大量复杂的科学计算问题呈现在人们面前, 要完成这些人自身所不能及的工作, 必须借助于计算机这一人类有史以来最伟大的科技发明, 而使计算机有效解决科学计算问题的关键技术是计算方法。鉴此, 数值计算方法是每一位科研人员和工程技术人员所必备的知识, 也是每一位理工科大学生必修的重要课程。本书正是为顺应这一知识需求而编写的。

数值计算方法包含十分丰富的内容, 但是作为一门基础课教材, 不可能也不必要面面俱到, 重要的是使读者通过一些典型、通用的数值计算方法掌握方法构造的基本思想及其实现技巧, 从而达到触类旁通的功效。在数值计算方法的基本概念与理论方面, 我们力求严谨, 使读者通读完全书后具备初步的算法分析能力。

全书共分六章, 其内容分别为绪论、非线性方程的数值解法、线性方程组的数值解法、插值方法、数值积分、常微分方程初值问题的数值解法。此外, 每章配备了一定量的习题, 以使读者通过练习, 进一步掌握教材内容。

在编写本书过程中, 我们得到了上海大学高健副教授及华中科技大学博士生王志勇、谷伟、李东方、陈浩、牛原玲等的大力帮助, 此外也得到了校内外许多同行的支持与鼓励, 编者对此深表感谢。

由于编者水平所限, 仓促付梓, 书中必有疏漏之处, 诚望读者指正。

张诚坚　何南忠

2007 年 7 月于武汉

目　录

第一章　绪　　论

科学技术发展到今天，计算机的应用已渗透到自然科学、社会科学、工程技术及日常生活等各个领域，其中，数值计算方法是计算机处理实际问题的一种关键手段，其与理论分析、科学实验一起成为当今探索现实世界的三大工具. 高效的计算方法与高性能计算机的研究成为同等重要. 从宏观天体运动学到微观分子细胞学，从工程系统到非工程系统，无一能离开数值计算方法. 数值计算这门学科的诞生，使科学发展产生了巨大飞跃，它使各科学领域从定性分析阶段走向定量分析阶段，从粗糙走向精密. 由此可见，数值计算方法是现代每一位从事科学研究与应用的人不可缺少的知识. 本章将主要介绍数值算法的预备知识及其基本思想，为相继章节的学习奠定一个良好的基础.

§1.1　数值算法概论

当利用计算机求解一个实际问题时，其主要步骤如下:

$$\boxed{\text{实际问题}} \Rightarrow \boxed{\text{建立数学模型}} \Rightarrow \boxed{\text{构造数值算法}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\text{编程上机}} \Rightarrow \boxed{\text{获取近似结果}}$$

由此可知，**数值算法**是利用计算机求解数学问题近似解的方法，其中所获近似解也称为原问题的**数值解**或**逼近解**. 当构造一个数值算法时，它既要面向数学模型，使算法能尽可能地仿真原问题；同时，它也要面向计算机及其程序设计，要求算法

具有递推性、简洁性及必要的准确性,使其能借助于计算机最终在尽可能少的时间内获得符合原问题精度要求的数值解.

例 1.1 计算积分

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, 30.$$

解 通过直接计算可产生递推关系

$$I_n = -5I_{n-1} + \frac{1}{n}, \quad I_0 = \ln\frac{6}{5} \approx 1.823\,2\mathrm{e}-001.^{①} \tag{1.1}$$

由经典微积分知识可推得 I_n 具有如下性质:

(1) $I_n > 0$ 且单调递减;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$;

(3) $\dfrac{1}{6(n+1)} < I_n < \dfrac{1}{5(n+1)}$ $(n \geqslant 0)$.

下面我们用两种算法计算 I_n:

算法 A: 按公式 (1.1) 自 $n = 1$ 计算到 $n = 30$, 其产生的计算结果见表 1.1.

