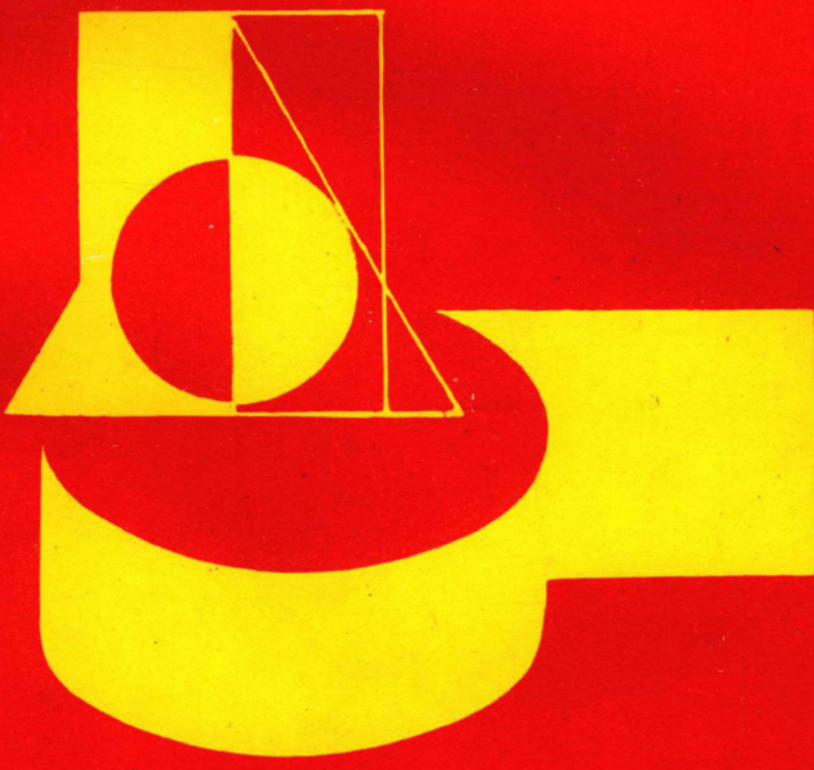
高考指导丛书

高中数学解题方法与高考试题分类解析



主编　　郎文祥

贵州教育出版社

高 中 数 学

解题方法与高考试题分类解析

主　编　郎为祥

编　委　刘声乐　郑　黎　喻浩舒
　　　　杨沛瑜　王　立　秦承俊
　　　　张锡丽　陈炳林　李正书

贵 州 教 育 出 版 社

内容提要

本书收集了 1985—1993 年间全国高考试题及全国各主要省市近几年的毕业试题、预考试题、统考试题等，以此为素材，按大纲规定的必修课的知识体系，与教材同步地分为若干章，每章均由“知识点”、“能力要求”、“典型试题”组成，并附有试题的详细提示和解答。

本书是开发题库资料为常规教学服务的有益尝试，所选题目具有纵横联系数学各科知识体系、题型全面、难易适度等特点，实为教师研究考试动态、试题规律，指导学生进行学习和总复习的好资料，由于与教材同步，高中各年级师生都适用。

前　言

众所周知，考试是整个教学过程中的重要环节，而考试试题的设计，从某种意义上说是一种艺术。高考试题还是一个“指挥棒”，既要有利于高等学校选拔合格新生，又要有利于促进中学的常规教学。这个“指挥棒”的“设计”到“制造”经过了十多年的探索，特别是通过近几年高考制度的改革，命题结构逐渐趋于定型，形成了一种稳定的风格。各地的数学教师、研究人员，也随之效仿，进行了不同程度的考试命题改革的尝试。这些改革尝试的结晶，主要体现在各地的各级统考试题、毕业会考试题、模拟考试题中。这些试题具有纵横联系数学各种知识体系、题型全面、难易适度等特点，实为教师研究考试动态、指导学生进行复习的好资料。

怎样利用这些素材为常规教学服务，从而大面积提高合格率、优生率、升学率，就是本书编写的宗旨。

编者是以全国高考试题和部分省市的毕业、统考、模拟考试题为基本素材，以新大纲（必修课）的知识结构为纵线，以高考试题对考生的能力要求为横线编写本书的。本书包括整个高中数学的内容，且与教材同步地分为若干章，每章均由按选择题、填空题、解答题等题型归类的大量试题组成。

本书的特点在于：一、使师生能在常规教学中，从高一年级起就同步地了解各章知识点，了解当前考试中最流行的试题及解答，以新颖的题目丰富教学内容；经过严格筛选出的每一试题不落俗套，有基础知识的正用、逆用，也有变用和巧用；能力题给予了详细解答，选择题、填空题都给出了提示。二、具有题库性质，而又不同于题库资料。本书中的试题是在很多套试题中发掘出的，能促进“三基”落实，又富于灵活性、启发性，并集中于一“点”（大纲规定的知识点），大大方便了师生常规的教与学。三、为读者提供了难得的解题信息。本书的试题部分来自全国的高考试题，更多的是取材于各省市的各级试题，编者还在不影响所选题目原意的情况下，根据本书题型要求对少数试题作了文字上的改动。所有这些题既反映出各地教师对大纲中教学要求的具体理解，也反映出各地的教学水平，为读者提供了教学、复习和研究考试动态的好素材，且具有长期的保留价值。

