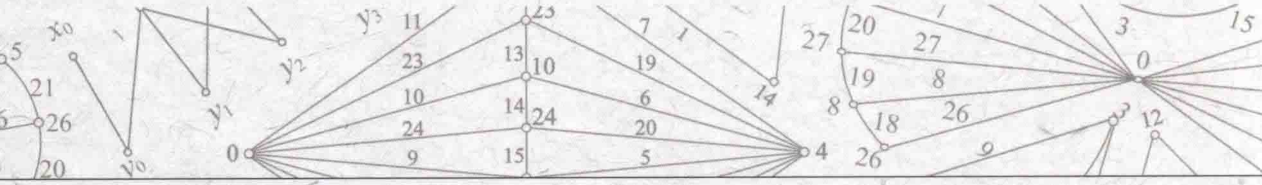
GRACEFUL GRAPH

GRAPH



优美图

王涛 | 著

清华大学出版社

优 美 图

王 涛 著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书共分 7 章，内容包括图和优美图的基本概念、树的优美性、与圈有关的优美图、与轮有关的优美图、与扇有关的优美图、与二部图有关的优美图和其他优美图。

本书深入浅出，清晰易懂，并配有大量图例，可以作为高等院校研究生和数学专业高年级图论方向课程的教材，也可以作为科技工作者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

优美图／王涛　著. —北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-45078-8

Ⅰ. ①优…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①图论—研究　Ⅳ. ①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 222666 号

责任编辑：王　定　程　琪
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：牛艳敏
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：**100084
　　社 总 机：010－62770175　　**邮　　购：**010－62786544
　　投稿与读者服务：010－62776969，c－service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010－62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张：**10.25　　**字　　数：**242 千字
版　　次：2016 年 10 月第 1 版　　**印　　次：**2016 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1～1000
定　　价：78.00 元

产品编号：070456－01

前　言

1964 年 Kotzig 和 Ringel 提出了优美树猜想：每棵树都有一个优美标号。优美树猜想蕴含了 Ringel 猜想：如果 T 是 m 条边的树，则 K_{2m+1} 可以分解成 T 的 $2m+1$ 个复制图。整体来说，优美树猜想证明的进展较为缓慢，至今优美树猜想还是一个开放的问题，对树的优美性研究具有很好的理论意义。优美标号作为数学模型在物流运输、编码理论、X－射线密码技术、雷达、天文学、电路设计、因特网地址通信和数据基础管理等方面有广泛应用，优美图的研究同时具有较好的应用前景。

作为理论的推广，人们逐渐开始研究除树以外其他图类的优美性，每年国内外都发表大量关于优美图的论文。遗憾的是关于优美图的专著在国内却是寥寥无几，马克杰老师在 1991 年出版的《优美图》一书堪称经典，现在却很难找到。基于此，编者参考国内外的优秀著作，结合自己在优美图方面的教学和科学研究成果编写了该书。

本书共分 7 章，介绍了 k－优美图、k－强优美图的概念和优美树猜想，证明了与圈、轮、扇、二部图有关的很多图类都是优美图。本书的主要特色是：在研究优美图的同时，给出了许多图的 k－优美标号，并对非连通图的优美性进行研究。为了便于读者阅读，书中还给出了近 100 个图例。在内容安排上，各章之间既相互联系，又具备各自的系统性和科学性，这给读者的学习提供了极大方便。

本书由华北科技学院王涛编著，在本书的编写过程中魏丽侠教授给出了很多有益建议。参与本书编写的还有王清、魏静、苗文静老师，他们在录入、绘图、校对等方面做了很多工作。本书的出版得到了华北科技学院应用数学重点学科项目（HKXJZD201402）的大力资助，在此一致表示感谢！

限于编者水平有限及编写时间仓促，书中难免有错误和疏漏之处，衷心希望同行专家和读者批评指正。

编　者

2016 年 7 月

目　录

第 1 章

基本概念

1.1 图的基本概念

定义 1.1.1 设 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ 是一个非空有限集合,$E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_q\}$ 是与 $V(G)$ 不相交的有限集合. 一个图(graph) G 是指一个有序三元组 $(V(G),E(G),\psi_G)$,其中 ψ_G 是关联函数(incidence function),它使 $E(G)$ 中每一元素对应于 $V(G)$ 中的无序元素对.

通常我们将图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 简记为 $G=(V(G),E(G))$ 或 $G=(V,E)$ 或 G.

图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 中,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别称为 G 的顶点集(vertex - set)和边集(edge - set). $V(G)$ 中的元素称为 G 的顶点(vertex)(或点(point)),$E(G)$ 中的元素称为 G 的边(edge). $p(G)=|V(G)|$ 和 $q(G)=|E(G)|$ 分别称为 G 的顶点数或阶(order)和边数(size).

