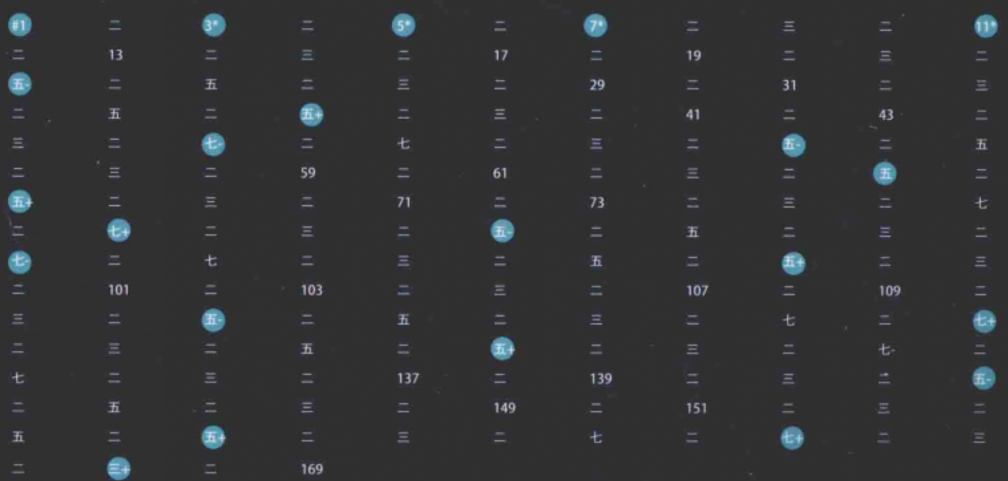
有用的工具

——简单筛选的理论与实践

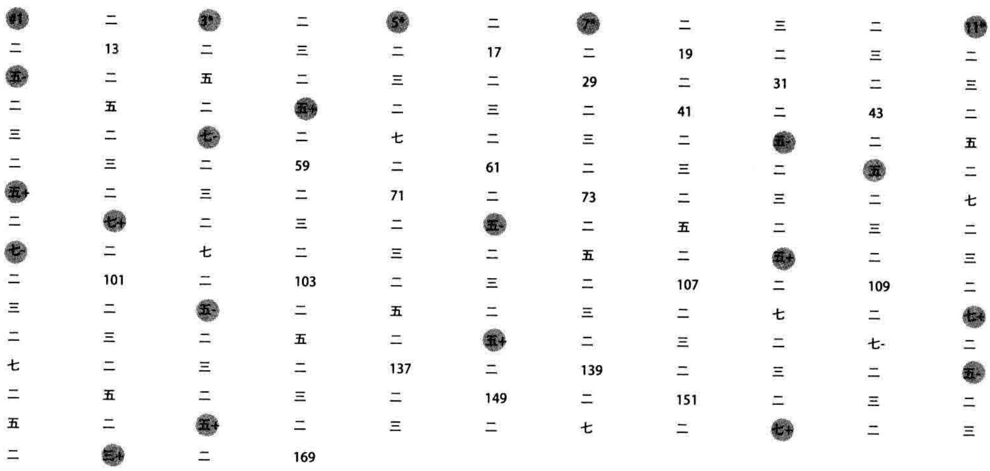


欧宗炽◎著

云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

有用的工具

——简单筛选的理论与实践



欧宗炽◎著

云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

有用的工具 : 简单筛选的理论与实践 / 欧宗炽著
. -- 昆明 : 云南大学出版社, 2016
ISBN 978-7-5482-2621-5

Ⅰ. ①有… Ⅱ. ①欧… Ⅲ. ①数理统计－筛选－研究
Ⅳ. ①O212

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第082289号

出 品 人： 吴 云
策　　划： 张丽华
责任编辑： 万 斌
装帧设计： 刘文娟

有用的工具
——简单筛选的理论与实践

欧宗炽 ◎ 著

出版发行： 云南大学出版社
印　　装： 云南大学出版社印刷厂
开　　本： 787mm × 1092mm 1/16
印　　张： 11
字　　数： 288千
版　　次： 2016年5月第1版
印　　次： 2016年5月第1次印刷
书　　号： ISBN 978-7-5482-2621-5
定　　价： 38.00元

社　　址： 昆明市一二一大街182号云南大学英华园内（邮编：650091）
邮　　编： 650091
电　　话：（0871）-65033244、65031071
网　　址： http://www. ynup. com
E-mail： market@ynup. com

本书若有质量问题，请与印厂调换。（联系电话：0871-65033247）

前　言

本书要讨论两个问题，就是其和等于偶数的 Goldbach – 素数对（简称偶数的 G – 素数对）的存在问题，以及孪生素数的存在问题。这两个问题都是有关素数的问题。要解决有关素数的问题，首先就得找到素数，对于这点，Eratosthenes – 筛选（简称 E – 筛选）早就解决了。而要解决偶数的 G – 素数对的存在问题，就要知道素数成为偶数的 G – 素数对的条件，从而将符合条件的素数留下来，或将不符合条件的素数筛去。作者把从素数里获得偶数的 G – 素数对的过程称为 Goldbach – 筛选（简称 G – 筛选）。同样对于从素数里获得孪生素数，作者也将其称为孪生筛选（简称 L – 筛选）。这样要从自然数里找出偶数的 G – 素数对的成员或孪生素数，只需对自然列进行 Eratosthenes – Goldbach 筛选（简称 E – G 筛选）或 Eratosthenes – 孪生筛选（简称 E – L 筛选）。实际上，不管 E – 筛选、G – 筛选、L – 筛选都是简单的筛选。显然，不论是要解决其和等于偶数的 G – 素数对的存在问题，还是孪生素数的存在问题，都离不开这些简单的筛选，因而作者将本书叫作"有用的工具——简单筛选的理论与实践"。所用的筛选标准是小于或等于自然数 n（或偶数 $2n$）的平方根的素数：$P_1=2$，$P_2=3$，$P_3=5$，$P_4=7$，…，P_{m-1}，P_m。

E – 筛选所用的筛选通式为：$t\geqslant 1$ 时的 $E_{p_1}=p_1t$，$E_{p_2}=p_2t$，$E_{p_3}=p_3t$，…，$E_{p_{m-1}}=p_{m-1}t$，$E_{p_{m-1}}=p_mt$。

G – 筛选所用的筛选通式为：$G_3=2n-3t=3t+r_3$，$G_5=2n-5t=5t+r_5$，$G_7=2n-7t=7t+r_7$，…，$G_{p_m}=2n-p_mt=p_mt+r_{p_m}$。

L – 筛选所用的筛选通式为：$t\geqslant 0$ 时的 $L_{p_3}=p_3t+2$ 或 $L_{p_3}=p_3t-2$，$L_{p_4}=p_4t+2$ 或 $L_{p_4}=p_4t-2$，…，$L_{p_{m-1}}=p_{m-1}t+2$ 或 $L_{p_{m-1}}=p_{m-1}t-2$，$L_{p_m}=p_mt+2$ 或 $L_{p_m}=p_mt-2$。

显然，它们对 1 到 n 或 1 到 $2n$ 的自然数进行筛选时，各筛选通式互不影响，是独立的。具体到某一个自然数，它们可能发生重叠。这点对讨论这些简单筛选是很重要的。