《全国普通高等学校招生统一考试数学科说明》是在 1991 年颁布并开始实施的。作为考试的指导性文件，它包括了目标、标准系统、内容系统和说明系统。这些目标只有落实到具体内容才能成为行为化、操作化的目标，因此在知识技能内容中，就要对知识技能系统进行分解，分到最后，就是知识点。而考查数学思想方法是数学科考试说明中的一项基本要求，同时也是突出数学科考试的特点。通过对近十年数学高考试题的研究，我们对加强数学思想和方法的教学有新的体会，这些体会列于本书之前，供教师、研究人员和学生参考。由于水平有限，错谬之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

解析几何

附　　录

加强数学思想和方法的教学

——高考试题给予的重要信息

一年一度的高考试题已经过了十多年的改革探索，尽管各年的难度有变化，考分时升时降，抛开个别原因和偶然因素及命题的随机性，我们认为，近几年的高考命题的题型构成、学科构成已经规范化。从 1992 年的试题就可看出以下几个明显的动向：首先是试题紧靠大纲，在“考试说明”指定的范围内命题；其二是结构稳定，保持了连续性；其三是难度适中，不设置压轴题，从而使高考的区分和选拔作用不是由个别题目而是由整份试题集体完成。而试题给予我们的重要信息应是：在大面积覆盖“三基”的同时，注重突出数学基本思想和基本方法的考查。试题对教学大纲中要求的三大能力即逻辑思维能力、空间想象能力及计算能力作了全面考查，更注重对常用数学思想方法的考查。由国家颁布的评分标准可见，学生能否正确掌握数学思想方法，对得分有重要影响。

在多年的教学活动中，我们发现，有相当一部分学生，虽然掌握了一定的数学知识和方法，但还是有一些应该会做的题目做不出来。这往往表现在不知从什么方向思考，不知从何入手，或在解题过程中迷失方向。这说明数学解题思想不明了，因此确有必要加强数学基本思想和基本方法的教学，并研究和探索如何进行此教学活动。

所谓数学思想，简言之就是思考问题的原则方向，如我们常用到的转化的思想、数形结合的思想、变换与化归的思想等。明了这些思想，解题就有了总体的把握，有了大体的原则。

而数学的基本方法大致分为三类：一般性的逻辑方法，如类比、归纳、演绎、分析、综合、科学猜想等；全局性的数学方法，如字母代替数的方法、坐标法等；技巧性的数学方法，如换元法、待定系数法等。当然数学思想、方法是不能截然分开的，中学数学中用到的各种方法都体现着一定的数学思想，因此，在教学中，讲“方法”应联系“思想”，使学生充分领略数学思想的风采，同时以“思想”指导“方法”以推进数学方法的使用，使两者相得益彰。

下面就高考试题中反映出的几个重要的思想方法进行探讨。

一、换元——转化的思想

高考试题中涉及最多的是转化的思想，例如，从“未知”到“已知”的转化，一般与特殊的转化。为了实现转化引入了许多方法，其中重要的一个是换元法．

换元法指的是将未知量的某个关系式代以一个新变量，使原式得到“简化”的一种解题方法，是整个初等数学中有着广泛应用的方法．

应用换元法的关键在于选择替换未知数．替换未知数选择恰当，就可以使问题简化，便于求解．选择替换未知数没有固定通则，必须从具体题目入手研究．

（一）基本换元法

例 1. 如果实数 x、y 满足 $(x-2)^2+y^2=3$，那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值是（　　）　　（90 年全国）

(A) $\frac{1}{2}$, (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (D) $\sqrt{3}$

解：设 $k=\frac{y}{x}$，则 $y=kx$，代入已知等式得

$$(x-2)^2+(kx)^2=3，即 (k^2+1)x^2-4x+1=0.$$

$\because x\in R$，$\therefore \Delta=(-4)^2-4(k^2+1)\geqslant 0$ 即 $k^2\leqslant 3$，$\therefore k_{max}=\sqrt{3}$，应选 (D)．

例 2. 已知 $0<\alpha<\pi$，证明：$2\sin 2\alpha\leqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$，并讨论 α 为何值时等号成立．（80 年全国）

证：令 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t>0$（$\because 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$），原不等式变为 $2\times 2\times\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\leqslant\frac{1}{t}$

以 $t(1+t^2)^2>0$ 乘不等式两端，问题变为证明 $8t^2(1-t^2)\leqslant(1+t^2)^2$

$\Rightarrow -9t^4+6t^2-1\leqslant 0$

$\Rightarrow -(3t^2-1)^2\leqslant 0$ $\therefore$ 不等式成立．

当且仅当 $t^2=\frac{1}{3}$ 即 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 即 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时等号成立．

例 3. 已知 f 满足 $f(1+2\operatorname{tg}x)=1-3\operatorname{ctg}x$，求 $f(x)$．

解：令 $1+2\operatorname{tg}x=u$，则 $\operatorname{tg}x=\frac{u-1}{2}$，由给定方程知 $u\neq 1$ 于是 $\operatorname{ctg}x=\frac{2}{u-1}$

则 $f(u)=1-3\cdot\frac{2}{u-1}=\frac{u-7}{u-1}$ $\therefore$ $f(x)=\frac{x-7}{x-1}$，验证 $f(x)=\frac{x-7}{x-1}$ 满足给定方程．

例 4. 已知 $\operatorname{tg}x=a$，求 $\frac{3\sin x+\sin 3x}{3\cos x+\cos 3x}$ 的值．（88 年全国）

解：设 $z=\cos x+i\sin x$，已知 $\operatorname{tg}x=a$ 所以 $\frac{z^2-1}{i(z^2+1)}=a$，解得 $z^2=\frac{1+ai}{1-ai}$