注意,图的两条边可能会有一个交叉点,但交叉点不一定都是顶点.

一个图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 可以用平面上一个图形表示,用平面上的小圆圈表示 G 的顶点,用点与点之间的连线表示 G 中的边. 图的图形表示使得抽象定义的图具有直观性,有助于我们进行思考和理解图的性质. 明显地,同一个图可以有许多形状不同的图形表示方式.

例 1.1.1 设图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$,其中 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$,$\psi_G(e_1)=v_3v_3$,$\psi_G(e_2)=v_3v_2$,$\psi_G(e_3)=v_2v_1$,$\psi_G(e_4)=v_2v_1$,$\psi_G(e_5)=v_1v_4$,$\psi_G(e_6)=v_4v_3$,$\psi_G(e_7)=v_4v_2$. 这个图 G 是具有 4 个顶点,7 条边的图. 其图形如图 1.1 所示.

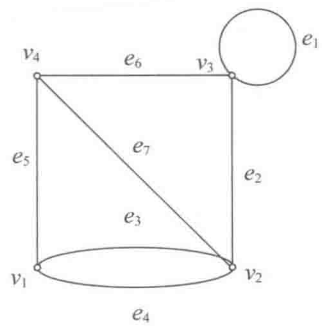


图 1.1

在一个图 G 中,如果 $\psi_G(e)=uv$,则称 u 和 v 是 e 的端点(end-point)，也称 u 和 v 相邻(adjacent)，同时也称 u(或 v)与 e 关联(incident). 与同一个顶点关联的若干条边称为是相邻的(adjacent). 两个端点重合为一个顶点的边称为环(loop)，如图 1.1 的边 $\psi_G(e_1)=v_3v_3$ 是 G 的一个环. 关联于同一对顶点的两条或两条以上的边称为平行边(parallel edges)或者多重边(multi - edges)，如图 1.1 中的边 $\psi_G(e_3)=v_2v_1$ 和 $\psi_G(e_4)=v_2v_1$ 是 G 的平行边.

一个图 G 如果没有环和平行边，则称该图为简单图(simple graph).

如果一个图 G 的顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 都是有限集，则称该图为有限图(finite graph)，否则称为无限图(infinite graph). 本书仅讨论有限图. 只由一个顶点构成的图称为平凡图(trivial graph)，其他所有图称为非平凡图. 显然，至少有一个顶点才能称为图. 所以，我们总要求一个图的顶点集合是非空的. 边数为零的图称为空图(empty graph).

定义 1.1.2 图 $G=(V,E)$ 中，与顶点 v 相关联的边数(每个环计算 2 次)，称为顶点 v 的度(degree)，记为 $d_G(v)$(或 $d(v)$). 分别用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 表示 G 中顶点的最小度(minimum degree)和最大度(maximum degree). 度为零的顶点称为孤立顶点(isolated point).

例如图 1.1 中，$d_G(v_1)=3$，$d_G(v_2)=4$，$d_G(v_3)=4$，$d_G(v_4)=3$，$\delta(G)=3$，$\Delta(G)=4$.

设 S 是 $V(G)$ 的一个非空子集，v 是 G 的任一顶点，称 $N_S(v)=\{u\mid u\in S, uv\in E(G)\}$ 为 v 在 S 中的邻集(neighbour set). $N_S(v)$ 中顶点称为 S 的邻点(neighbour vertex). 特别若 $S=V(G)$，则常常简记 $N_G(v)$ 为 $N(v)$. 明显地，当 G 是简单图时，$d_G(v)=|N(v)|$.

从顶点度的定义不难发现，每条边有两个端点，从而每条边对 $\sum\limits_{v\in V} d_G(v)$ 的贡献都是 2，因而可得以下结论.

定理 1.1.1 对每一个图 $G=(V,E)$，均有 $\sum\limits_{v\in V} d_G(v) = 2q(G)$.

此定理常常称为握手定理.

为了方便起见，我们把度为奇数的顶点称为奇点，度为偶数的顶点称为偶点.

推论 1.1.1 在任何图 $G=(V,E)$ 中，奇点的个数为偶数.

证明 我们把图 G 的顶点集 V 划分为两部分 V_1 和 V_2，其中 V_1 是 G 中所有的奇点，V_2 是 G 中所有的偶点，则 $V=V_1\cup V_2$，$V_1\cap V_2=\varnothing$. 由定理 1.1.1 得：

$$2q(G) = \sum_{v\in V} d_G(v) = \sum_{v\in V_1} d_G(v) + \sum_{v\in V_2} d_G(v).$$

$\sum\limits_{v\in V_2} d_G(v)$ 是偶数，所以 $\sum\limits_{v\in V_1} d_G(v)$ 也是一个偶数，即推得 $|V_1|$ 是偶数.