作者在观察 E – G 筛选的基础上导出 1 到 $2n$ 范围内的偶数的 G – 素数对成员的数目 $G(2n)$ 的计算公式。作者在观察 E – L 筛选基础上导出 1 到 n 范围内孪生素数的数目 $L(n)$ 的计算公式。这些公式分别有各项都取整的，即各项均为[ ]的准确公式；以及各项都取全的，即各项均为( )的近似公式。前者由于随着 $2n$ 或 n 的变大，公式所包含的项数增多，以致难以完成计算。后者却可以转换为连乘积的形式，便于讨论。但长期以来，由于由各项取整[ ]变为各项取全( )这一过程带来的误差的估算没有解决，使得问题的解决停滞下来。作者后来研究发现，原来认为是准确的各项取整[ ]的计算公式是将事情复杂化的公式，并且找到了用取全( )的公式描述 E – G 筛选过程所引入的误差的程度。作者为避开由各项取整[ ]变为各项取全( )这一过程带来的误差的估算，提出了用图表分步描述 E – G 筛选过程，从而获得估计 $G(2n)$ 上下限值的公式。作者为避开由各项取整[ ]变为各项取全( )这一过程带来的误差的估算，而提出的这种用图表分步描述 E – G 筛选过程的方法，对于 E – L 筛选也是完全适用的，同样得到估计$L(n)$上下限值的公式。

本书内真正的论文不及全书篇幅的 1/5，其余均为帮助读者理解运算和操作的实例。

本书里要遇到下面的定义和运算：

定义：函数$[x]$与$\{x\}$是对于一切实数定义的函数，函数$[x]$的值等于不大于x的最大的整数；函数$\{x\}$的值是$x-[x]$。我们把$[x]$叫做x的整数部分，$\{x\}$叫做x的分数部分。

例：$[\pi]=3$，$[e]=2$，$[-\pi]=-4$，$[2/3]=0$，$[-3/5]=-1$；

$\{-3/5\}=2/5$，$\{-\pi\}=1-0.14159\cdots=0.95840\cdots$

由定义可以立刻得出下列简单性质：

$x=[x]+\{x\}$；

$[x]\leqslant[x]+1$，$x-1<[x]\leqslant x$，$0\leqslant\{x\}<1$；

$[x]+[y]\leqslant[x+y]$，$\{x\}+\{y\}\geqslant\{x+y\}$；

$[n+x]=n+[x]$，n是整数；

当x不是整数时，$[-x]=-[x]-1$；当x是整数时，$[-x]=-[x]$。

若a，b是两个整数，$0<b$，则$a=b[a/b]+b\{a/b\}$，$0\leqslant b\{a/b\}\leqslant b-1$。

若a、b是任意两个正整数，则不大于a而为b的倍数的正整数的个数是$[a/b]$。

在取整运算时会遇到这样的关系式：

$[(n-r)/p]+1=[n/p]+1$，或$[(n-r)/p]+1=[n/p]$。这取决于$n-p[n/p]\geqslant r$，或$n-p[n/p]<r$。当$n-p[n/p]\geqslant r$时，$[(n-r)/p]+1=[n/p]+1$；而当$n-p[n/p]<r$时，$[(n-r)/p]+1=[n/p]$。

由这样的关系式，我们也容易得到：

$[A/p]-[B/p]=[(A-B)/p]$，或$[A/p]-[B/p]=[(A-B)/p]+1$。这取决于下面的关系：

若$A-p[A/p]=\mathrm{r_a}$，$B-p[B/p]=\mathrm{r_b}$；当$r_a\geqslant r_b$时，$[A/p]-[B/p]=[(A-B)/p]$；当$r_a<r_b$时，$[A/p]-[B/p]=[(A-B)/p]+1$。

同样，由这样的关系式，我们也容易得到：$-[A/p]+[B/p]=-[(A-B)/p]-1$，或$-[A/p]+[B/p]=-[(A-B)/p]$。这取决于下面的关系。若$A-p[A/p]=\mathrm{r_a}$，$B-p[B/p]=\mathrm{r_b}$；那当$r_a\geqslant r_b$时，$-[A/p]+[B/p]=[(A-B)/p]+1$；那当$r_a<r_b$时，$-[A/p]+[B/p]=[(A-B)/p]$。

很有趣，可将E-筛选、E-G筛选与E-L筛选看成是这样的游戏，做一个大的棋盘，画上格子，并依次将从1到n或$2n$的自然数标在棋盘的格子上，然后在每一格上放一个棋子，放好之后，按一定的规则将棋子从棋盘上取走，最后再数棋盘上所剩的棋子，并看这些所剩的棋子是在棋盘的什么位置上。取走棋子的规则就是进行E-筛选、E-G筛选与E-L筛选的那些筛选通式。从这样的数学模型出发，就很容易得到书里所提到的描述E-筛选、E-G筛选与E-L筛选的那几个公式。在这过程中，很多没有必要考虑的东西就没有必要去考虑它了。

如果考虑到下面的由部分反过来求全体数时存在的关系，那事情就更为简单了：

当$[n/p]=n/p$时，$n=p[n/p]$，$n-[n/p]=(p-1)[n/p]$；$n-2[n/p]=(p-2)[n/p]$。

当$[(n-r)/p]=[n/p]$时，$(n-r)=p[n/p]$，$n=p[n/p]+r$，$n-[n/p]=(p-1)[n/p]+r$；$n-2[n/p]=(p-2)[n/p]+r$。

当$[(n-r)/p]=[n/p]+1$时，$(n-r)=p[n/p]+p$，$n=p[n/p]+p+r$，$n-[n/p]=(p-1)[n/p]+p+r$；$n-2[n/p]=(p-2)[n/p]+p+r$。

当$[n/p]=(n/p)-\{n/p\}$时，$n=p(n/p)-p\{n/p\}=p[n/p]+r$，$n-[n/p]=(p-1)[n/p]+r$；$n-2[n/p]=(p-2)[n/p]+r$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一部分　E－G 筛选原本的归纳筛选图

一

数学是由有限的可掌握的事实推论到无限的难掌握的事实的一种活动，而不是相反的由无限的难以掌握的事实推论到可掌握的事实的活动。

数学中的定理命题是数学里各种运算过程的总结，虽然很多定理命题的证明是由天才的数学家完成的，但不能改变这些定理命题是数学里各种运算过程的总结这一事实。

对足够数量的 E－G 筛选过程的观察，可能对 E－G 筛选过程与结果得出有趣的结论性的命题，那就是可能对 G 猜想给出肯定的回答。

下面就是这样的观察。笔者觉得这样的观察是必要而可靠的。

二

用图表分步描述 E－G 筛选过程，那很多隐藏着的东西都可以显现出来，很多需要证明而难以证明的定理都变得显而易见，不需要证明了，其证明可能成为多此一举的事。

对于偶数 $2n$ 来说，要获得其和等于它的两个素数，即该偶数的 G－素数对成员的办法就是，对 1 到 $2n$ 的自然数进行 E－G 筛选。用来进行筛选的标准是小于或等于偶数 $2n$ 的平方根的素数 p_1、p_2、p_3、p_4、…、p_m。这里的 $p_1=2$、$p_2=3$、$p_3=5$、$p_4=7$、…、p_m。筛去为 $E_2=2t$ 的数；筛去为 $E_3=3t$、$G_3=2n-3t$ 的数；筛去为 $E_5=5t$、$G_5=2n-5t$ 的数；筛去为 $E_7=7t$、$G_7=2n-7t$ 的数，……，筛去为 $E_{p_m}=p_m\cdot t$、$G_{p_m}=2n-p_mt$ 的数。