则 $\frac{3\sin x+\sin 3x}{3\cos x+\cos 3x}=\frac{3\cdot\frac{z^2-1}{2iz}+\frac{z^6-1}{2iz^3}}{3\cdot\frac{z^2+1}{2z}+\frac{z^6+1}{2z^3}}=\frac{3z^2(z^2-1)+(z^6-1)}{i[3z^2(z^2+1)+(z^6+1)]}$

$=\frac{z^2-1}{i(z^2+1)}\cdot\frac{(z^2+1)^2+2z^2}{(z^2+1)^2}=a\cdot\frac{\frac{4}{(1-ai)^2}+2\cdot\frac{1+ai}{1-ai}}{\frac{4}{(1-ai)^2}}=\frac{a}{2}(a^2+3)$．

【说明】通过换元把三角问题转化为关于复数 z 的代数问题加以解决．

例 5. 求椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点 P，使 P 到直线 $x+2y+18=0$ 的距离最短，并求此距离．

解：因为点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上，故可设点 $P(x,y)$ 的坐标为 $x=3\cos\varphi$，$y=2\sin\varphi$，则点 P 到直线 $x+2y+18=0$ 的距离

$$d=\frac{|3\cos\varphi+4\sin\varphi+18|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}|3\cos\varphi+4\sin\varphi+18|.$$

令 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$ 则 $d=\frac{1}{\sqrt{5}}|5\cos(\varphi-\alpha)+18|$．

当 $\varphi-\alpha=\pi$ 时，$\cos(\varphi-\alpha)$ 有最小值 -1，d 也有最小值 $\frac{13}{5}\sqrt{5}$

这时 $x=3\cos\varphi=3\cos(\alpha+\pi)=-3\cos\alpha=-3\times\frac{3}{5}=-\frac{9}{5}$

$y=2\sin\varphi=2\sin(\alpha+\pi)=-2\sin\alpha=-2\times\frac{4}{5}=-\frac{8}{5}$

因此所求点 P 为$(-\frac{9}{5},-\frac{8}{5})$，最短距离为$\frac{13}{5}\sqrt{5}$．

【说明】本题的解法是通过换元将代数函数的最小值问题转化为三角函数的最小值问题．

(二)二元换元法

对于两个任意的实数 a 与 b，总可设 $a=s+t$，$b=s-t$，其中 $s=\frac{a+b}{2}$，$t=\frac{a-b}{2}$，这种把两个毫无关联的量分别表示成另两个量的和与差形式的方法称为二元换元法．

例 6. 函数 $y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ 的最大值是____． (90 年全国)

解：令 $\sin x=s+t$，$\cos x=s-t$

则由 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 得 $s^2+t^2=\frac{1}{2}$，于是 $t^2=\frac{1}{2}-s^2$，$s\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\therefore\quad y=s^2-t^2+2s=2s^2+2s-\frac{1}{2}=2(s+\frac{1}{2})^2-1$

故当 $s=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$时，y 的最大值为$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$．

【说明】此题通过换元，将问题转化为求二次函数在特定区间上的最大值，使问题简化了．

例 7. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$，求 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$的值． (90 年全国)

解：令 $\alpha=A+B$，$\beta=A-B$

则 $\sin(A+B)+\sin(A-B)=\frac{1}{4}$，即 $2\sin A\cos B=\frac{1}{4}$

$\cos(A+B)+\cos(A-B)=\frac{1}{3}$，即 $2\cos A\cos B=\frac{1}{3}$

两式相除得 $\operatorname{tg}A=\frac{3}{4}$

$\therefore\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}2A=\frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}=\frac{24}{7}$

【说明】此法既能改变式子结构，又能使加、减、乘、除、乘方运算得到简化，借助于此，可另辟解题新径。

例 8. 设实数 a、b、c 满足$\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0\\ b^2+c^2+bc-6a+6=0,\end{cases}$ (86 年高中联赛)

求 a 的取值范围．

解：令 $b=s+t$，$c=s-t$

则得$\begin{cases}t^2-s^2=a^2-8a+7\\ t^2+3s^2=6a-6\end{cases}$，解关于 s^2，t^2 的方程组得

$$s^2=\frac{(a-1)^2}{4} \tag{1}$$

$$t^2=\frac{-3(a^2-10a+9)}{4} \tag{2}$$

在(2)式中，由 $t^2\geqslant0$，得 $a^2-10a+9\leqslant0$，解得 $1\leqslant a\leqslant9$

$\therefore\quad a$ 的取值范围是：$1\leqslant a\leqslant9$．

【说明】用二元代换将问题转化为二元一次方程组，熔非负数性质于一炉，出奇制胜．

(三)整体换元法

例 9. 求$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$的值．

解:设$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=x$,两边立方并整理得 $x^3+3x-4=0$

即$(x-1)(x^2+x+4)=0$,$\therefore x=1$;或$x^2+x+4=0$(无实根,舍),

$\therefore x=1$,即$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

这是一个很简单的例题,但它说明了一个重要的解题方法,即整体换元法.

用整体思考方法解某些数学题,可以使许多用常规方法难于解决的问题得到简捷、巧妙的解决。下面举例加以说明:

例 10. 已知$\log_7(2\sqrt{2}-1)+\log_2(\sqrt{2}+1)=a$,

求$\log_7(2\sqrt{2}+1)+\log_2(\sqrt{2}-1)$的值.