我们所讨论的图与图的几何形状没有关系，即与顶点的位置(但两个不同的顶点不能重

合)及连接它们的边的曲、直、长、短都没有关系(但一条边除了两个端点外,不再通过其他顶点).我们所关注的只是各顶点之间是否有边或有几条边连接.例如,图1.2中的两个图就不存在本质差别,我们把这种不存在本质差别的两个图称为是同构的.

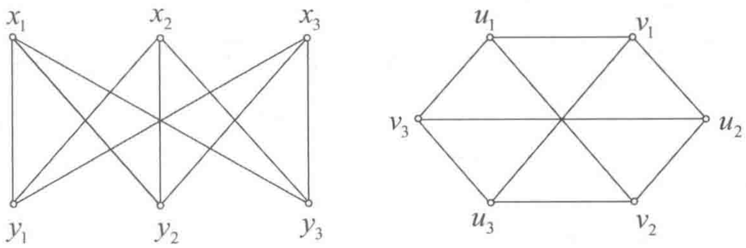


图 1.2

定义 1.1.3 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 与 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个图,若存在一一对应 $\varphi_1:V_1\to V_2$ 及一一对应 $\varphi_2:E_1\to E_2$,使对每条边 $e=uv\in E_1$ 当且仅当 $\varphi_1(u)\varphi_1(v)\in E_2$,则称 G_1 和 G_2 是同构的(isomorphic),记为 $G_1\cong G_2$.

对于两个简单图,其同构定义可简化为以下定义.

定义 1.1.4 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 与 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个简单图,若存在一一对应 $\varphi:V_1\to V_2$,使对 G_1 中任意两个顶点 u 和 v,$uv\in E_1$ 当且仅当 $\varphi(u)\varphi(v)\in E_2$,则称 G_1 和 G_2 是同构的,记为 $G_1\cong G_2$.

对于两个同构的图,易见它们有相同的结构,差异只是顶点和边的名称不同,或两个图的形状不同,由于我们主要关注的是图的结构性质,所以在画图时常常省略顶点和边的标号.一个无标号图就认为是同构图的等价类的代表.

下面介绍一些特殊的图类,在今后的讨论当中将经常遇到它们.

任何不同两顶点之间都有恰有一条边相连的无向图称为完全图(complete graph).具有 n 个顶点的完全图在同构意义是唯一的,记为 K_n.

简单图 G 的补图(complementary digraph)$\overline{G}$是指与 G 有相同的顶点集的简单图,并且边 $e\in E(\overline{G})$ 当且仅当 $e\notin E(G)$.

完全图 K_n 的补图$\overline{K_n}$是一个仅含 n 个顶点不含边的图,称为空图(empty graph).

独立集(independent set)是图中两两互不相邻的顶点组成的集合.

若 $V(G)$ 是 m 个互不相交独立集的并集,则称 G 为 m 部图(m - partite graph).我们通常用 $G=(X,Y;E)$ 表示二部图(bipartite graph),有时也称为二分图.

设 $G=(V_1,V_2,\cdots,V_m)$ 是 m 部图.并且对任意 $u\in V_i$ 和 $v\in V_j(1\leqslant i\neq j\leqslant m)$,均有 $uv\in E$,则

称$(V_1,V_2,\cdots,V_m;E)$是完全 m 部图(complete m - partite graph),记为 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$,这里 $n_i=|V_i|,(i=1,2,\cdots,m)$.

如果一个图中每个顶点的度是某一固定整数 k,则称该图是 k 正则图(k - regular).

设 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 是 G 的两个子图,若 $V_1\cap V_2=\varnothing$,则称 G_1 与 G_2 是点不交的(vertex - disjiont);若 $E_1\cap E_2=\varnothing$,则称 G_1 与 G_2 是边不交的(edge - disjiont).

对于两个图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$,定义 $G_1\cup G_2=(V_1\cup V_2,E_1\cup E_2)$,称为 G_1 和 G_2 的并图(union graph).

设 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 是 G 的两个点不交的图,定义 $G_1\vee G_2=(V_1\cup V_2,E_1\cup E_2\cup E_3)$,这里 $E_3=\{uv|u\in V_1,v\in V_2\}$,称 $G_1\vee G_2$ 为 G_1 和 G_2 的联图(join graph).