人们发现，在 p_1、p_2、p_3、p_4、…、p_m之中存在 p_k 与 p_j，使得关系 $p_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_k<p_j$、…、$p_m$成立。例如：

$2<3$、5、7；$2\times3-1=5$；$2\times3<7$、11…；$2\times3\times5-1=29$；$2\times3\times5<31$、37、41…；$2\times3\times5\times7-1=199$；$2\times3\times5\times7<211$、223、…

利用这个事实，在进行 E－G 筛选时，我们可将 1 到 $2n$ 的数排列成 $p_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_k$列，$[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]$或$[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]+1$ 行的方阵。显然这样的方阵每列有$[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]$或$[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]+1$ 个数。这样的方阵在经过筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k筛选之后，会留下$(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_k-2)$列数列。显然，这些留下的数列的数是不会被筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k所筛选掉的。这些留下的数列的数再用筛选标准 p_j、…、p_m进行 E－G 筛选之后，不被筛去的数就是偶数 $2n$ 的 G－素数对的成员。实际上，$[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]\geqslant qp_m$，$(1\leqslant q<p_j)$或$[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]+1\geqslant qp_m$，$(1\leqslant q<p_j)$。

显然，经过筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k的筛选之后，留下的这$(p_1-1)(p_2-2)(p_3-$

2)…(p_k-2)列数列里的数，再用筛选标准 p_j、…、p_m进行 E – G 筛选时，每列[$2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$]或[($2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$) +1]个数所表现的行为是与 1 到数[$2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$]的自然数列或 1 到数[($2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$) +1]的自然数列的行为是一样的。

我们容易发现，在用筛选标准 p_j、…、p_m对经过筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k筛选之后留下的这(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)…(p_k-2)列数列的每列的数进行 E – G 筛选时，每列筛去的数是小于用筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k对 1 到[$2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$]的自然数或 1 到[$2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$] +1 的自然数进行 E – G 筛选时筛去的数。这是因为存在关系 $p_1<p_j$、$p_2<p_{j+1}$、$p_3<p_{j+3}$、…$p_k<p_{j+k}$、…$<p_m$。显然，这是因为 $p_1<p_j$，则能被 p_1筛去的数的数目要比能被 p_j筛去的数的数目要多。

另外，如果[[[$2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$] +1]/$p_{j+s}$] =0 或[[$2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$]/$p_{j+s}$] =0，那在对经过筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k的筛选之后留下的这(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)…(p_k-2)列中的每列数进行 E – G 筛选时，被 p_{j+s}、p_{j+s+1}、p_{j+s+2}、…、p_m筛去的数是包含在被 p_j、$p_{j+1}\cdots p_{j+s-2}$、p_{j+s-1}筛去的数里面。这是显然的。

这样，我们就有可能用筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k对 1 到数[$2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$]的自然数列或 1 到数([$2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$] +1)的自然数列进行 E – G 筛选时筛余的数的数目，来作为在用筛选标准 p_j、…、p_m对经过筛选标准 p_1、p_2、$p_3\cdots p_k$的筛选之后留下的这(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)…(p_k-2)列数列中的每列数进行 E – G 筛选时筛余的数的数目的下限。这就开辟了用已进行过的 E – G 筛选过程的结果来估计未进行过的 E – G 筛选过程的结果的方法。正如我们对 1 到 1070 范围内的所有隅数所进行考察时看到的那样。我们有把握说，G 猜想是对的，它是对 E – G 筛选过程的考察的总结，而不是其他从天而降的命题，虽然人们为解决它而花的时间太长了。

还有，我们从用来进行 E – G 筛选的筛选通式 $E_2=2t$；$E_3=3t$、$G_3=2n-3t$；$E_5=5t$、$G_5=2n-5t$；$E_7=7t$、$G_7=2n-7t$、…、$E_{p_m}=p_mt$、$G_{p_m}=2n-p_mt$ 可以看出，被 $E_3=3t$ 筛去的数的数目与被 $G_3=2n-3t$ 筛去的数的数目正好相等；被 $E_5=5t$ 筛去的数的数目与被 $G_5=2n-5t$ 筛去的数的数目正好相等；被 $E_7=7t$ 筛去的数的数目与被 $G_7=2n-7t$ 筛去的数的数目正好相等；被 $E_{p_m}=p_mt$ 筛去的数的数目与被 $G_{p_m}=2n-p_mt$ 筛去的数的数目正好相等。而且在 E – G 筛选图上，被 $E_3=3t$ 筛去的数与被 $G_3=2n-3t$ 筛去的数正好是对称的；被 $E_5=5t$ 筛去的数与被 $G_5=2n-5t$ 筛去的数正好是对称的；被 $E_7=7t$ 筛去的数与被 $G_7=2n-7t$ 筛去的数正好是对称的；被 $E_{p_m}=p_m\cdot t$ 筛去的数与被 $G_{p_m}=2n-p_m\cdot t$ 筛去的数正好是对称的。这样的结果是，在 E – G 筛选图上，各列筛余的数的数目也是对称的。这是很有趣的现象。

利用表格里面各点的对称关系，能使得 E – G 筛选变得容易进行。

								z	u	y	w	t	s	r	q	p	→
←	e	f	g	k	n	m						←	a	b	c	d	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32		d	c	b	a	→
						m	n	k	g	f	e	→						
←	p	q	r	s	t	w	y	u	z									

14 + 19 = 15 + 18 = 16 + 17 = 33；1 + 32 = 2 + 31 = 13 + 20 = 12 + 21 = 11 + 22 = 10 + 23 = 24 + 9 = 25 + 8 = 26 + 7 = 33。

1 + 19 = 2 + 18 = 3 + 17 = 4 + 16 = 5 + 15 = 6 + 14 = 7 + 13 = 8 + 12 = 9 + 11 = 10 + 10 = 20。

									z	u	y	w	t	s	r	q	p	→
←	e	f	g	k	n	m							←	a	b	c	d	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51		d	c	b	a	→
						m	n	k	g	f	e	→						
←	p	q	r	s	t	w	y	u	z									

14 + 38 = 15 + 37 = 16 + 36 = 17 + 35 = 18 + 34 = 19 + 33 = 52；1 + 51 = 2 + 50 = 3 + 49 = 4 + 48 = 5 + 47 = 6 + 46 = 7 + 45 = 8 + 44 = 9 + 43 = 10 + 42 = 11 + 41 = 12 + 40 = 13 + 39；20 + 32 = 21 + 31 = 22 + 30 = 23 + 29 = 24 + 28 = 25 + 27 = 26 + 26。

1 + 38 = 2 + 37 = 3 + 36 = 4 + 35 = 5 + 34 = 6 + 33 = 7 + 32 = 8 + 31 = 9 + 30 = 10 + 29 = 11 + 28 = 12 + 27 = 13 + 26 = 14 + 25 = 15 + 24 = 16 + 23 = 17 + 22 = 18 + 21 = 19 + 20 = 39。

															丁	丙	乙	甲
→	b	C	D										←	A	B	S	q	M
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	113
119	125	131	137	143	149	155	161	167	173	179	185	191	M	S	N	B	A	→
									D	C	b	←						
甲	乙	丙	丁															

