高 等 幾 何

朱德祥 编

昆 明 师 院 函 授 处

1 9 8 3 . 3

前　　言

昆明师院数学系讲射影几何，曾用过多种教材。这本讲义是在使用孙泽瀛同志编写的《近世几何学》作教材以后以它为蓝本改编的，文化大革命以前用过，近几年也还用它。写得比较简略，讲课时要酌量加以丰润。此次重印增加了习题解答参考或提示，希望读者独立思考，不得已时才利用它。有的简略，有的详解，有的还节外生枝，希望对读者有点帮助。

只用代数工具讲射影几何，个人认为不适合师范院校开设这门课的目的，师范院校讲高等数学应尽量联系中学教学。这是写讲义时的一个着眼点，希望使用的同志加以丰富。

这讲义也嫌写得过分简单，来不及彻底改写，只有图之来日。

限于本人水平，疏漏错误之处一定不少，请广大读者见教，以便增进质量。

朱德祥

1981年4月

勘 误 表

页	行	误	正
12	2	$p(Q)=Q'$	$T(Q)=Q'$
33	倒6	$(AB,CD)\frac{1}{(AB,CD)}$	$(BA,CD)=\frac{1}{(AB,CD)}$
37	倒9	$=O$	$=0$（是数码0）
39	9	角被它的	角的=边被它的
43	倒6	流形射影	流形成射影
62	4	每对对直线	每对对应直线
73	8	$\lambda_E=(AA_2,EE)$	$\lambda_E=(A_1A_2,EE)$
73	倒8	E称为	E(1､1)称为
74	12	(x_1x_2,xe,x)	$(x_1x_2,x_e x)$
75	图5·1	图中少了一个E字	
83	10	意注	注意
85	9	$+\beta_3r$	$+\beta_3r_2$
91	倒3	那未	那末
93	倒8	$\overset{3}{\underset{j=1}{\Sigma}}$	$\sum_{j=1}^{3}$
96	9	作为影射	作为射影
103	天头	6.1次二曲线	6.1二次曲线
103	10	$E(A,B,,C,D)\overline{\wedge}E,(\cdots$	$E(A,B,C,D)\overline{\wedge}E'(\cdots$
104	倒5	(6·7)定理）	（6·5定理2）

页	行	误	正
110	倒 9	到转来	倒转来
112	图6·8	左图中少pQ线	
118	倒 5	$\sqrt{\mathrm{laiilx}}_{j}(($这…	$\sqrt{\mathrm{l}a_{ii}\mathrm{l}}x_{,}($这…
119	14	$=(a_{11}y$	$=(a_{11}y_1$
124	图6·12	图中少QR线	
124	11	三对边	三双对边
127	4	C_2与G	C_2或C_1
132	1	仿射质性	仿射性质
136	图7·3	图中少一个O字	
139	6行下面	(椭圆$A_{33}>0$)	椭圆($A_{33}>0$)
140	倒 2	渐近间	渐近线间
140	图7·7	中图字印倒了	
149	8	$y=-ix\pm\sqrt{\quad}$	$y=-ix\pm i\sqrt{\quad}$
161	习题图3·22中少了A′B与AB′的交点O′一字		
162	4	透视S	透视轴S
162	12	3·30一对…	3·30 任一对…
164	9	透似	透视
173	8	图7·7中	图7·8中
2	1		T_{n-1}
4	7		$\lambda=\frac{AC}{CB}=\cdots$
5	倒 2		$\frac{AAo}{BBo'}=\frac{A'Ao'}{B'Bo'}$

页	行	误	正
15	倒3		1.17证明在仿射…
19	倒5		。……平面上的无
23	倒6		线几何
58	3		，或是一个
61	1		3.23
	倒2		＝－1.差…
64	倒3		…，则
86	倒3		由于
89	4		…$v=\lambda/e$，则得
	8		…，故v必须
98	倒1		，…是否构
106	倒1		但
109	倒1	$\cdots+\Sigma_{ij}y_iy_j=o\cdots$	$\cdots+\Sigma a_{ij}y_iy_j=o$
110	倒1		…满足它
115	1		…直线v和ω，
122	倒4	$B_2+B_1x_3+B\ x_3{}^2++B_0x_3{}^2=0$	$B_2+B_1x_3+B_0x_3{}^2=0$
145	倒1		$\cdots\ln(-1)=\ln(e^{-i\pi})=i\pi$，
158	天头		158
	1		…，为椭园$\frac{x^2}{a^2}$
	2		——πab
	3		对角线的交点，两腰
165	1		(i) $\lambda=\frac{x}{3x-6}$
	8		$c'=$
	倒3		$=A_1A_2\cos A_2\operatorname{ctg}A_2$