表 1.1 自 $n = 1$ 计算到 $n = 30$ 的 I_n 值

n	1	2	3	4	5
I_n	8.839 2e–002	5.803 9e–002	4.313 9e–002	3.430 6e–002	2.846 8e–002
n	6	7	8	9	10
I_n	2.432 5e–002	2.123 3e–002	1.883 7e–002	1.692 6e–002	1.536 8e–002
n	11	12	13	14	15
I_n	1.407 1e–002	1.297 7e–002	1.204 0e–002	1.122 9e–002	1.052 2e–002
n	16	17	18	19	20
I_n	9.890 3e–003	9.371 9e–003	8.696 0e–003	9.151 5e–003	4.242 6e–003
n	21	22	23	24	25
I_n	2.640 6e–002	–8.657 5e–002	4.763 5e–001	–2.340 1e+000	1.174 0e+001
n	26	27	28	29	30
I_n	–5.866 4e+001	2.933 6e+002	–1.466 7e+003	7.333 8e+003	–3.666 9e+004

① 此为计算机运算输出结果,表示 1.8232×10^{-1}. 全书类同.

由表 1.1 可见, 该算法产生的数值解自 $n=18$ 开始并未呈现单调递减性质且出现负值和大于 1 的数, 这显然与 I_n 的固有性质相矛盾, 因此本算法所得数值解不符合原问题要求. 究其原因, 我们在构造算法时未能充分考虑原积分模型的性态, 即由公式 (1.1), 其计算从 I_{n-1} 到 I_n 每向前推进一步, 其计算值的舍入误差便增长 5 倍, 误差由此积累传播导致最终数值解与原问题真解相悖的结果. 为克服这一缺陷, 我们改进算法 A 为

算法 B: 第 1 步, 由性质 (3) 取

$$I_{30} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6\times 31}+\frac{1}{5\times 31}\right)=5.914\,0\text{e}-003,$$

第 2 步, 用递推公式

$$I_{n-1}=-\frac{I_n}{5}+\frac{1}{5n}, \tag{1.2}$$

自 $n=30$ 计算到 $n=1$. 由于该算法每向后推进一步, 其舍入误差便减少 5 倍, 因此获得符合原积分模型性态的计算结果, 其可参见表 1.2.

表 1.2 自 $n=29$ 计算到 $n=0$ 的 I_n 值

n	29	28	27	26	25
I_n	5.483 9e–003	5.799 8e–003	5.982 9e–003	6.210 8e–003	6.450 1e–003
n	24	23	22	21	20
I_n	6.710 0e–003	6.991 3e–003	7.297 4e–003	7.631 4e–003	7.997 5e–003
n	19	18	17	16	15
I_n	8.400 5e–003	8.846 2e–003	9.341 9e–003	9.896 3e–003	1.052 1e–002
n	14	13	12	11	10
I_n	1.122 9e–002	1.204 0e–002	1.297 7e–002	1.407 1e–002	1.536 8e–002
n	9	8	7	6	5
I_n	1.692 6e–002	1.883 7e–002	2.123 3e–002	2.432 5e–002	2.846 8e–002
n	4	3	2	1	0
I_n	3.430 6e–002	4.313 9e–002	5.803 9e–002	8.839 2e–002	1.823 2e–001

■

对上述例子, 我们采用的是由原模型精确解的递推关系来实现计算机求解的, 这种求解方法称为**直接法**.

在大多数情况下, 我们只能获得原模型解的近似递推关系, 即将连续系统离散化, 然后求得原模型的近似解, 这种求解方法称为**数值方法**. 作为数值方法的实例, 我们考察结构力学、热传导问题中经常出现的两点边值问题:

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), & x\in(a,b), \\ y(a)=\alpha, & y(b)=\beta \end{cases} \tag{1.3}$$

的数值解法, 其中 $p(x)$, $q(x)$ 及 $f(x)$ 是 (a,b) 上的给定函数, α, β 为已知常数, 且设问题 (1.3) 在 $[a,b]$ 上恒有唯一解 $y(x)$. 其解法步骤如下:

(1) 将区间 $[a,b]$ 剖分成 N 等份: 其等分节点为 $x_i=a+ih$ $(i=0,1,2,\cdots,N)$, 步长 $h=\dfrac{b-a}{N}$;

(2) 将问题 (1.3) 离散化: 由 Taylor (泰勒) 展开式可得

$$\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}=y'(x_i)+\mathcal{O}(h^2),$$
$$\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}=y''(x_i)+\mathcal{O}(h^2).$$

略去上两式中的余项 $\mathcal{O}(h^2)$, 并取 $y_i\approx y(x_i)$, 则可分别获得下列一阶和二阶中心差商逼近公式:

$$y'(x_i)\approx\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h},\quad y''(x_i)\approx\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}. \tag{1.4}$$

将 (1.4) 代入 (1.3) 中得逼近格式

$$\begin{aligned}&\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i\ (i=1,2,\cdots,N-1);\\ &y_0=\alpha,\quad y_N=\beta.\end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i)$ 及 $f_i = f(x_i)$. (1.5) 实质上是含 $N-1$ 个未知数 $y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}$ 的线性方程组, 解此线性方程组即得数值解 $y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}$.

§1.2 向量范数

为探讨各种高维问题的算法理论, 本节引入向量范数的概念及其相关性质.

定义 1.1 称 n 维实空间 $\mathbf{R}^n$ 上的一个非负函数 $\|\cdot\|$ 为范数, 若其满足

$$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \text{ 当且仅当 } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \ \|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|, \ \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|,$$

其中 $\alpha \in \mathbf{R}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$.

下面我们将主要涉及 $l_p \ (p = 1, 2, \cdots)$ 范数:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n.$$

特别, l_∞ 范数为

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \triangleq \lim_{p\to\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

对于 $\mathbf{R}^n$ 上的任意两种范数有如下等价性定理:

定理 1.1 若 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的任意两种范数, 则存在常数 $C_2 \geqslant C_1 > 0$ 使得

$$C_1\|\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|' \leqslant C_2\|\boldsymbol{x}\|, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

在范数概念下, 我们即可讨论向量序列的收敛性问题.

定义 1.2 设有向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)} \in \mathbf{R}^n | \boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}\}$, 若

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_i^{(k)} = \boldsymbol{x}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则称序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

定理 1.2 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x}$ 的充要条件是存在范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\| = 0$.

证明 一方面, 若序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x}$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\|_\infty = 0$. 另一方面, 若存在范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\| = 0$, 则由定理 1.1, 存在常数 $C_2 \geqslant C_1 > 0$, 使得

$$C_1 \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant C_2 \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\|.$$

因此, 由夹逼定理知 $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\|_\infty = 0$, 故 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}$. ■

设有映射 $\Phi: D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. 在相继章节, 我们常常需要判断非线性方程

$$\boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in D \subset \mathbf{R}^n \tag{1.6}$$

的解的存在唯一性. 为此, 作为向量范数的一个应用, 我们引入不动点原理. 方程 (1.6) 的解也称为**映射 Φ 的不动点**, 其存在性往往可通过其压缩性保障.

定义 1.3 设存在向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的范数 $\|\cdot\|$ 及常数 $q \in [0, 1)$, 使得映射 $\Phi: D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 在集 $D_0 \subset D$ 上满足

$$\|\Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{y})\| \leqslant q \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D_0, \tag{1.7}$$

则称 Φ 为集 $D_0 \subset D$ 上的具有压缩系数 q 的压缩映射.

定理 1.3 (Banach (巴拿赫) 压缩映射原理) 设 $\Phi: D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是闭集 $D_0 \subset D$ 上的压缩映射, 且 $\Phi(D_0) \subset D_0$, 则 Φ 于 D_0 上有唯一不动点 $\boldsymbol{x}^*$.