11 − 5 = 6，191 − 185 = 6。89 − 83 = 6，113 − 107 = 6。

(11 + 185)/2 = 98；(5 + 191)/2 = 98。

(83 + 113)/2 = 98；(89 + 107)/2 = 98。

三

对于偶数 $2n$ 来说，要获得其和等于它的两个素数，即 G－素数对的办法就是，对 1 到 $2n$ 的自然数进行 E－G 筛选。用来进行筛选的标准是小于或等于偶数 $2n$ 的平方根的素数 p_1、p_2、p_3、p_4、⋯、p_m。

如果 p_1、p_2、p_3、p_4、⋯、p_m 是从小到大依次排列的小于或等于偶数 $2n$ 的平方根的素数，那么，存在下面的关系：

$2n = p_1s_1 + r_1 = p_2s_2 + r_2 = p_3s_3 + r_3 = p_4s_4 + r_4 = \cdots = p_ms_m + r_m$

而为获得偶数 $2n$ 的 G－素数对的成员而对 1 到 $2n$ 的自然数列进行的 E－G 筛选所用的

筛选通式为：$E_{p_1}=p_1t$，$G_{p_1}=2n-p_1t=p_1t+r_1$；$E_{p_2}=p_2t$，$G_{p_2}=2n-p_2t=p_2t+r_2$；$E_{p_3}=p_3t$，$G_{p_3}=2n-p_3t=p_3t+r_3$；$E_{p_4}=p_4t$，$G_{p_4}=2n-p_4t=p_4t+r_4$，…，$E_{p_m}=p_mt$，$G_{p_m}=2n-p_mt=p_mt+r_m$。在这里的 $p_1=2$、$p_2=3$、$p_3=5$、$p_4=7$、…、p_m。

人们发现，在 p_1、p_2、p_3、p_4、…、p_m 之中存在 p_k 与 p_j，使得关系 $p_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_k<p_j$、…、$p_m$ 成立。例如：

$2<3$、5、7；$2\times3-1=5$；$2\times3<7$、11…；$2\times3\times5-1=29$；$2\times3\times5<31$、37、41…；$2\times3\times5\times7-1=199$；$2\times3\times5\times7<211$、223…

利用这个事实，在进 E－G 筛选时，我们可将 1 到 $2n$ 的数排列成 $p_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_k$ 列、$[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]$ 或 $[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]+1$ 行的方阵。显然这样的方阵每列有 $[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]$ 或 $[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]+1$ 个数。这样的方阵在经过筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k 的筛选之后，会留下 $(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_k-2)$ 列数列。显然，留下的这些数列的数是不会被筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k 所筛选掉的。这些数列的数再用筛选标准 p_j、…、p_m 进行 E－G 筛选之后，留下的数就是偶数 $2n$ 的 G－素数对的成员。

显然，经过筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k 的筛选之后，留下这 $(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_k-2)$ 列数列的数，再用筛选标准 p_j、…、p_m 进行 E－G 筛选时，每列 $[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]$ 或 $[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]+1$ 个数所表现的是与 1 到数 $[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]$ 的自然数列或 1 到数 $[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]+1$ 的自然数列的行为是一样的。

可以发现，经过筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k 的筛选之后，留下这 $(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_k-2)$ 列数列的数，是能被 $A=p_1p_2p_3\cdots p_kt+r$ 描述的。式中的 r 是 1、p_j、…、p_m 之中不被过筛选标准 p_1、p_2、p_3、…、p_k 的筛选通式描述的那些数。

考察用筛选标准 p_j、p_{j+1}、p_{j+2}、…、p_{m-2}、p_{m-1}、p_m 对 1 到 p_m 的自然数列进行 E－G 筛选时，可发现下面的关系：

从数 1 到数 p_j 的数里总会有两个数分别被 $E_{p_j}=p_jt$、$G_{p_j}=2n-p_jt$ 描述而被筛去；

从数 1 到数 p_{j+1} 的数里总会有两个数分别被 $E_{p_j+1}=p_{j+1}t$、$G_{p_{j+1}}=2n-p_{j+1}t$ 描述而被筛去；

从数 1 到数 p_{j+2} 的数里总会有两个数分别被 $E_{p_j+2}=p_{j+2}t$、$G_{pj+2}=2n-p_{j+2}t$ 描述而被筛去；

……

从数 1 到数 p_{m-2} 的数里总会有两个数分别被 $E_{p_m-2}=p_{m-2}t$、$G_{p_{m-2}}=2n-p_{m-2}t$ 描述而被筛去；

从数 1 到数 p_{m-1} 的数里总会有两个数分别被 $E_{p_{m-1}}=p_{m-1}t$、$G_{p_{m-1}}=2n-p_{m-1}t$ 描述而被筛去；

从数 1 到数 p_m 的数里总会有两个数分别被 $E_{p_m}=p_mt$、$G_{p_m}=2n-p_mt$ 描述而被筛去。

而从数 p_j 到数 p_m 之间的其他的数可能被含 p_j、p_{j+1}、$p_{j+2}\cdots p_{m-2}$、p_{m-1}、p_m 的筛选通式描述而被筛去，也可能不被描述而留了下来。而被含 p_j、p_{j+1}、$p_{j+2}\cdots p_{m-2}$、p_{m-1}、p_m 的筛选通式描述而被筛去的数可能相互重叠，只能算做一次。这样，可认为经整个 E－G 筛选之后，每 p_m 个数里会有 (p_j-2) 到 $(p_m-2(m-j))$ 个数留下来。

用图表来表示就是：

1	－	..	－	Pj	*Pj*	..	P j+1	*P j+1*	..	P j+2	*P j+2*	..	..	..	..	P m－2	*P m－2*	..	P m－1	*P m－1*	..	Pm	*Pm*

在 1 到 p_j区间总会有(p_j-2)个数不会被筛去。在 p_j到 p_m区间是肯定有$(2(m-j-1)+1)$个数会被筛去；而其余的$(p_m+j-2m+1)$个数则可能被筛去，也可能不被筛去。因而可认为经整个 E－G 筛选之后，每 p_m个数里有(p_j-2)到$(p_m-2(m-j))$个数留了下来。

类似的，当用筛选标准 p_j、p_{j+1}、p_{j+2}、…、p_{m-2}、p_{m-1}、p_m对能被 $A=p_1p_2p_3\cdots p_kt+r$ 描述的数列的数 r、$(1p_1p_2p_3\cdots p_kt+r)$、$(2p_1p_2p_3\cdots p_kt+r)$、$(3p_1p_2p_3\cdots p_kt+r)$、…、$((p_m-1)p_1p_2p_3\cdots p_kt+r)$继续进行 E－G 筛选时，可发现下面的关系：

从 r 到$((p_j-1)p_1p_2p_3\cdots p_kt+r)$的数里总会有两个数分别被 $E_{p_j}=p_jt$、$G_{p_j}=2n-p_jt$ 描述而被筛去；

从 r 到$((p_{j+1}-1)p_1p_2p_3\cdots p_kt+r)$的数里总会有两个数分别被 $E_{p_{j+1}}=p_{j+1}t$、$G_{p_{j+1}}=2n-p_{j+1}t$ 描述而被筛去；

从 r 到$((p_{j+2}-1)p_1p_2p_3\cdots p_kt+r)$的数里总会有两个数分别被 $E_{p_{j+2}}=p_jt$、$G_{p_{j+2}}=2n-p_{j+2}t$ 描述而被筛去；

……

从 r 到$((p_{m-2}-1)p_1p_2p_3\cdots p_kt+r)$的数里总会有两个数分别被 $E_{p_{m-2}}=p_{m-2}t$、$G_{p_{m-2}}=2n-p_{m-2}t$ 描述而被筛去；