G_1 和 G_2 的联图 $G_1\vee G_2$ 有以下性质:

(1) $|V(G_1\vee G_2)|=|V_1|+|V_2|$;

(2) $|E(G_1\vee G_2)|=|E_1|+|E_2|+|V_1||V_2|$.

例 1.1.2 图 1.3 给出了 G_1 和 G_2 的联图 $G_1\vee G_2$.

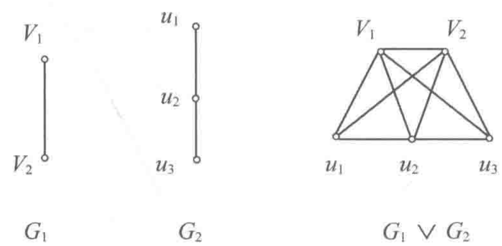


图 1.3

设 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个点不交的简单图. G_1 和 G_2 的笛卡尔乘积(Cartesian product) $G_1\times G_2$ 是一个简单图,其中 $V(G_1\times G_2)=V(G_1)\times V(G_2)$,并且对 $x_1,y_1\in V(G_1),x_2,y_2\in V(G_2),((x_1,x_2),(y_1,y_2))\in E(G_1\times G_2)\Leftrightarrow$或者 $x_1=y_1$ 且$(x_2,y_2)\in E(G_2)$,或者 $x_2=y_2$ 且$(x_1,y_1)\in E(G_1)$.

G_1 和 G_2的笛卡尔乘积图 $G_1\times G_2$ 有以下性质:

(1) $|V(G_1\times G_2)|=|V_1||V_2|$;

(2) $|E(G_1\times G_2)|=|E_1||V_2|+|E_2||V_1|$.

例 1.1.3 图 1.4 给出了 G_1 和 G_2 的笛卡尔乘积图 $G_1\times G_2$.

定义 1.1.5 一个图 $G=(V,E)$的一个途径(或称为通路)(way)是一个顶点和边交替序列 $W=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{k-1}e_kv_k$,这里 $v_i(0\leqslant i\leqslant k)$是 G 的顶点,$e_i(1\leqslant i\leqslant k)$是 G 的边,满足 e_i 的两

个端点就是 v_{i-1} 和 $v_i(0\leqslant i\leqslant k)$，则称 W 是 G 的一条从 v_0 到 v_k 的途径，简称为 (v_0-v_k) 途径. $v_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 称为 W 的内部顶点；边数 k 称为途径 W 的长度(length)；v_0,v_k 分别称为途径 W 的起点和终点，或统称为 W 的端点.

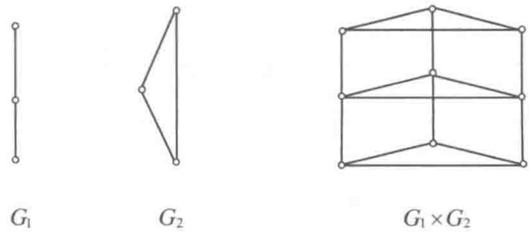


图 1.4

注意在途径的定义中，没有要求一条途径内的边互不相同. 如果途径的边互不重复，则称这条途径为迹(trail)或链(chain). 如果一条途径中的顶点也互不相同，则称这条途径为路(path)(也称为基本通路或初级通路或道路).

明显地，如果 W 是一条 (v_0-v_k) 路，则 W 也是一条 (v_0-v_k) 迹和 (v_0-v_k) 途径. 反之，若 G 中存在一条 (v_0-v_k) 途径 W，则在 G 中必然也存在一条 (v_0-v_k) 路 P，且 $E(P)\subseteq E(W)$. 若 P 是一条路，x 和 y 是 P 中两个顶点，用 $P(x,y)$ 表示沿 P 从 x 到 y 的这一段路.

当我们所讨论的图是简单图(没有环及重边的图)时，G 的一条途径 $W=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{k-1}e_kv_k$ 可只用顶点表示为 $W=v_0v_1\cdots v_k$. 迹与路也同样可以这样简写.

对于图 G 中两个给定的顶点 u 和 v，若 G 中存在 $(u-v)$ 路，则必定存在一条长度最短的 $(u-v)$ 路 P_0，称 P_0 是一条 $(u-v)$ 最短路(shortest path)，P_0 的长度称为顶点 u 和 v 的距离(distance)，记为 $d_G(u,v)$(或 $d(u,v)$). 图中具有最大长度的路称为最长路(longest path). 长度为 $n-1$ 的路通常记为 P_n.

定义 1.1.6 如果一条途径的起点与终点相同，就称这条途径为闭(closed)途径.