解:设$\log_7(2\sqrt{2}+1)+\log_2(\sqrt{2}-1)=x$,把此式与已知条件构成联立方程组,相加,得

$$x+a=\log_7(2\sqrt{2}+1)+\log_7(2\sqrt{2}-1)+\log_7(\sqrt{2}+1)+\log_2(\sqrt{2}-1)$$

$$=\log_7 7+\log_2 1=1$$

$\therefore\ x=1-a$,则$\log_7(2\sqrt{2}+1)+\log_2(\sqrt{2}-1)=1-a$

【说明】常规方法是把注意力局部地放在把$\log_7(2\sqrt{2}+1)$转化为$\log_7(2\sqrt{2}-1)$及把$\log_7(\sqrt{2}-1)$转化为$\log_7(\sqrt{2}+1)$上,增加了解题难度,而整体换元转化就显得简捷.

例 11. 已知$\sin\alpha+3\cos\alpha=2$,求$\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$的值.

解:设:$\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=K$,把它和已知条件联立可得:

$$\sin\alpha=\frac{1+K}{2-K},\cos\alpha=\frac{1-K}{2-K}\quad(K\neq 2),$$

$\because\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\therefore\ (\dfrac{1+K}{2-K})^2+(\dfrac{1-K}{2-K})^2=1$,即 $K^2+4K-2=0$

$\therefore\ K=-2\pm\sqrt{6}$,即$\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=-2\pm\sqrt{6}$.

例 12. 求$\cos 40°\cos 80°+\cos 80°\cos 160°+\cos 160°\cos 40°$的值.

解:设 $m=\cos 40°\cos 80°+\sin 80°\cos 160°+\cos 160°\cos 40°$

$n=\sin 40°\sin 80°+\sin 80°\sin 160°+\sin 160°\sin 40°$

则 $m+n=\cos(80°-40°)+\cos(160°-80°)+\cos(160°-40°)=\cos 40°+\cos 80°-\dfrac{1}{2}$ (1)

$m-n=\cos(80°+40°)+\cos(160°+80°)+\cos(160°+40°)$

$=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\cos 200°$ (2)

(1)+(2):$2m=(\cos 40°+\cos 80°)+\cos 200°-\dfrac{3}{2}$

$=2\cos 60°\cos 20°-\cos 20°-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore m=-\dfrac{3}{4}$,即 $\cos 40°\cos 80°+\cos 80°\cos 160°+\cos 160°\cos 40°=-\dfrac{3}{4}$.

【说明】此题通过整体代换,同时又通过构造对偶数或对偶式来造成对称更简化了解题过程,避免了复杂运算.

例 13. 求$\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$的值.　　(92 年全国)

解：设 $x=\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$

$y=\cos^2 20°+\sin^2 80°-\sqrt{3}\cos 20°\sin 80°$

则 $x+y=2-\sqrt{3}\sin 60°=\frac{1}{2}$

$x-y=-\cos 40°+\cos 160°+\sqrt{3}\sin 100°=-2\sin 60°\sin 100°+\sqrt{3}\sin 100°=0$

得 $x=y=\frac{1}{4}$.

例 14. 求值：$\sin 10°\cdot\sin 30°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°$.

解：设 $A=\sin 10°\cdot\sin 30°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°$

$B=\cos 10°\cdot\cos 30°\cdot\cos 50°\cdot\cos 70°$

则 $AB=\frac{1}{2}\sin 20°\cdot\frac{1}{2}\sin 60°\cdot\frac{1}{2}\sin 100°\cdot\frac{1}{2}\sin 140°$

$=\frac{1}{16}\cos 70°\cdot\cos 30°\cdot\cos 10°\cdot\cos 50°=\frac{B}{16}$.

$\because$ $B\neq 0$，$\therefore A=\frac{1}{16}$，即 $\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°=\frac{1}{16}$.

总之，应用整体换元，主要是从分析问题的条件或结论的表达式、内部结构的特殊性出发的，这样解题思路便十分清晰，运算化简也较简单，因此，解题中整体换元是培养观察能力和综合分析能力的有效途径．

(四)三角代换

例 15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$，$A$、$B$ 是椭圆上两点，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于 $P(x_0,0)$，证明 $\quad -\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$. (92 年全国)

简析：解法一：见附录．

解法二：若是将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 理解为以离心角 θ 为参数的动点 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$ 的轨迹，可以得出如下的证法，显示运用三角代换处理问题的技巧．

设 $A(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$、$B(a\cos\theta,b\sin\theta)$，显然 $\cos\alpha\neq\cos\theta$

(1)当 $\sin\alpha\neq\sin\theta$ 时，线段 AB 的中垂线方程为

$$y=\frac{a\cos\alpha-a\cos\theta}{b\sin\theta-b\sin\alpha}\left(x-\frac{a\cos\alpha+a\cos\theta}{2}\right)+\frac{b\sin\alpha+b\sin\theta}{2}$$

令 $y=0$，得 $x_0=\frac{a^2-b^2}{2a}(\cos\alpha+\cos\theta)$

$\because -2<\cos\alpha+\cos\theta<2\quad\therefore -\frac{a^2-b^2}{2}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}(x_0\neq 0)$.