从 r 到$((p_{m-1}-1)p_1p_2p_3\cdots p_kt+r)$的数里总会有两个数分别被 $E_{p_{m-1}}=p_{m-1}t$、$G_{p_{m-1}}=2n-p_{m-1}t$ 描述而被筛去；

从 r 到$((p_m-1)p_1p_2p_3\cdots p_kt+r)$的数里总会有两个数分别被 $E_{p_m}=p_mt$、$G_{p_m}=2n-p_mt$ 描述而被筛去。

而从$[(p_j-1)p_1p_2p_3\cdots p_kt+r]$到$[(p_m-1)p_1p_2p_3\cdots p_kt+r]$之间的其他的数可能被含 p_j、p_{j+1}、$p_{j+2}\cdots p_{m-2}$、p_{m-1}、p_m的筛选通式描述而被筛去也可能不被描述而留了下来。而被含 p_j、p_{j+1}、$p_{j+2}\cdots p_{m-2}$、p_{m-1}、p_m的筛选通式描述而被筛去的数可能相互重叠，只能算做一次。因而可认为经整个 E－G 筛选之后，每 p_m个数里有(p_j-2)到$(p_m-2(m-j))$个数是留了下来。而经整个 E－G 筛选之后留下来的数的总数是$(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_k-2)(p_j-2)[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k/p_m]$到$(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_k-2)(p_m-2(m-j))[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k/p_m]$之间的数。

需要注意的是，当 r_2、r_3、…、r_k、r_j中某一个为 0 时，则上式中相应的 2 变为 1。

这就是关于 E－G 筛选可以得到的结论。

这里我们需注意到的事实是，用筛选标准 p_j、p_{j+1}、p_{j+2}、…、p_{m-2}、p_{m-1}、p_m对 1 到 p_m的自然数列进行 E－G 筛选时，所用的筛选通式 $E_{p_j}=p_jt$、$G_{p_j}=2n-p_jt$；$E_{p_{j+1}}=p_{j+1}t$、$G_{p_{j+1}}=2n-p_{j+1}t$；$E_{p_{j+2}}=p_{j+2}t$、$G_{p_{j+2}}=2n-p_{j+2}t$；…；$E_{p_m}=p_mt$、$G_{p_{m-2}}=2n-p_{m-2}t$；$E_{p_{m-1}}=p_{m-1}t$、$G_{p_{m-1}}=2n-p_{m-1}t$；$E_{p_m}=p_mt$、$G_{p_m}=2n-p_mt$ 里的 t 有的可能是 p_1、p_2、p_3、…、p_k或含有它们的合数，因而被这些通式描述的数，是在之前进行的筛选中被筛掉了的。因此就有了前面的结论。

四

这样推导可能更直接些。

对于偶数 $2n$ 来说，要获得其和等于它的两个素数，即 G－素数对的办法就是，对 1 到 $2n$ 的自然数进行 E－G 筛选。用来进行筛选的标准是小于或等于偶数 $2n$ 的平方根的素数

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

p_1、p_2、p_3、$p_4\cdots p_m$。

如果p_1、p_2、p_3、$p_4\cdots p_m$是从小到大依次排列的小于或等于偶数$2n$的平方根的素数，那么，存在下面的关系：

$2n=p_1s_1+r_1=p_2s_2+r_2=p_3s_3+r_3=p_4s_4+r_4=\cdots=p_ms_m+r_m$

而为获得偶数$2n$的G－素数对的成员而对1到$2n$的自然数列进行的E－G筛选所用的筛选通式为$E_{p_1}=p_1t$；$E_{p_2}=p_2t$，$G_{p_2}=2n-p_2t=p_2t+r_2$；$E_{p_3}=p_3t$，$G_{p_3}=2n-p_3t=p_3t+r_3$；$E_{p_4}=p_4t$，$G_{p_4}=2n-p_4t=p_4t+r_4$；$\cdots$；$E_{p_m}=p_mt$，$G_{p_m}=2n-p_mt=p_mt+r_m$。这里的$p_1=2$、$p_2=3$、$p_3=5$、$p_4=7$、$\cdots$、p_m。

人们发现，在p_1、p_2、p_3、$p_4\cdots p_m$之中存在p_k与p_j，使得关系$p_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_k<p_j$、$\cdots$、$p_m$成立。例如：

$2<3$、5、7；$2\times3-1=5$；$2\times3<7$、11、$\cdots$；$2\times3\times5-1=29$；$2\times3\times5<31$、37、41$\cdots$；$2\times3\times5\times7-1=199$；$2\times3\times5\times7<211$、223、$\cdots$

同样，在p_1、p_2、p_3、p_4、$\cdots$、p_m之中存在p_s与p_{s+1}，使得$2n\geqslant q\times2\times3\times p_3\times p_4\times\cdots\times p_s\times p_m(1\leqslant q<p_{s+1})$成立。

利用这个事实，在进行E－G筛选时，我们可将1到$q\times2\times3\times p_3\times p_4\times\cdots\times p_s\times p_m$的数排列成$qp_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_s$列、$p_m$行的方阵。显然这样的方阵每列有$p_m$个数。这样的方阵在经过筛选标准$p_1$、$p_2$、$p_3$、$\cdots$、$p_s$的筛选之后，会留下$q(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_s-2)$列数列。显然，留下的这些数列的数是不会被筛选标准$p_1$、$p_2$、$p_3$、$\cdots$、$p_s$所筛选掉的。这些数列的数再用筛选标准$p_j$、$\cdots$、$p_m$进行E－G筛选之后，留下的数就是偶数$2n$的G－素数对的成员。

显然，每列p_m个数里仅有一个数能被筛选标准p_m进行的E－筛选筛去；同样，每列p_m个数里也仅有一个数会被筛选标准p_m进行的G－筛选筛去。因而，每列p_m个数，在经筛选标准p_m进行E－G筛选后，将筛去2个数，留下(p_m-2)个数。每列留下的(p_m-2)个数中，有(p_m-2-p_{m-1})个数，可不考虑以后被筛选的情况，就把它们筛去，这样，每列就留下p_{m-1}个数。每列留下的p_{m-1}个数，在用筛选标准p_{m-1}进行E－G筛选时，情况很相似，同样将筛去2个数，留下$(p_{m-1}-2)$个数。当用其他的筛选标准继续对每列留下的数进行E－G筛选时，情况完全相似。最后，当用筛选标准p_{s+1}进行完E－G筛选时，每列至少留下$(p_{s+1}-2)$个数，它们是偶数$2n$的G－素数对成员。因而，我们得到以下关系：

$G(2n)\geqslant q(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_s-2)(p_{s+1}-2)$

显然，我们在推导过程中没有考虑到重叠筛选的情况，并且在讨论中，有些数是在不考虑以后是否可能被筛选掉的情况下，就把它们筛去了，这些都会引起负误差。

显然，这一$G(2n)$的下限值公式足以说明“偶数$2n$的G－素数对与素数一样，其存在是无限多的”这一命题是正确的。这是因为，随着$2n$的变大，能写成：

$2n\geqslant q\times2\times3\times p_3\times p_4\times\cdots\times p_s\times p_m$，$(1\leqslant q<p_{s+1})$

关系式中的q和p_s也在变大（具体说q和p_s是交替地变大），因而$q(p_3-2)(p_4-2)\cdots(p_s-2)(p_{s+1}-2)$也总是随着$n$在变大的。虽然与$n$相比，其增长速度要慢得多。