同样可定义闭迹. 我们通常把起点及内部顶点互不相同的闭迹称为回路(或圈)(cycle).

明显地，在简单图中，任一回路的长度至少为 3，通常用 C_n 来表示某一长度为 n 的回路. C_3 称为三角形. 如果 n 为奇数，则 C_n 称为奇圈(odd cycle)；如果 n 为偶数，则 C_n 称为偶圈(even cycle). 长为 n 的圈称为 n 圈.

把长度为奇(偶)数的回路称为奇(偶)回路. 根据奇回路的存在性可以判别给定的图是否为二分图.

定理 1.1.2 非平凡图 G 是二分图，当且仅当 G 中不含有长度为奇数的回路.

证明 (1) 必要性. 设 G 是一个二分图，G 的二分划为 X 和 Y，则 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 为空图. 设

$C_1 = v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 是 G 中长度为 k 的一个回路,下面证明 k 为偶数.

不妨设 $v_1 \in X$,由于 v_2 与 v_1 相邻,故 $v_2 \in Y$;同样因 $v_2 \in Y$,v_3 与 v_2 相邻,有 $v_3 \in X$. 一般来说 $v_1, v_3, v_5 \cdots \in X$,$v_2, v_4, v_6 \cdots \in Y$. 又因为 $v_1 \in X$,$v_1 v_k \in E(G)$,所以 $v_k \in Y$,即得 k 为偶数.

(2) 充分性. 不妨设 G 中每一对顶点之间有路连接(否则只要考虑 G 的每一对顶点之间有路连接的极大子图).

任取 G 的一个顶点 u,由 G 的假设,对 G 的每一个顶点 v 在 G 中存在 $(u-v)$ 路. 现利用 u 对 G 的顶点进行分类. 设:

$$X = \{v \mid v \in V(G), G \text{ 中存在一条长度为偶数的}(u-v)\text{路}\},$$

$$Y = \{v \mid v \in V(G), G \text{ 中存在一条长度为奇数的}(u-v)\text{路}\}.$$

显然 $u \in X$. 由于 G 中不存在长度为奇数的回路,所以对任意一个点 v,G 中所有从 u 到 v 的路的长度都有相同的奇偶性,因而 $X \cap Y = \varnothing$.

由 G 的假设,$X \cup Y = V(G)$.

现对 G 的每一条边 $e = u_1 u_2$,若 u_1, u_2 都在 X 上,则存在两条路 P_1 与 P_2,分别连接 u 与 u_1 和 u 与 u_2,且 P_1, P_2 的长度均为偶数,闭途径 $P_1 \cup P_2 \cup \{e\}$ 的长度为奇数,则不难看出,G 中有一条长度为奇数的回路,矛盾.

同样 u_1 与 u_2 不能同时含在 Y 中,故 e 的两个端点分别在 X 和 Y 中. 因此,G 是二分图. 证毕.

定义 1.1.7 经过 G 的每条边的迹称为 G 的 Euler 迹,如果这条迹是封闭的,则称这条闭迹为 G 的 Euler 环游,或欧拉回路.

我们把含有 Euler 环游的图称为 Euler 图. 研究 Euler 通路或 Euler 环游的问题称为 Euler 问题.

定理 1.1.3 一个非平凡连通图 G 是 Euler 图当且仅当图 G 顶点的度均为偶数.

证明 假设 G 是 Euler 图,C 是 G 的一条 Euler 环游,u 为 C 的起点(也是终点). 当沿 C 前进时,每通过一个顶点必是一进一出,而每一条边在 C 中恰好出现一次,所以对 G 中所有不同于 u 的顶点的度来说必是偶数. 而对于 u,由于 C 起始于 u 且终止于 u,所以 u 的度也是偶数,因此 G 无奇点.

反之,设 G 是连通且无奇点的图. 我们对图的边数进行归纳来证明 G 有 Euler 环游.

当 $q(G) = 1$ 时,G 只能是一个顶点,其边为环的图,G 显然是 Euler 图. 归纳假设在边数 $q(G) < m$ 时定理成立,现在证明 $q(G) = m$ 时定理的充分性也成立.

由于 G 连通且无奇点,故 G 中每个顶点的度至少是 2. 由已知条件 G 中存在回路 C,现将

G 中属于 C 的边全删去,再除去孤立顶点得图 G',显然 G'中每个顶点的度仍为偶数. 设 G'的连通分支为 $G'_1, G'_2, \cdots, G'_k$,则每个连通分支是无奇点的连通图. 由归纳假设 G'_i 是 Euler 图,令 C'_i 是 $G'_i(i=1,2,\cdots,k)$的 Euler 环游.