(2)当 $\sin\alpha=\sin\theta$ 时，为 y 轴，$x=0$ 仍满足，故 $-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$

例 16. 求 $y=x+\sqrt{5-x^2}$ 的值域．

解：令 $x=\sqrt{5}\sin\theta\quad(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，得

$$y=\sqrt{5}\sin\theta+\sqrt{5-(\sqrt{5}\sin\theta)^2}=\sqrt{5}\sin\theta+\sqrt{5}\cos\theta=\sqrt{10}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$$

$\because -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\quad\therefore -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$. 于是 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leqslant 1$

则$-\sqrt{5}\leqslant\sqrt{10}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{10}$　即$-\sqrt{5}\leqslant y\leqslant\sqrt{10}$　故所求值域为$[-5,\sqrt{10}]$.

一般来讲，当自变量$x\in[-a,a]$时，可作代换$x=a\sin\theta$，其中$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，

或$x=a\cos\theta$，其中$\theta\in[0,\pi]$；

当自变量$x\geqslant a\geqslant 0$时，可令$x=a\sec\theta$，其中$\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$；

当x为任意实数时，可令$x=\mathrm{tg}\theta$，其中$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$等等.　　(89年全国)

例17. 已知$a>0$，且$a\neq 1$，试求使方程

$\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$有解的$k$的取值范围.

略解：原方程等价于$x-ak=\sqrt{x^2-a^2}$ $(|x|>a)$　$\because a\neq 0$，

$\therefore k=\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}$　$(|x|>a)$　设$x=a\csc\theta(\theta\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}))$

则$k=\frac{1}{\sin\theta}-|\mathrm{ctg}\theta|$.

当$\theta\in(-\frac{\pi}{2},0)$时，$k=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2}$. $\because -\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<0$，$\therefore \mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2}<-1$　即$k<-1$.

当$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$k=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}$. $\because 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$，$\therefore 0<\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}<1$　即$0<k<1$.

综合上述可知，k的取值范围是$k<-1$或$0<k<1$.

【说明】此题如按常法先求解，后讨论k的取值范围，难免会出现众多变元的干扰而导致思维的混乱。而通过转化为k的一个函数这种三角代换，简化了解题过程，使问题变为简单。

例18. 解不等式$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x^2}{1+x^2}>0$.

解：令$x=\mathrm{tg}\theta,\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则不等式化为　$\sin\theta+\cos 2\theta>0$　　$2\sin^2\theta-\sin\theta-1<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<\sin\theta<1$　　$-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore x=\mathrm{tg}\theta>\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$　即$x>-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【说明】如通分化为$x\sqrt{1+x^2}+1-x^2>0$，解题过程是相当繁琐的，这里联系三角知识，运用三角代换，起到化繁为简的作用.

例19. 求证：$ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$.

简析：此题证法较多，此处用三角换元．设$\sqrt{a^2+b^2}=m$，$\sqrt{c^2+d^2}=n$

令$a=m\cos\alpha$，则$b=m\sin\alpha$

令$c=n\cos\beta$，则$d=n\sin\beta$

此时$ac+bd=mn\cos\alpha\cos\beta+mn\sin\alpha\sin\beta=mn\cos(\alpha-\beta)$

而　$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=mn$，故原不等式成立．

(五)一点注意——变量代换要注意等价性

通过引入参变量换元能把复杂问题转化，但应该注意引入参变量的合理性，特别注意引入的参变量与原条件的等价性，要防止形式套用，忽视条件，违背题目原意和以偏代全，以免导出错误的结论。

例 20. 求函数 $y=\sqrt{x^2-8x+17}+\sqrt{x^2+4}$ 的最小值.

错解：$\because y=\sqrt{(x-4)^2+1}+\sqrt{x^2+2^2}$

用复变量代换：设 $z_1=(x-4)+i$， $z_2=-x-2i$

则 $|z_1|=\sqrt{(x-4)^2+1^2}$， $|z_2|=\sqrt{x^2+2^2}$， $|z_1+z_2|=|-4-i|=\sqrt{17}$.

由 $y=|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$， $\therefore y_{min}=\sqrt{17}$.

【说明】此解注意到两被开方数的形式结构，选用了复变量代换，但要使 $y=\sqrt{17}$ 须有 $\frac{x-4}{1}=\frac{-x}{-2}\Rightarrow x=8$，而将 $x=8$ 代入原式中得 $y=3\sqrt{17}$，显然不可能的。错误原因是题设变量不能使公式 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$ 中的等号成立，即 y 不能达到最小值.

正确解法是：设 $z_1=4-x+i$， $z_2=x+2i$

则 $|z_1|=\sqrt{x^2-8x+17}$， $|z_2|=\sqrt{x^2+2^2}$， $|z_1+z_2|=|4+3i|=5$

$y=|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|=5$

当 $\frac{x}{2}=\frac{4-x}{1}$ 时，$y=5$，即 $x=\frac{8}{3}$ 时，$y_{min}=5$.

例 21. 已知四个数成等比数列，其积为 16，中间两数之和为 15，求其公比.

解：设这四个数为：$\frac{a}{q^3},\frac{a}{q},aq,aq^3$

由题意得 $\begin{cases}a^4=16\\ \frac{a}{q}+aq=5\end{cases}$，解得 $a=\pm2,q=\pm2$，或 $q=\pm\frac{1}{2}$.

所求公比为 $q^2=4$，或 $q^2=\frac{1}{4}$.

【说明】公比为 $q^2>0$ 显然是篡改了题意，这样就出现了丢解现象.

正确设法为：设四个数依次为：a,aq,aq^2,aq^3

则 $\begin{cases}a^4\cdot q^6=16\\ aq(1+q)=5\end{cases}$ 解得公比 q 为 $4,\frac{1}{4},\frac{-33\pm5\sqrt{41}}{8}$.