简化层次显

我们已经得到结论：对于偶数$2n$来说，要获得其和等于它的两个素数即G－素数对成

员的办法就是，对 1 到 $2n$ 的自然数进行 E－G 筛选。用来进行筛选的标准是小于或等于偶数 $2n$ 的平方根的素数 p_1、p_2、p_3、$p_4 \cdots p_m$。

如果 p_1、p_2、p_3、$p_4 \cdots p_m$ 是从小到大依次排列的小于或等于偶数 $2n$ 的平方根的素数，那么，存在下面的关系：

$$2n = p_1 s_1 + r_1 = p_2 s_2 + r_2 = p_3 s_3 + r_3 = p_4 s_4 + r_4 = \cdots = p_m s_m + r_m$$

而为获得偶数 $2n$ 的 G－素数对的成员而对 1 到 $2n$ 的自然数列进行的 E－G 筛选所用的筛选通式为 $E_{p_1} = p_1 t$；$E_{p_2} = p_2 t$，$G_{p_2} = 2n - p_2 t = p_2 t + r_2$；$E_{p_3} = p_3 t$，$G_{p_3} = 2n - p_3 t = p_3 t + r_3$；$E_{p_4} = p_4 t$，$G_{p_4} = 2n - p_4 t = p_4 t + r_4$；$\cdots$；$E_{p_m} = p_m t$，$G_{p_m} = 2n - p_m t = p_m t + r_m$。在这里的 $p_1 = 2$、$p_2 = 3$、$p_3 = 5$、$p_4 = 7$、$\cdots$、p_m。

人们发现，在 p_1、p_2、p_3、p_4、$\cdots$、p_m 之中存在 p_k 与 p_j，使得关系 $p_1 p_2 p_3 \cdots p_k < p_j$、$\cdots$、$p_m$ 成立。

利用这个事实，在进 E－G 筛选时，我们可将 1 到 $2n$ 的数排列成 $p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$ 列，$2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k$ 行的方阵。显然这样的方阵每列有 $[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]$ 或 $[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k]+1$ 个数。这样的方阵在经过筛选标准 p_1、p_2、p_3、$\cdots$、p_k 的筛选之后，会留下 $(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_k-2)$ 列数列。显然，留下的这些数列的数是不会被筛选标准 p_1、p_2、p_3、$\cdots$、p_k 所筛选掉的。这些数列的数再用筛选标准 p_j、$\cdots$、p_m 进行 E－G 筛选之后，留下的数就是偶数 $2n$ 的 G－素数对的成员。

而经整个 E－G 筛选之后留下来的数的总数是在 $(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_k-2)(p_j-2)[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k/p_m]$ 到 $(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\cdots(p_k-2)(p_m-2(m-j))[2n/p_1/p_2/p_3/\cdots/p_k/p_m]$ 之间。

需要注意的是当 r_2、r_3、$\cdots$、r_k、r_j 中某一个为 0 时，则上式中相应的 2 变为 1。

下面我用图表法对 1 至 1000 的一些典型自然数进行 E－G 筛选。利用同样的办法，可以找出 1 至 1000 内的其他的各个偶数的 G－素数对成员的数目，并与由上面得到的公式给出的相应的下上限值对照。

从这些用图表法进行的 E－G 筛选，人们可以对前面得到的偶数的 G－素数对成员的数目的上下限值的公式的由来有更深刻的理解，并清楚地知道数轴上哪一范围内的自然数的行为是可以确切知道，哪一范围内的自然数的行为是不能确切知道，这些不能确切知道的自然数的数目，正是公式所给出的上下限值的范围。

注：在 E－G 筛选图上，“二”为 $E_2 = 2t$ 筛去的数；“三”为 $E_3 = 3t$ 筛去的数、“三”为 $G_3 = 2n - 3t$ 筛去的数；“五”为 $E_5 = 5t$ 筛去的数、“五”为 $G_5 = 2n - 5t$ 筛去的数；“七”为 $E_7 = 7t$ 筛去的数、“七”为 $G_7 = 2n - 7t$ 筛去的数……以此类推。

962：$962 = 2 \times 3 \times 5 \times 32 + 2$。$962 = 3 \times 320 + 2$；$962 = 5 \times 192 + 2$；$962 = 7 \times 137 + 3$；$962 = 11 \times 87 + 5$；$962 = 13 \times 74 + 0$；$962 = 17 \times 56 + 10$；$962 = 19 \times 50 + 12$；$962 = 23 \times 41 + 19$；$962 = 29 \times 33 + 5$；$962 = 31 \times 31 + 1$。

将 1 到 962 的数排成有 30 列的表（$30 = 2 \times 3 \times 5$）。

经 E－筛选，筛去为 $E_2 = 2t$、$E_3 = 3t$、$E_5 = 5t$ 的数。再经 G－筛选，筛去为 $G_3 = 3t + 2$、$G_5 = 5t + 2$ 的数。

1	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	13	二	三	二	三	二	19	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
31	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	43	二	三	二	三	二	49	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二

61	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	73	二	三	二	三	二	79	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
91	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	103	二	三	二	三	二	109	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
121	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	133	二	三	二	三	二	139	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
151	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	163	二	三	二	三	二	169	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
181	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	193	二	三	二	三	二	199	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
211	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	223	二	三	二	三	二	229	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
241	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	253	二	三	二	三	二	259	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
271	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	283	二	三	二	三	二	289	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
301	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	313	二	三	二	三	二	319	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
331	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	343	二	三	二	三	二	349	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
361	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	373	二	三	二	三	二	379	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
391	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	403	二	三	二	三	二	409	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
421	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	433	二	三	二	三	二	439	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
451	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	463	二	三	二	三	二	469	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
481	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	493	二	三	二	三	二	499	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
511	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	523	二	三	二	三	二	529	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
541	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	553	二	三	二	三	二	559	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
571	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	583	二	三	二	三	二	589	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
601	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	613	二	三	二	三	二	619	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
631	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	643	二	三	二	三	二	649	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
661	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	673	二	三	二	三	二	679	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
691	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	703	二	三	二	三	二	709	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
721	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	733	二	三	二	三	二	739	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
751	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	763	二	三	二	三	二	769	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
781	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	793	二	三	二	三	二	799	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
811	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	823	二	三	二	三	二	829	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
841	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	853	二	三	二	三	二	859	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
871	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	883	二	三	二	三	二	889	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
901	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	913	二	三	二	三	二	919	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
931	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	943	二	三	二	三	二	949	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
961	二																												

筛剩 3 列。这 3 列分别被 $A=30t+1$、$A=30t+13$、$A=30t+19$ 描述。

再经 E－筛选与 G－筛选，筛去 $E_7=7t$、$G_7=7t+3$ 的数；筛去 $E_{11}=11t$、$G_{11}=11t+5$ 的数；筛去 $E_{13}=13t$、$G_{13}=13t+0$ 的数；筛去 $E_{17}=17t$、$G_{17}=17t+10$ 的数；筛去 $E_{19}=19t$、$G_{19}=19t+12$ 的数；筛去 $E_{23}=23t$、$G_{23}=23t+19$ 的数；筛去 $E_{29}=29t$、$G_{29}=29t+5$ 的数；筛去 $E_{31}=31t$、$G_{31}=31t+1$ 的数；得：