再回到原来这个图 G,由于 G 连通,所以每个 C'_i 与 C 至少有一个公共顶点,设其中之一为 $v_i(i=1,2,\cdots,k)$. 现在我们可以利用这些闭迹 $C'_1, C'_2, \cdots, C'_k$及这些顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 来构造 G 的一条 Euler 环游.

由 C 中的某个点 v_0 出发沿 C 前进,每行至一个顶点 v_i 就先走完 C'_i 再回到 v_i,继续沿 C 前进,这样可以走遍每条边一次且仅一次回到出发点 v_0,这样的行走轨迹就是 G 的一条 Euler 环游. 证毕.

定义 1.1.8 如果无向图 $G=(V,E)$的任何两个顶点 u 与 v,G 中存在一条$(u-v)$路,则称 G 是连通的(connected),否则称 G 为非连通的(disconnected).

以 $u \equiv v$ 表示顶点 u 和 v 是连通的,那么这种顶点间的连通关系是一个等价关系,即

(1) $u \equiv u$(反身性);

(2) $u \equiv v$,则 $v \equiv u$(对称性);

(3) $u \equiv v, v \equiv u$,则 $u \equiv w$(传递性).

这样,等价关系 $u \equiv v$ 便确定顶点集 V 的一个分类,把 V 分成非空子集 $V_1, V_2, \cdots, V_k$,便得当且仅当两个顶点 u 和 v 属于同一子集 V_i 时,它们才是连通的,子图 $G(V_1), G(V_2), \cdots, G(V_k)$为 G 的连通分支(connected component)或简称为分支(component). 分支的个数记为 $k(G)$. 显然等价类数目即连通分支的个数. 分支 $k(G)=1$ 的图称为连通图(connected graph),分支大于 1 的图称为分离图或非连通图(separated graph).

定义 1.1.9 连通不含回路的无向图称为无向树(undirected tree),简称为树(tree),常用 T 表示一棵树. 连通分支数大于等于 2,且每个连通分支都是树的非连通无向图称为森林(forest),平凡图称为平凡树(trivial tree).

树有许多性质,有些性质是树的必要条件,同时也是充分条件,因而树有许多等价的定义. 下面用定理给出这些性质.

定理 1.1.4 设 $G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$. 下面各命题是等价的:

(1) G 连通不含回路(即 G 为树);

(2) G 的每对顶点之间有唯一的一条路径;

(3) G 是连通的,且 $m=n-1$;

(4) G 中无回路,且 $m=n-1$;

(5) G 中无回路,但在 G 的任何两个不相邻的顶点之间增加一条新边,就得到唯一的一条回路;

(6) G 是连通的,但删去任何一条边后,所有图就不连通,即 G 的每条边均为桥.

证明 (1)⇒(2) 设 u,v 为 G 中任意两个顶点,由 G 的连通性,u,v 之间有通路,因而必有路径,若路径多于两条,必形成回路,这与 G 中无回路矛盾.

(2)⇒(3) 由于 G 中任意两个顶点之间均有路径,所以任意两个顶点均是连通的,故 G 是连通的.

下面用归纳法证明 $m=n-1$.

当 $n=1$ 时,G 为平凡树,$m=0$,结论显然成立.

设 $n\leqslant k$ 时结论成立,证明 $n=k+1$ 时结论也成立.设 $e=(u,v)$ 为 G 中一条边,由(2)知 u,v 之间除路径 uv 之外,无别的通路,因而 $G-e$ 有两个连通分支 G_1 和 G_2.设 G_1 和 G_2 顶点数和边数分别为 n_1,n_2 和 m_1,m_2,易知 $n_1\leqslant k$ 且 $n_2\leqslant k$.由归纳假设得 $m_1=n_1-1,m_2=n_2-1$,从而 $m=m_1+m_2+1=n_1-1+n_2-1+1=n-1$.

(3)⇒(4) 只要证明 G 中无回路.若 G 中有回路,从回路中删去任意一条边后,所得图仍然连通,若所得图中再有回路,再从回路中删去一条边,直到所得图中无回路为止.设共删去 $r(r\geqslant 1)$ 条边,所得图为 G',G'无回路,但仍是连通的,即 G'为树.由(1)⇒(2)⇒(3),可知 G'中 $m'=n'-1$,而 $n'=n,m'=m-r$,于是得 $m-r=n-1$,即 $m=n-1+r(r\geqslant 1)$,这与已知条件矛盾.