例 22. 求过两直线 $x-3y=0$ 和 $2x-y-3=0$ 的交点且与坐标原点距离为 $\frac{3}{\sqrt{5}}$ 的直线方程.

错解：设所求直线方程为 $(x-3y)+\lambda(2x-y-3)=0$，$\lambda\in R$

即 $(2\lambda+1)x-(\lambda+3)y-3\lambda=0$.

由已知距离值，得 $\frac{|-3\lambda|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda+3)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

解得 $\lambda=-1$，$x+2y-3=0$ 为所求.

【说明】此处用增设的直线系方程，不能代表待求方程之直线所有可能出现的位置，从而造成漏解.

正确的设法应为 $m(x-3y)+n(2x-y-3)=0$，其中 $m、n\in R$，$m^2+n^2\neq0$.

二、分类讨论，统一结果

——分类思想例说

分类讨论的思想在中学数学中占有重要地位，分类讨论型题也就成为高考中考查能力、拉

开分数差距的理想题型与经久不衰的热点。恰当分类逐类讨论的作用是把整体问题化为部分问题，常能更清楚地暴露事物的本质，化成部分后，增加了解题条件。这还是解含参数的题型的基本思想。

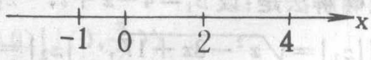
（一）根据定义分类讨论型

例 23. 试就 k 的值讨论方程$\dfrac{x^2}{4-k}+(k-2)y^2=1+k$ 的曲线的形状．

思考：形如 $Ax^2+Cy^2=k$ 的二次曲线的类型取决于 A、C、k 的符号，故本题应讨论$\dfrac{1}{4-k}$，$k-2$，$1+k$ 的符号关系从而决定曲线的类型．用分段讨论法．

解：显然 $k\neq 4$，以下分段讨论

(1) 当 $k<-1$ 时，$\dfrac{1}{4-k}>0$，$k-2<0$，$1+k<0$



原方程变形为$\dfrac{x^2}{(4-k)(1+k)}+\dfrac{y^2}{\dfrac{1+k}{k-2}}=1$　　(1)

$\because (4-k)(1+k)<0$，$\dfrac{1+k}{k-2}>0$，$\therefore$曲线为实轴在 y 轴的双曲线．

(2) 当 $k=-1$ 时，原方程为$\dfrac{x^2}{5}-3y^2=0$

即 $(x+\sqrt{15}y)(x-\sqrt{15}y)=0$，$\therefore$曲线为两条相交直线．

(3) 当$-1<k<2$ 时，$\because (4-k)(1+k)>0$，$\dfrac{k+1}{k-2}<0$.

由方程 (1) 可知，曲线为实轴在 x 轴的双曲线．

(4) 当 $k=2$ 时，方程为$\dfrac{x^2}{2}=3$，即 $(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=0$.

$\therefore$曲线为两条平行直线．

(5) 当 $2<k<4$ 时，$\because (4-k)(1+k)>0$，$\dfrac{k+1}{k-2}>0$

又$\because$ $\dfrac{1+k}{k-2}-(4-k)(1+k)=\dfrac{(1+k)(1+k^2-6k+8)}{k-2}=\dfrac{(1+k)(k-3)^2}{k-2}\geqslant 0$

若 $k=3$，方程为 $x^2+y^2=4$，曲线为圆；

若 $k\neq 3$，由方程 (1) 可知，曲线是长轴在 y 轴的椭圆．

(6) 当 $k>4$ 时，$\because (4-k)(1+k)<0$，$\dfrac{1+k}{k-2}>0$

由方程 (1) 可知，曲线为实轴在 y 轴的双曲线．

【说明】根据定义分类讨论，例如讨论含字母参数的二次曲线的形状问题，一般只要掌握了定义的本质含义，又具有一定的恒等变形能力，是不难获得正确结论的．

例 24. 当 k 为什么实数时，$\sin x=5+4k$ 才有意义？

解：$\because |\sin x|\leqslant 1$，即$|5+4k|\leqslant 1$.　分 $k<-\dfrac{5}{4}$　及 $k\geqslant -\dfrac{5}{4}$两段讨论：

当 $k<-\dfrac{5}{4}$时，不等式为$-5-4k\leqslant 1$，$\therefore k\geqslant -\dfrac{3}{2}$，$\therefore -\dfrac{3}{2}\leqslant k<-\dfrac{5}{4}$.

当 $k\geqslant -\dfrac{5}{4}$时，不等式为 $5+4k\leqslant 1$，$\therefore k\leqslant -1$，$\therefore -\dfrac{5}{4}\leqslant k\leqslant -1$.