卅一	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十三	二	三	二	三	二	十九	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	43	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	79	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	103	二	三	二	三	二	109	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十一	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	139	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
151	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十七	二	三	二	三	二	十三	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十一	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	193	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
211	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	223	二	三	二	三	二	229	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十一	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
271	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	十七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十一	二	三	二	三	二	十一	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二

331	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	349	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十九	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十九	二	三	二	三	二	十一	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十三	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
421	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	廿三	二	三	二	三	二	439	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	463	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十三	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	499	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	523	二	三	二	三	二	廿三	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
541	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	十三	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十一	二	三	二	三	二	十九	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十九	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	613	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
631	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十一	二	三	二	三	二	十一	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十七	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
691	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	十一	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	733	二	三	二	三	二	739	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
751	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	769	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十一	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十三	二	三	二	三	二	十七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
811	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	823	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十一	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	853	二	三	二	三	二	859	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	883	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
十七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	七	二	三	二	三	二	919	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
七	二	三	二	五	二	五	二	三	二	三	二	十九	二	三	二	三	二	十三	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二
卅一	二																												

卅一	七	十七	七	十一	151	十一	211	七	271	七	331	十九	十七	421	七	十三	七	541	十七	十九	631	七	691	七	751	十一	811	十一	七	十七
七	卅一																													

十三	43	七	103	七	十七	193	223	十一	七	十一	七	十九	十三	廿三	463	七	523	七	十一	613	十一	十七	七	733	七	十三	823	853	883	七
十九																														

十九	七	79	109	139	十三	七	229	七	十七	十一	349	十一	七	439	七	499	廿三	十三	十九	七	十一	七	十一	739	769	十七	七	859	七	919
十三																														

$962=1+961=43+919=79+883=103+859=109+853=139+823=151+811=193+769=211+751=223+739=229+733=271+691=331+631=349+613=421+541=439+523=463+499$。34。

$962/2/3/5=32$。$(3-2)(5-2)=3$。3 列，每列有 32 个以上的数。再经 7、11、13、17、19、23、29、31 进行的筛选，每列可认为至少可留下 5(即 $7-2=5$)个数。总共至少可留下 15 个数。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	二	三	二	五	二	7	二	三	二	11	二	13	二	三	二	17	二	19	二	三	二	23	二	五	二	三	二	29	二	31
1						7				11		13				17		19				23						29		31

1	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二	13	二	三	二	三	二	19	二	三	二	三	二	五	二	三	二	三	二

卅一		七		十一		七			十七	十一	十九	十三				十七		十九			廿三	廿三					廿九	廿九		卅一

$[962/2/3/5/31]=1$。$31-2\times8+1=16$。$3\times16\times1=48$。

966：$966=2\times3\times5\times32+6$。$966=3\times322+0$；$966=5\times193+1$；$966=7\times138+0$；$966=11\times87+9$；$966=13\times74+4$；$966=17\times56+14$；$966=19\times50+16$；$966=23\times42+0$；$966=29\times33+9$；$966=31\times31+5$。

将 1 到 966 的数排成有 30 列的表（$30=2\times3\times5$）。

经 E－筛选，筛去为 $E_2=2t$、$E_3=3t$、$E_5=5t$ 的数。再经 G－筛选，筛去为 $G_3=3t+0$、$G_5=5t+1$ 的数得：

五	二	三	二	五	二	7	二	三	二	五	二	13	二	三	二	17	二	19	二	三	二	23	二	五	二	三	二	29	二
五	二	三	二	五	二	37	二	三	二	五	二	43	二	三	二	47	二	49	二	三	二	53	二	五	二	三	二	59	二
五	二	三	二	五	二	67	二	三	二	五	二	73	二	三	二	77	二	79	二	三	二	83	二	五	二	三	二	89	二
五	二	三	二	五	二	97	二	三	二	五	二	103	二	三	二	107	二	109	二	三	二	113	二	五	二	三	二	119	二
五	二	三	二	五	二	127	二	三	二	五	二	133	二	三	二	137	二	139	二	三	二	143	二	五	二	三	二	149	二
五	二	三	二	五	二	157	二	三	二	五	二	163	二	三	二	167	二	169	二	三	二	173	二	五	二	三	二	179	二
五	二	三	二	五	二	187	二	三	二	五	二	193	二	三	二	197	二	199	二	三	二	203	二	五	二	三	二	209	二
五	二	三	二	五	二	217	二	三	二	五	二	223	二	三	二	227	二	229	二	三	二	233	二	五	二	三	二	239	二
五	二	三	二	五	二	247	二	三	二	五	二	253	二	三	二	257	二	259	二	三	二	263	二	五	二	三	二	269	二
五	二	三	二	五	二	277	二	三	二	五	二	283	二	三	二	287	二	289	二	三	二	293	二	五	二	三	二	299	二
五	二	三	二	五	二	307	二	三	二	五	二	313	二	三	二	317	二	319	二	三	二	323	二	五	二	三	二	329	二
五	二	三	二	五	二	337	二	三	二	五	二	343	二	三	二	347	二	349	二	三	二	353	二	五	二	三	二	359	二
五	二	三	二	五	二	367	二	三	二	五	二	373	二	三	二	377	二	379	二	三	二	383	二	五	二	三	二	389	二
五	二	三	二	五	二	397	二	三	二	五	二	403	二	三	二	407	二	409	二	三	二	413	二	五	二	三	二	419	二
五	二	三	二	五	二	427	二	三	二	五	二	433	二	三	二	437	二	439	二	三	二	443	二	五	二	三	二	449	二
五	二	三	二	五	二	457	二	三	二	五	二	463	二	三	二	467	二	469	二	三	二	473	二	五	二	三	二	479	二
五	二	三	二	五	二	487	二	三	二	五	二	493	二	三	二	497	二	499	二	三	二	503	二	五	二	三	二	509	二
五	二	三	二	五	二	517	二	三	二	五	二	523	二	三	二	527	二	529	二	三	二	533	二	五	二	三	二	539	二
五	二	三	二	五	二	547	二	三	二	五	二	553	二	三	二	557	二	559	二	三	二	563	二	五	二	三	二	569	二
五	二	三	二	五	二	577	二	三	二	五	二	583	二	三	二	587	二	589	二	三	二	593	二	五	二	三	二	599	二
五	二	三	二	五	二	607	二	三	二	五	二	613	二	三	二	617	二	619	二	三	二	623	二	五	二	三	二	629	二
五	二	三	二	五	二	637	二	三	二	五	二	643	二	三	二	647	二	649	二	三	二	653	二	五	二	三	二	659	二
五	二	三	二	五	二	667	二	三	二	五	二	673	二	三	二	677	二	679	二	三	二	683	二	五	二	三	二	689	二
五	二	三	二	五	二	697	二	三	二	五	二	703	二	三	二	707	二	709	二	三	二	713	二	五	二	三	二	719	二
五	二	三	二	五	二	727	二	三	二	五	二	733	二	三	二	737	二	739	二	三	二	743	二	五	二	三	二	749	二
五	二	三	二	五	二	757	二	三	二	五	二	763	二	三	二	767	二	769	二	三	二	773	二	五	二	三	二	779	二
五	二	三	二	五	二	787	二	三	二	五	二	793	二	三	二	797	二	799	二	三	二	803	二	五	二	三	二	809	二
五	二	三	二	五	二	817	二	三	二	五	二	823	二	三	二	827	二	829	二	三	二	833	二	五	二	三	二	839	二
五	二	三	二	五	二	847	二	三	二	五	二	853	二	三	二	857	二	859	二	三	二	863	二	五	二	三	二	869	二
五	二	三	二	五	二	877	二	三	二	五	二	883	二	三	二	887	二	889	二	三	二	893	二	五	二	三	二	899	二
五	二	三	二	五	二	907	二	三	二	五	二	913	二	三	二	917	二	919	二	三	二	923	二	五	二	三	二	929	二
五	二	三	二	五	二	937	二	三	二	五	二	943	二	三	二	947	二	949	二	三	二	953	二	五	二	三	二	959	二
五	二	三	二	五	二																								