目　录

射 影 几 何 学

第一章 仿射几何学的基本概念

本课程研究射影几何，在第一章我们介绍仿射几何的基本概念，作为从欧氏几何到射影几何的桥梁。

1.1 平行射影与仿射对应

首先让我们考虑同一平面内直线 a 到直线 a' 的平行射影（图1.1）。设 l 为平面上一直线，与 a 及 a' 都不平行。通过直线 a 上诸点 A、B、C、D、…作 l 的平行线，交 a' 于 A'、B'、C'、D'、…，这样便定义了直线 a 到直线 a' 的一个映射，称为平行射影，或透视仿射。a 上的点是原象点，a' 上的对应点是映象点，l 是平行射影的方向。记这个透视仿射为 T，则写 $A'=T(A)$，…。明显地，平行射影和方向有关，方向变了，就得出另外的透视仿射。

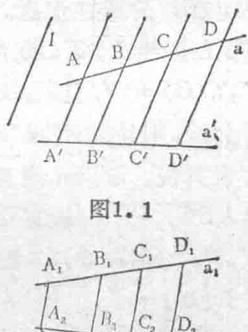

图1.1

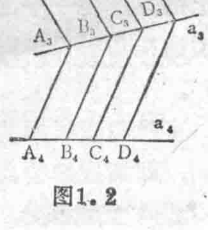

图1.2

现设同一平面内有 n 条直线 a_1、a_2、…、a_n（图1.2），用 T_1、T_2、…、

T_{n-1}顺次表示a_1到a_2、a_2到a_3、…、a_{n-1}到a_n的透视仿射，经过这一串平行射影，a_1上的点和a_n上的点建立了一个一一对应，称为a_1到a_n的仿射或仿射变换T：$T=T_{n-1}\cdots T_2T_1$，T称为T_1、T_2、…、T_{n-1}按这个顺序的乘积。$T(A_1)=T_{n-1}\cdots T_2T_1(A_1)=T_{n-1}\cdots T_2(A_2)=\cdots=A_n$，$T(B_1)=B_n$，等等。仿射是由有限回的平行射影组成的，所以仿射是透视仿射链或平行射影链。透视仿射是最简仿射，要断定一个仿射是否是透视仿射，只要看原象点和映象点的联线是否都平行。

仿此可以定义平面π到平面π'的平行射影或透视仿射T，平行射影的方向l要求既不与π又不与π'平行，射影方向改变了就得出另外的从π到π'的透视仿射。若$T(A)=A'$，$T(B)=B'$，$T(C)=C'$，且A、B、C共线，则易见A'、B'、C'也共线。设以a表直线ABC，以a'表直线$A'B'C'$（图1.3），则写$T(a)=a'$。

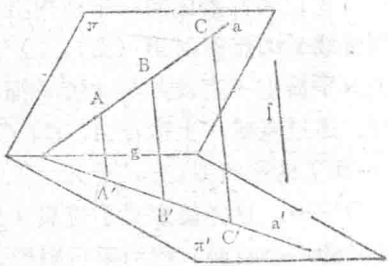

图1.3

所以二平面间的平行射影将一平面上的点映射为第二平面上的点，将一平面上的直线映射为第二平面上的直线。我们说透视仿射保留同素性（即几何元素点与线保持原先的种类）。

直线与直线间的透视仿射有一个自对应点（如果两线相交），即两线的公共点。同样，在平面到平面的透视仿射下，若两平面相交，则交线g为自对应点的轨迹，称为对应

轴，对应直线 a 与 a' 或相交于轴上，或都与轴平行。点在直线上，称为点与直线相接合。对于原象，点 A 与直线 a 接合，对于映象，点 A' 与直线 a' 接合，我们说透视仿射保留接合性。

仿照直线到直线的仿射，平面到平面的仿射是由有限回的平行射影组成的，或者说，仿射是透视仿射链。

1.2 仿射不变性与不变量

经过一切透视仿射不改变的性质和数量，称为仿射不变性和仿射不变量。经过仿射变换它们是不改变的。经过任何仿射变换不改变的图形、性质和数量，称为仿射图形、仿射性和仿射量。由上述已知同素性、接合性是仿射不变性。由此推知，仿射变换将共线点映射为共线点，将共点线映射为共点线。现在证明：

定理1 二直线间的平行性是仿射不变性。

设 a、b 是平面 π 内的两条平行线，a'、b' 是它们在平面 π' 内的仿射映象，求证 $a' /\!/ b'$。

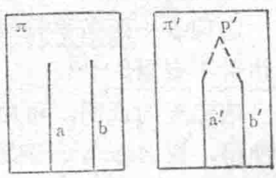

图1.4

若 a' 与 b' 不平行而相交于一点 P'（图1.4），且设 P 为 P' 的原象点，那末由于仿射保留接合性，点 P 应该既在 a 上又在 b 上，即是说 a 和 b 是相交而不平行了。

所以反证了 $a' /\!/ b'$。

系 平行四边形是仿射不变图形。

定义 设 A、B、C 为共线三点，这三点的简比 (ABC)

定义为下述有向线段的比：

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}。$$

C在线段AB上时，简比（ABC）<0，在AB的延长线上时，则（ABC）>0.