故不等式的解为$-\dfrac{3}{2}\leqslant k\leqslant -1$，即当$-\dfrac{3}{2}\leqslant k<-1$ 时 $\sin x=5+4k$ 才有意义．

读者可以根据 m 的取值，讨论曲线系方程

$mx^2+2y^2-4mx+4my+m^2+3m+2=0$ 表示什么样的曲线．

（二）根据运算分类讨论型

例 25. 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0\ (a\in R)$ 的解集依次记为 A 与 B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围．（90 年上海）

解：由 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$，得 $A=\{x\,|\,2a\leqslant x\leqslant a^2+1,\ x\in R\}$．

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$，即 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$

当 $3a+1\geqslant 2$ 即 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时，得 $B=\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 3a+1,\ x\in R\}$．

当 $3a+1<2$ 即 $a<\dfrac{1}{3}$ 时，得 $B=\{x\,|\,3a+1\leqslant x\leqslant 2,\ x\in R\}$．

$\therefore$ 当 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时，由 $A\subseteq B$，得 $\begin{cases}2\leqslant 2a\\ a^2+1\leqslant 3a+1\end{cases}$，$\therefore 1\leqslant a\leqslant 3$．

当 $a<\dfrac{1}{3}$ 时，由 $A\subseteq B$，得 $\begin{cases}3a+1\leqslant 2a\\ a^2+1\leqslant 2\end{cases}$，$\therefore a=-1$．

故使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围是 $\{a\,|\,1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$．

例 26. 设 a 为非零实数，求解 $ax^2-a^2x-x+a>0$．

分析：原不等式等价于：$(ax-1)(x-a)>0$　　(1)

显然应对集合 $\{a\,|\,a\in R,\ a\neq 0\}$ 分类，对 a 进行讨论，即把区间 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 划分成小区间，究竟那些特殊值作为小区间的端点呢？观察 (1) 式，由 $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-1}{a}$ 启发即知．

解：当 $a>1$ 时，$a>\dfrac{1}{a}$，其解集为 $\{x\,|\,x>a$ 或 $x<\dfrac{1}{a}\}$；

当 $a=1$ 时，其解集为 $\{x\,|\,x\in R\quad x\neq 1\}$；

当 $0<a<1$ 时，$a<\dfrac{1}{a}$，其解集为 $\{x\,|\,x>\dfrac{1}{a}$ 或 $x<a\}$；

当 $-1<a<0$ 时，$a>\dfrac{1}{a}$，其解集为 $\{x\,|\,\dfrac{1}{a}<x<a\}$；

当 $a=-1$ 时，解集为 $\varnothing$；

当 $a<-1$ 时，$a<\dfrac{1}{a}$，其解集为 $\{x\,|\,a<x<\dfrac{1}{a}\}$．

（三）根据推理分类讨论

例 27. 已知三个平面两两相交，有三条交线，求证这三条交线交于一点或互相平行．（84 年全国）

解：如图，设三个平面为 α、β、γ

且 $\alpha\cap\beta=c$，$\alpha\cap\gamma=b$，$\beta\cap\gamma=a$，

$\because \alpha\cap\beta=c$，$\alpha\cap\gamma=b$

$\therefore c\subset\alpha$，$b\subset\alpha$．

从而 c 与 b 或交于一点，或互相平行．

(1) 若 c 与 b 交于一点，设 $c\cap b=P$，

由 $P\in c$ 且 $c\subset\beta$，有 $P\in\beta$，

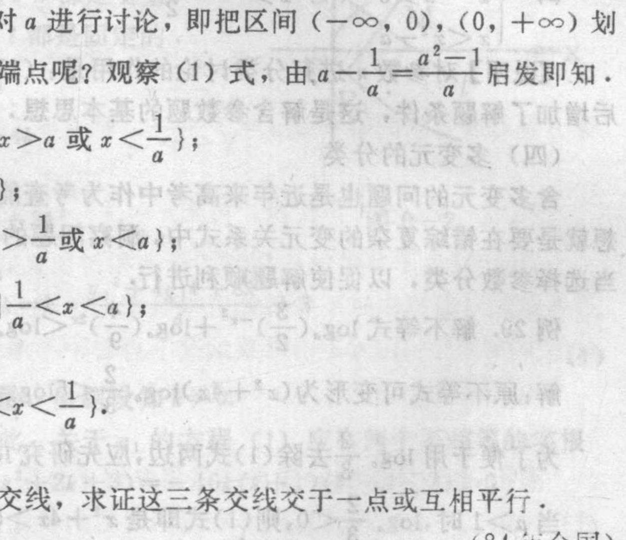


图 0—1

又由 $P\in b$ 且 $b\subset\gamma$，有 $P\in\gamma$，于是

$P\in\beta\cap\gamma=a$ $\quad\therefore a$、b、c 交于一点（即 P 点）；

(2) 若 $c/\!/b$，则由 $b\subset\gamma$，有 $c/\!/\gamma$，又由 $c\subset\beta$ 且 $\beta\cap\gamma=a$，可知 $c/\!/a$

$\therefore a$、b、c 互相平行．

【说明】对有些问题，在计算或推理过程中，遇到数量大小、图形位置或形状不能确立时，就应当分类讨论．

例 28. 已知 $n\in N$，$a>1$，解关于 x 的不等式

$\log_a x-4\log_{a^2}x+12\log_{a^3}x+\cdots+n\ (-2)^{n-1}\log_{a^n}x>\dfrac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$. （91 年全国）

解：原不等式化为

$\log_a x-2\log_a x+4\log_a x+\cdots+(-2)^{n-1}\log_a x>\dfrac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1-(-2)^n}{3}\log_a x>\dfrac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$ （※）

(1) n 为奇数时，不等式（※）化为 $\log_a x>\log_a(x^2-a)$ （Ⅰ）

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2-a>0\\x>x^2-a\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

(2) n 为偶数时，不等式（※）化为 $\log_a x<\log_a(x^2-a)$ （Ⅱ）

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2-a>0\\x<x^2-a\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

【说明】对参数 n 进行分类讨论的作用是：(1) 整体问题化为部分问题；(2) 化成部分问题后增加了解题条件，这是解含参数题的基本思想．

（四）多变元的分类

含多变元的问题也是近年来高考中作为考查能力的一种常见题型，解决这类问题的主导思想就是要在错综复杂的变元关系式中，洞察问题的特点，分清问题的主次，抓住问题的实质，恰当选择参数分类，以促使解题顺利进行.