筛剩 6 列。这 6 列分别被 $A=30t+7$、$A=30t+13$、$A=30t+19$、$A=30t+17$、$A=30t+23$、$A=30t+29$ 描述。

再经 E－筛选与 G－筛选，筛去 $E_7=7t$、$G_7=7t+0$ 的数；筛去 $E_{11}=11t$、$G_{11}=11t+9$ 的数；筛去 $E_{13}=13t$、$G_{13}=13t+4$ 的数；筛去 $E_{17}=17t$、$G_{17}=17t+14$ 的数；筛去 $E_{19}=19t$、$G_{19}=19t+16$ 的数；筛去 $E_{23}=23t$、$G_{23}=23t+0$ 的数；筛去 $E_{29}=29t$、$G_{29}=29t+9$ 的数；筛去 $E_{31}=31t$、$G_{31}=31t+5$；的数；得：

五	二	三	二	五	二	七	二	三	二	五	二	十三	二	三	二	十三	二	十九	二	三	二	廿三	二	五	二	三	二	廿九	二
五	二	三	二	五	二	37	二	三	二	五	二	十三	二	三	二	47	二	七	二	三	二	十一	二	五	二	三	二	59	二
五	二	三	二	五	二	廿九	二	三	二	五	二	十九	二	三	二	七	二	79	二	三	二	83	二	五	二	三	二	89	二
五	二	三	二	五	二	十一	二	三	二	五	二	103	二	三	二	107	二	109	二	三	二	113	二	五	二	三	二	七	二
五	二	三	二	五	二	127	二	三	二	五	二	七	二	三	二	137	二	139	二	三	二	十一	二	五	二	三	二	十九	二
五	二	三	二	五	二	157	二	三	二	五	二	十一	二	三	二	十七	二	十三	二	三	二	十三	二	五	二	三	二	179	二
五	二	三	二	五	二	十一	二	三	二	五	二	193	二	三	二	197	二	十三	二	三	二	七	二	五	二	三	二	十一	二
五	二	三	二	五	二	七	二	三	二	五	二	223	二	三	二	227	二	十一	二	三	二	233	二	五	二	三	二	239	二
五	二	三	二	五	二	十三	二	三	二	五	二	十一	二	三	二	257	二	七	二	三	二	十九	二	五	二	三	二	十七	二
五	二	三	二	五	二	十三	二	三	二	五	二	283	二	三	二	七	二	十七	二	三	二	293	二	五	二	三	二	十三	二
五	二	三	二	五	二	307	二	三	二	五	二	313	二	三	二	十一	二	十一	二	三	二	十七	二	五	二	三	二	七	二
五	二	三	二	五	二	十七	二	三	二	五	二	七	二	三	二	347	二	349	二	三	二	353	二	五	二	三	二	359	二
五	二	三	二	五	二	367	二	三	二	五	二	373	二	三	二	十三	二	379	二	三	二	十一	二	五	二	三	二	389	二
五	二	三	二	五	二	397	二	三	二	五	二	十三	二	三	二	十一	二	409	二	三	二	七	二	五	二	三	二	419	二
五	二	三	二	五	二	七	二	三	二	五	二	十三	二	三	二	十九	二	十七	二	三	二	443	二	五	二	三	二	十一	二
五	二	三	二	五	二	457	二	三	二	五	二	463	二	三	二	467	二	七	二	三	二	十一	二	五	二	三	二	479	二
五	二	三	二	五	二	487	二	三	二	五	二	十一	二	三	二	七	二	499	二	三	二	503	二	五	二	三	二	509	二
五	二	三	二	五	二	十一	二	三	二	五	二	523	二	三	二	十七	二	十九	二	三	二	十三	二	五	二	三	二	七	二
五	二	三	二	五	二	547	二	三	二	五	二	七	二	三	二	557	二	十一	二	三	二	十三	二	五	二	三	二	569	二
五	二	三	二	五	二	577	二	三	二	五	二	十一	二	三	二	587	二	十三	二	三	二	593	二	五	二	三	二	599	二
五	二	三	二	五	二	607	二	三	二	五	二	613	二	三	二	617	二	619	二	三	二	七	二	五	二	三	二	十七	二
五	二	三	二	五	二	七	二	三	二	五	二	十七	二	三	二	十一	二	十一	二	三	二	653	二	五	二	三	二	659	二
五	二	三	二	五	二	十三	二	三	二	五	二	673	二	三	二	十七	二	七	二	三	二	683	二	五	二	三	二	十三	二
五	二	三	二	五	二	十七	二	三	二	五	二	十九	二	三	二	七	二	709	二	三	二	十一	二	五	二	三	二	十三	二
五	二	三	二	五	二	727	二	三	二	五	二	733	二	三	二	十一	二	739	二	三	二	743	二	五	二	三	二	七	二
五	二	三	二	五	二	十一	二	三	二	五	二	七	二	三	二	十三	二	769	二	三	二	773	二	五	二	三	二	十一	二
五	二	三	二	五	二	787	二	三	二	五	二	十三	二	三	二	十三	二	十七	二	三	二	十一	二	五	二	三	二	809	二
五	二	三	二	五	二	十九	二	三	二	五	二	十一	二	三	二	827	二	829	二	三	二	七	二	五	二	三	二	839	二
五	二	三	二	五	二	七	二	三	二	五	二	853	二	三	二	857	二	859	二	三	二	863	二	五	二	三	二	十一	二
五	二	三	二	五	二	877	二	三	二	五	二	883	二	三	二	887	二	七	二	三	二	十九	二	五	二	三	二	廿九	二
五	二	三	二	五	二	907	二	三	二	五	二	十一	二	三	二	七	二	919	二	三	二	十三	二	五	二	三	二	929	二
五	二	三	二	五	二	廿九	二	三	二	五	二	廿三	二	三	二	十九	二	十三	二	三	二	十三	二	五	二	三	二	七	二
五	二	三	二	五	二																								

七	37	廿九	十一	127	157	十一	七	十三	十三	307	十七	367	397	七	457	487	十一	547	577	607	七	十三	十七	727	十一	787	十九	七	877	907
廿九																														

十三	十三	十九	103	七	十一	193	223	十一	283	313	七	373	十三	十三	463	十一	523	七	十一	613	十七	673	十九	733	七	十三	十一	853	883	十一
廿三																														

十三	47	七	107	137	十七	197	227	257	七	十一	347	十三	十一	十九	467	七	十七	557	587	617	十一	十七	七	十一	十三	十三	827	857	887	七
十九																														

十九	七	79	109	139	十三	十三	十一	七	十七	十一	349	379	409	十七	七	499	十九	十一	十三	619	十一	七	709	739	769	十七	829	859	七	919
十三																														

廿三	十一	83	113	十一	十三	七	233	十九	293	十七	353	十一	七	443	十一	503	十三	十三	593	七	653	683	十一	743	773	十一	七	863	十九	十三
十三																														

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com