解析几何上讲过线段的定比分割，若点C分割线段AB的分割比记为λ，则

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{AC}{-BC}=-(ABC)。$$

所以简比（ABC）等于点C分割线段AB的分割比的负数。

定理2　共线三点的简比是仿射不变量。

要证明这一点，首先注意，对于透视仿射，即对于一回平行射影，这由初等几何是明显的(图1.1和1.3)。因此，经过透视仿射链，简比也保持不变。

定理3　两条平行线段之比是仿射不变量。

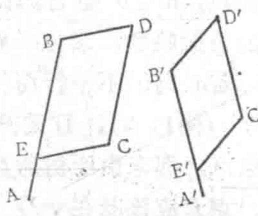

图1.5

这定理的证明，可由上述定理推得，设AB与CD是平面π内的平行线段，$A'B'$与$C'D'$是它们在平面π′内的仿射象（图1.5）。由定理1，$C'D'\parallel A'B'$.

在平面π内，过点C作$CE\parallel DB$交AB于E，在平面π′内过点C'作$C'E'\parallel D'B'$交$A'B'$于E'. 容易看出E'是E的仿射象。由定理2，（AEB）=（$A'E'B'$），即

$$\frac{AB}{EB}=\frac{A'B'}{E'B'}，或\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}。$$

定理4 一直线上任两线段之比是仿射不变量。

请读者自证。

注意：我们指出了，共线或平行二线段之比经过仿射变换不变，但任意二线段之比在仿射变换下并不保留。

现在我们来证明二图形的面积之比也是仿射不变量。我们先引进下述引理：

引理：在透视仿射下，任何一对对应点到对应轴的距离之比是一个常数。

设A与A'、B与B'是两对透视仿射对应点(图1.6)，从而$AA'\parallel BB'$。由这些点向对应轴作垂线AA_0、$A'A'_0$、BB_0、$B'B'_0$，设AB与$A'B'$相交于轴g上一点X，由相似三角形得

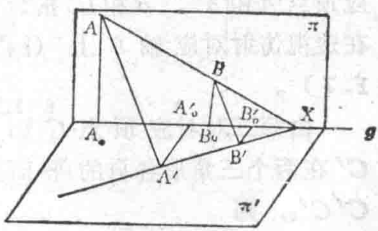

图1.6

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{AX}{BX}，\quad \frac{A'A'_0}{B'B'_0}=\frac{A'X}{B'X}。$$

但 $$\frac{AX}{BX}=\frac{A'X}{B'X}，$$

故有 $$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{A'A'_0}{B'B'_0}，$$

交换比例外项得

$$\frac{A'A'_0}{AA_0}=\frac{B'B}{BB}=\text{常数}k.$$

这常数k随给定的透视仿射而定。

利用这引理，我们证明

定理5　在仿射变换下，任何一对对应三角形面积之比等于常数。换句话说，任意两个三角形面积之比是仿射不变量。

先对透视仿射证明这个定理，再推广到一般仿射。证明分为两步。

第一步：设对应三角形ABC和$A'B'C'$有两对对应顶点A和A'、B和B'重合在透视仿射对应轴g上（图1.7）。

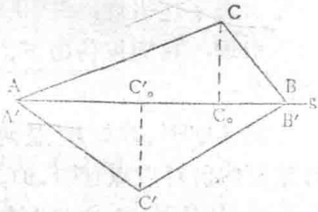

图1.7

由第三对对应顶点C和C'在两个三角形各自的平面上向对应轴g作垂线CC_0和$C'C'_0$，则

$$\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}A'B'\cdot C'C'_0}{\frac{1}{2}AB\cdot CC_0}=\frac{C'C'_0}{CC_0}.$$

由引理，末端为一常数k，所以$\triangle A'B'C'=k\triangle ABC$.

第二步：一般情况。

如图1.8所示，$\triangle ABC$与其透视仿射对应三角形$\triangle A'B'C'$中，三对对应边相交于对应轴g上。由第一步证明得　$\triangle A'B'C'=\triangle C'YX+\triangle B'XZ-\triangle A'YZ$

$$= k\triangle CYX + k\triangle BXZ - k\triangle AYZ$$
$$= k(\triangle CYX + \triangle BXZ - \triangle AYZ)$$
$$= k\triangle ABC$$