(4)⇒(5) 由条件(4)易证 G 是连通的.否则,设 G 有 $k(k\geqslant 2)$ 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_k$.设 G_i 有 n_i 个顶点,m_i 条边,$i=1,2,\cdots,k$,由(4)知,每个连通分支都是树,由(1)⇒(2)⇒(3),因而 $m_i=n_i-1,i=1,2,\cdots,k$,于是 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k=m_1+1+m_2+1+\cdots+m_k+1=m+k$,$(k\geqslant 2)$,这与已知 $m=n-1$ 矛盾,因而 G 是连通的,又是无回路的,即 G 是树.由(1)⇒(2),G 中任意两个不相邻的顶点 u,v 之间存在唯一的路径 p_{uv},p_{uv}再加新边(u,v)形成唯一的圈.

(5)⇒(6) 首先证明 G 是连通的.否则,设 G_1,G_2 是 G 的两个连通分支,v_1 为 G_1 中的一个顶点,v_2 为 G_2 中的一个顶点.在 G 中加边(v_1,v_2)不形成回路,这与已知条件矛盾.若 G 中存在边 $e=(u,v)$,$G-e$ 仍连通,说明在 $G-e$ 中存在 u 到 v 的通路,此通路与 e 构成 G 中回路,这与 G 中无回路矛盾.

(6)⇒(1) 只需证 G 中无回路.若 G 中含回路.C,删除 C 上任何一条边后,所得的图仍连通,与(6)中条件矛盾.

1.2 优美图的概念

优美图是图论中极有趣的重要内容,有着较好的应用价值和广阔的研究前景. 1972 年 S. W. Golomb[4]给出了优美图的定义,随后 k - 优美图、k - 强优美图等定义相继给出,优美标号问题在编码设计、通信网络、雷达脉冲等领域有重要应用.

定义 1.2.1 设图 $G=(V,E)$,对某一正整数 k,如果存在一个单射 $f:V\to\{0,1,\cdots,|E|+k-1\}$,使得对所有的边 $uv\in E$,由 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$ 导出一个双射 $f':E\to\{k,k+1,\cdots,|E|+k-1\}$,则称图 G 是 k - 优美图,f 是 G 的一个 k - 优美标号. 1 - 优美图也称优美图,1 - 优美标号也称优美标号.

有些文献中采用,设图 $G=(V,E)$,对任意正整数 k,如果存在一个单射 $f:V\to\{0,1,\cdots,|E|+k-1\}$,使得对所有的边 $uv\in E$,由 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$ 导出一个双射 $f':E\to\{k,k+1,\cdots,|E|+k-1\}$,称图 G 是 k - 优美图. 本书为了研究问题更加广泛,采用了定义 1.2.1,为了避免混淆,书中对所说 k - 优美图,都给出了 k 的取值范围,当没有给出取值范围时,我们认为是对任意正整数 k 都成立. 定义 1.2.2 关于 k - 强优美图同上.

例 1.2.1 连通图 1.5 都是优美图.

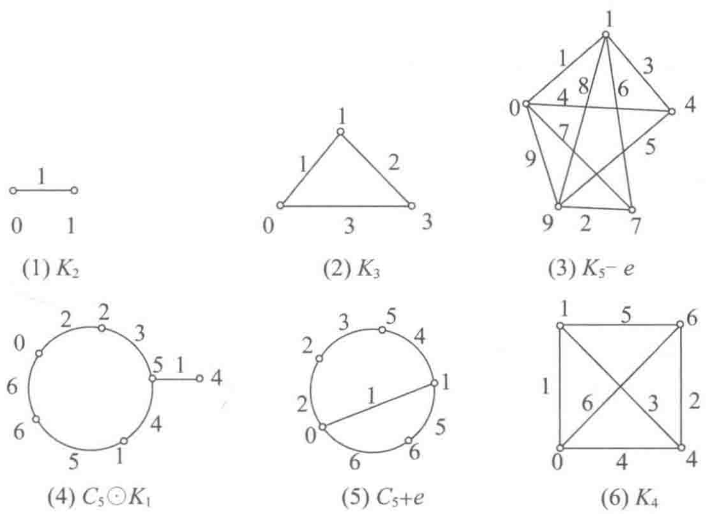


图 1.5

例 1.2.2 非连通图 1.6 $P_5\cup U_3$ 是优美图.

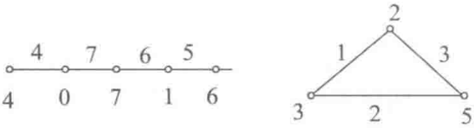


图 1.6

从图 1.5 我们知道完全图 K_2, K_3 和 K_4 都是优美图. 一般地,对于完全图 K_n, G. J. Simmons 给出以下结论.

定理 1.2.1 完全图 K_n 是优美图的充要条件为 $n \leqslant 4$.