例 29. 解不等式 $\log_a(\frac{3}{2})^{-x^2}+\log_a(\frac{4}{9})^{2x}<\log_a\frac{32}{243}$.

解:原不等式可变形为 $(x^2+4x)\log_a\frac{2}{3}<5\log_a\frac{2}{3}$ (1)

为了便于用 $\log_a\frac{2}{3}$ 去除(1)式两边,应先研究 $\log_a\frac{2}{3}$ 的符号,故选择 a 进行分类讨论．

当 $a>1$ 时,$\log_a\frac{2}{3}<0$,则(1)式即是 $x^2+4x>5$,故原不等式解集是

$\{x\,|x>1,$或 $x<-5\}$；

当 $0<a<1$ 时,$\log_a\frac{2}{3}>0$,则(1)式即是 $x^2+4x<5$,故原不等式解集是 $\{x\,|-5<x<1\}$.

例 30. 设 $a>0,a\neq1,t>0$,比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小并证明你的结论． （88 年全国）

分析：分清题中主变量与次变量是此题的关键，这里 t 是主变量．

解：作差：$\log_a\dfrac{t+1}{2}-\dfrac{1}{2}\log_a t=\log_a\dfrac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}$

(1) 当 $t=1$ 时，$\log_a \dfrac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}=0$，即 $\log_a \dfrac{t+1}{2}=\dfrac{1}{2}\log_a t$.

(2) 当 $t\neq 1$ 时，$\log_a \dfrac{t+1}{2}\neq \dfrac{1}{2}\log_a t$，此时分两种情况：

①若 $0<a<1$，$\log_a \dfrac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}<0$，$\therefore \log_a \dfrac{t+1}{2}<\dfrac{1}{2}\log_a t$；

②若 $a>1$，$\log_a \dfrac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}>0$，$\therefore \log_a \dfrac{t+1}{2}>\dfrac{1}{2}\log_a t$.

【说明】多元分类讨论时要注意逻辑划分的规则，即：(1) 多元的分层次；(2) 同层次的统一标准；(3) 逐层分析的连续性．

例 31. 已知 P_1P_2 为抛物线 C：$y^2=4x$ 的动弦，且它的中垂线 l 过定点 A (0, 3)，求 l 的倾斜角 α 的取值范围．

简析：因 P_1P_2 在抛物线 C 上，设 P_1 $(\frac{y_1^2}{4},\ y_1)$，P_2 $(\frac{y_2^2}{4},\ y_2)$，

则线段 P_1P_2 的中点为 M $(\frac{y_1^2+y_2^2}{8},\ \frac{y_1+y_2}{2})$．

因 l 过定点 A (0, 3)，垂直平分抛物线 C 的动弦 P_1P_2

故 l 的斜率存在，设为 k，则 l 的方程为 $y=kx+3$.

因 P_1P_2 是抛物线 C 的动弦，所以 y_1，y_2，k 都是变量，

我们先把它们都看成常量，这样 P_1P_2 及 l 都是固定的．

由 $P_1P_2\perp l$ 得到 y_1、y_2、k 的一个关系式

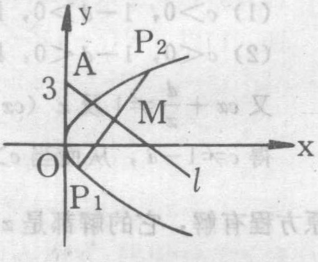


图 0—2

$$\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}\cdot k=-1，即\ y_2=-y_1-4k$$

代入 M 点的坐标，整理得 M $(\frac{y_1^2+4ky_1+8k^2}{4},\ -2k)$.

由中点 M 在 l 上得到 y_1、k 的关系式 $-2k=k\cdot\frac{y_1^2+4y_1k+8k^2}{4}+3$

整理得 $ky_1^2+4k^2y_1+8k^3+8k+12=0$ (1)

现在把 y_1 当作变量，把 k 当作待定的常量，由题设知 $k\neq 0$.

由 P_1P_2 的可变性知 P_1 也可代表 P_2，因此，关于 y_1 的方程 (1) 应有两个不相等的实根

$\therefore \Delta=(4k^2)^2-4k(8k^3+8k+12)=-16k(k^3+2k+3)=-16k(k+1)(k^2-k+3)>0$

$\because$ $k^2-k+3>0$，即 $k(k+1)<0$.

故 $-1<k<0$，又 $k=\mathrm{tg}\alpha$，故 $-1<\mathrm{tg}\alpha<0$. 而 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，故倾斜角 α 的范围是 $\alpha\in(\frac{3\pi}{4},\pi)$.

例 32. 若 $a>0$，$b>0$，$f(x)=(x-1)a^x+b^x$，$g(x)=xa^{x-1}b$，对任意自然数 n，试比较 $f(n)$ 与 $g(n)$ 的大小．

解：这里 a、b 是参数，由 x 是实数集上的变数知 n 也是变量，参数和变量交错在一起时，恰当选择参数分类，可简化解题过程，这里可对 a、b 分类．

(1) 当 $a=b$ 时，有 $f(n)=(n-1)a^n+b^2=na^{n-1}b=g_{(n)}$.

(2) 当 $a\neq b$ 且 $n=1$ 时有 $f(1)=b=g(1)$