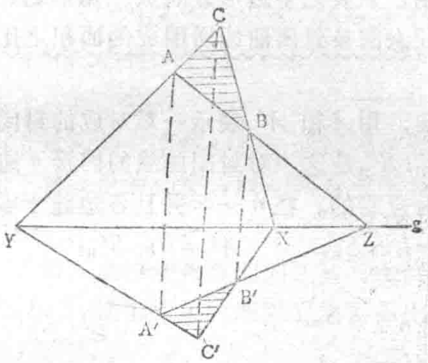

图1.8

对于一回平行射影即透视仿射证明了定理，我们进一步对于一般仿射证明这定理。

设平面π_1上的三角形$\triangle_1$经过透视仿射T_1变换为平面π_2上的三角形$\triangle_2$，$\triangle_2$经过透视仿射T_2变换为平面π_3上的三角形$\triangle_3$，以下类推，直至最后变换为平面π_n上的三角形$\triangle_n$。同样平面π_1上的三角形σ_1施用同一串透视仿射变换为π_n的三角形σ_n。设引理中所说的常数顺次为k_1、k_2、…、k_{n-1}，于是按已证部分，若置$k_1k_2\cdots k_{n-1}=k$（常数），则有

$\triangle_2=k_1\triangle_1$，$\triangle_3=k_2\triangle_2$，…，$\triangle_n=k_{n-1}\triangle_{n-1}$。从而$\triangle_n=k\triangle_1$；$\sigma_2=k_1\sigma_1$、$\sigma_3=k_2\sigma_2$，…，$\sigma_n=k_{n-1}\sigma_{n-1}$，从而$\sigma_n=k\sigma_1$。

所以有 $\dfrac{\triangle_1}{\sigma_1}=\dfrac{\triangle_n}{\sigma_n}$。

系 1　在仿射变换下，任何一对对应多边形面积之比等于常数。换句话说，任意两个多边形面积之比是仿射不变量。

为了证明，只要把多边形分解成三角形之和。

系 2　任意两条封闭曲线所围成的面积之比是仿射不变量。

为了证明，用A和 A' 表示一对对应的封闭曲线所围成的面积，S_n 和 S'_n是这一对封闭曲线的内接 n 边形的面积，它们是相互对应着的。在 $n\to\infty$并且各边趋于零的条件下，

$$A=\lim_{n\to\infty} S_n,\qquad A'=\lim_{n\to\infty} S'_n;$$

但已证　$S'_n=kS_n$，

取极限得　$A'=kA$。

仿此用B' 和 B表示另外一对对应的封闭曲线所围成的面积，则　$B'=kB$。

所以有　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A'}{B'}$。

1.3　平面到自身的透视仿射

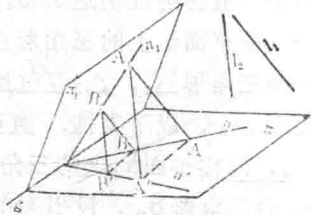

图1.9

设T_1为从平面 π 到π_1的透视仿射，射影方向为l_1；T_2 为从平面π_1到 π 的透视仿射，射影方向为l_2（图1.9）。T_1 将 π 上一点A映射为π_1上的点A_1，$AA_1/\!/l_1$；T_2将π_1上的点A_1射回为π

上一点A'，$A_1A'/\!/l_2$。所以透视仿射变换T_1和T_2的乘积$T=T_2T_1$将π上的点A变换为本身上的点A'。同样，设$T_1(B)=B_1$，$T_2(B_1)=B'$。则仿射变换T具有这样的性质，它将π上的点变为π上的点：$T(A)=A'$，$T(B)=B'$，将π上的直线$a=AB$变为π上的直线$a'=A'B'$，即是说，T保留同素性和结合性。

T_1将π上的相交直线a和b变换为π_1上的相交直线a_1和b_1，T_2把π_1上这两相交直线a_1和b_1变回为π上两相交直线a'和b'，因而T将π上的相交直线a和b变为π自身上的相交直线a'和b'。

同样，T将π上的平行线变为π自身上的平行线。

由于T_1和T_2保留简比，所以T保留简比。

由于$AA_1/\!/l_1/\!/BB_1$，$A_1A'/\!/l_2/\!/B_1B'$，所以平面$AA_1A'/\!/$平面BB_1B'。这两平行平面和π的交线AA'和BB'于是平行，即是说，在变换T下，对应点的联线AA'、BB'具有固定的方向。

显然π和π_1的交线g上每一点经过T不变。

我们称T为平面π到自身的透视仿射，他将点变为点，直线变为直线，保留结合性，保留平行性，保留简比，保留平行线段的比，保留两图形面积的比，并且对应点的联线相平行，有一条直线g上的每一点为自对应点。

g称为平面到自身的透视仿射对应轴，AA'给出透视仿射的方向。

一对对应直线或者相交在对应轴上，或都与对应轴平行。

定理 平面内的透视仿射由对应轴与一对对应点完全决定。

设已知对应轴g与一对对应点A、A'。B为平面上任一