例 1.2.3 图 1.7 都是 k - 优美图.

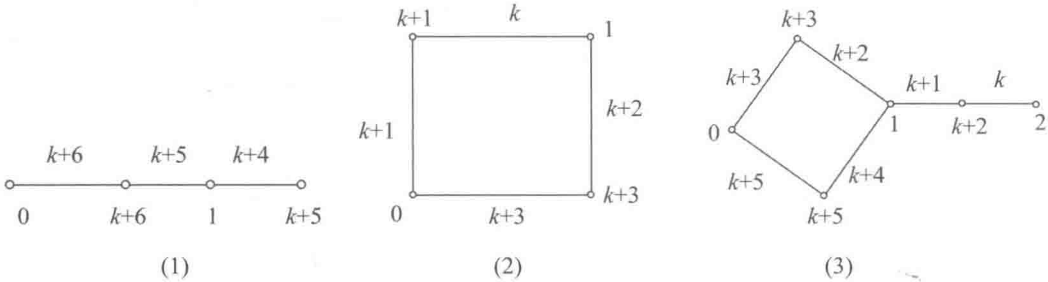


图 1.7

定义 1.2.2 设图 $G = (V, E)$,对某一正整数 k,如果存在一个单射 $f: V \to \{0, k, \cdots, |E| + k - 1\}$,使得对所有的边 $uv \in E$,由 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ 导出一个双射 $f': E \to \{k, k+1, \cdots, |E| + k - 1\}$,则称图 G 是 k - 强优美图,f 是 G 的一个 k - 强优美标号.

由定义 1.2.1 和定义 1.2.2 容易看出,k - 强优美图一定是 k - 优美图,其逆不真.

例 1.2.4 图 1.8(1)和(2)分别是 2 - 强优美图和 3 - 强优美图.

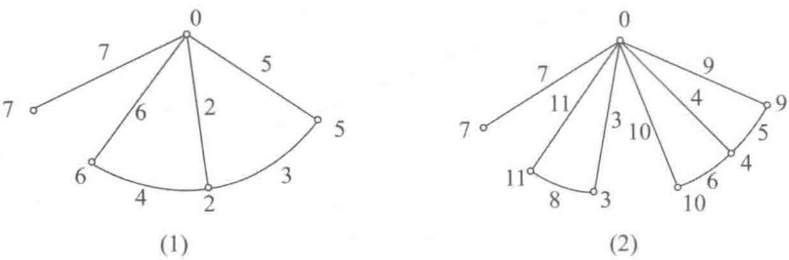


图 1.8

由定义 1.2.1 容易得到下列定理.

定理 1.2.2 若 p 个顶点,q 条边的图 $G = (V, E)$ 是优美图,则 $p \leqslant q + 1$.

定理 1.2.2 的逆否命题即以下推论.

推论 1.2.1 若 p 个顶点,q 条边的图满足 $p \geqslant q + 2$,则 G 不是优美图.

从推论 1.2.1 可以看出,不是所有的图都是优美图,在所有图的集合中,优美图只是较小

的一部分.

推论 1.2.2　森林不是优美图.

定理 1.2.3　任何一个 p 个顶点、q 条边的优美图 $G=(V,E)$，至少有两种不同的优美标号.

事实上，设 f 是 G 的一个优美标号，对任意的顶点 $v_i \in V(G)$，定义 g：

$$g(v_i)=q-f(v_i),(i=1,2,\cdots,p).$$

显然，g 是 G 的一个优美标号，且异于 f.

定理 1.2.4　设 f 是 p 个顶点的优美图 G 的优美标号，对于任意正整数 j，定义新的标号 g 为 $g(v_i)=f(v_i)+j,(i=1,2,\cdots,p)$，则在顶点标号 g 下，G 的诱导边标号不变.

证明　任意 $uv \in G$，在优美标号 f 之下，边 uv 的标号 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$，而在标号 g 之下，边 uv 的标号为：

$$\begin{aligned} g'(uv) &= |g(u)-g(v)| = |(f(u)+j)-(f(v)+j)| \\ &= |f(u)-f(v)| = f'(uv). \end{aligned}$$

由于边 uv 的任意性，所以，G 的诱导边标号不变.

参考文献

[1] 卜月华. 图论及其应[M]. 南京：东南大学出版社，2012.

[2] 魏丽侠，王涛. 图论及其应用[M]. 徐州：中国矿业大学出版社，2012.

[3] 马克杰. 优美图[M]. 北京：北京大学出版社，1991.

[4] Golomb S W. How to number a graph [M]//Graph theory and computing. New York: Academic Press, 1992: 23 – 37.