证明 构造序列

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \Phi(\boldsymbol{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots; \quad x_0 \in D_0. \tag{1.8}$$

由已知条件 $\Phi(D_0) \subset D_0$ 可知: 序列 $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset D_0$. 由于 Φ 是闭集 D_0 上的压缩映射, 则对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意向量范数 $\|\cdot\|$, 存在常数 $q \in [0, 1)$ 使得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k\| &= \|\Phi(\boldsymbol{x}_k) - \Phi(\boldsymbol{x}_{k-1})\| \leqslant q\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\| \\ &= q\|\Phi(\boldsymbol{x}_{k-1}) - \Phi(\boldsymbol{x}_{k-2})\| \leqslant q^2\|\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}_{k-2}\| \\ &\leqslant \cdots \leqslant q^k\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|.\end{aligned}$$

因此, 对任意正整数 p 有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\| &\leqslant \sum_{i=1}^{p} \|\boldsymbol{x}_{k+i} - \boldsymbol{x}_{k+i-1}\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} q^{k+i-1}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\| \\ &\leqslant \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|. \end{aligned} \tag{1.9}$$

由此及 $q \in [0, 1)$ 可知序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是一个 Cauchy (柯西) 序列. 又由 $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset D_0$ 及 D_0 为闭集可知: 存在 $\boldsymbol{x}^* \in D_0$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}^*$. 既然 Φ 是压缩映射, 因此 Φ 也是连续映射, 从而

$$\boldsymbol{x}^* = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \lim_{k\to\infty} \Phi(\boldsymbol{x}_{k-1}) = \Phi(\boldsymbol{x}^*),$$

即 $\boldsymbol{x}^*$ 为 Φ 在 D_0 上的不动点. 若 Φ 在 D_0 上存在其它不动点 y^*, 则由压缩性有

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}^*\| = \|\Phi(\boldsymbol{x}^*) - \Phi(\boldsymbol{y}^*)\| \leqslant q\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}^*\| < \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}^*\|.$$

矛盾! 因此, 必有 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^*$. 故定理获证. ■

该证明导出了压缩映射 Φ 的不动点的一个逼近序列 $\{\boldsymbol{x}_k | \boldsymbol{x}_k = \Phi(\boldsymbol{x}_{k-1}), k = 1, 2, \cdots\}$, 其误差估计可由下述定理给出.

定理 1.4 设 $\Phi: D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是闭集 $D_0 \subset D$ 上具有压缩系数 $q \in [0,1)$ 的压缩映射, 且 $\Phi(D_0) \subset D_0$, 则迭代序列 (1.8) 收敛于 Φ 在 D_0 上的不动点 $\boldsymbol{x}^*$, 且有先验误差估计

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_k\| \leqslant \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{1.10}$$

及后验误差估计

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_k\| \leqslant \frac{q}{1-q}\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\|, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{1.11}$$

证明 由定理 1.3 的证明过程可知迭代序列 (1.8) 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}^*$, 且在 (1.9) 中令 $p \to +\infty$ 即得先验误差估计 (1.10). 以下证明后验误差估计式. 事实上, 对于任意正整数 p, 我们有

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\| &\leqslant \sum_{i=1}^{p} \|\boldsymbol{x}_{k+i} - \boldsymbol{x}_{k+i-1}\| \\
&= \sum_{i=1}^{p} \|\Phi(\boldsymbol{x}_{k+i-1}) - \Phi(\boldsymbol{x}_{k+i-2})\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{p} q\|\boldsymbol{x}_{k+i-1} - \boldsymbol{x}_{k+i-2}\| \\
&\leqslant \cdots \leqslant \sum_{i=1}^{p} q^i \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\| \\
&\leqslant \frac{q}{1-q}\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\|.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

在上式中令 $p \to +\infty$ 即得后验误差估计 (1.11). ■

§1.3 矩阵范数

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $\|\cdot\|$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的某范数, 则称

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \ (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n)$$